गणित प्रकाश

नवम् श्रेणी

पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद

प्रथम संस्करण : दिसम्बर, 2014

पुस्तक अधिकार : पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद

प्रकाशक :
प्राध्यापिका नवनीता चटर्जी
सचिव, पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद
77/2, पार्क स्ट्रीट, कोलकाता - 700 016

मुद्रक :
वेस्ट बेंगल टेक्सबुक कारपोरेशन लिमिटेड
(पश्चिमबंग सरकार का उपक्रम)
कोलकाता - 700 056

सत्यमेव जयते

भारतीय संविधान

<u>प्रस्तावना</u>

हम, भारत के लोग, भारत के एक संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न धर्मनिरपेक्ष समाजवादी लोकतंत्रात्मक गणराज्य बनाने के लिए तथा उसके समस्त नागरिकों को न्याय, सामाजिक, आर्थिक और राजनीतिक, स्वतंत्रता, विचार की अभिव्यक्ति की, विश्वास की धर्म एवं पूजा की समानता- प्रतिष्ठा एवं अवसर की समता प्राप्त करने के लिए तथा उन सब में, भ्रातृत्व- जिसमें व्यक्ति की गरिमा और राष्ट्र की एकता सुनिश्चित रहे का वर्धन करने के लिए इस संविधान सभा में आज **26** नवम्बर **1949** को इसके द्वारा इस संविधान को स्वीकार करते है, कानून का रूप देते हैं और अपने-आप को इस संविधान को अर्पण करते है।

THE CONSTITUTION OF INDIA

<u>PREAMBLE</u>

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC and to secure to all its citizens : JUSTICE, social, economic and political; LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship; EQUALITY of status and of opportunity and to promote among them all – FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation; IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November 1949, do HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.

भूमिका

राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रूपरेखा 2005 एवं शिक्षा अधिकार कानून 2009 इन दोनों को महत्त्व देते हुए वर्ष 2011 में पश्चिम बंगाल सरकार के नेतृत्व में गठित 'विशेषज्ञ समिति' के विद्यालय स्तर का पाठ्यक्रम, पाठ्यसूची एवं पाठ्य पुस्तकों की समीक्षा और पुनर्विवेचना का दायित्व दिया गया। इस समिति के विषय विशेषज्ञ के अथक प्रयत्न एवं परिश्रम से इस पुस्तक को तैयार कर पाना सम्भव हो सका है।

इस गणित की पुस्तक में नवम् श्रेणी के पाठ्यसूची के अनुसार ही प्रणयन और नामकरण किया गया है। 'गणित प्रकाश'। इस पुस्तक में गणित की भाषा में समाधान करने की प्रचलित अवधारणा को अपनाया गया है, जिससे गणित की भाषा में भाषातंरित समस्या को देखकर विद्यार्थी आसानी से समझ पाए कि संश्लिष्ट समस्या में किस गणित की प्रक्रिया, सूत्र अथवा पद्धति के प्रयोग करने की जरुरत है।

अंकगणित, बीजगणित और ज्यामिती विषयों को सुन्दर और सहज भाषा में इस तरह से बतलाया गया है कि जिससे समस्त विद्यार्थियों के समाधान करने में सफलता हासिल करने के उद्देश्य को भली-भाँति इस पुस्तक में प्रसारित किया गया है।

विभिन्न शिक्षक, शिक्षाप्रेमी, शिक्षाविद, विषय विशेषज्ञ और अलंकरण के लिए प्रसिद्ध कलाकार-जिनके निरंतर श्रम एवं अथक प्रयास से इस महत्त्वपूर्ण पुस्तक को तैयार करना सम्भव हो सका। उन सभी को पर्षद की ओर से आंतरिक धन्यवाद और कृतज्ञता ज्ञापित करता हूँ।

पश्चिमबंग सर्वशिक्षा मिशन की आर्थिक सहायता से यह पुस्तक छात्र-छात्राओं को बिना मूल्य के वितरण की जाएगी। इस परियोजना को कार्यान्वित करने के लिए पश्चिम बंगाल के माननीय शिक्षा मंत्री डॉ० पार्थ चटर्जी, पश्चिम बंगाल सरकार का शिक्षा विभाग, पश्चिमबंग शिक्षा अधिकार एवं पश्चिम बंगाल सर्व शिक्षा मिशन ने विभिन्न प्रकार से सहायता की है। उनकी भूमिका को अनदेखा नहीं किया जा सकता है।

आशा करता हूँ कि पर्षद द्वारा प्रकाशित इस 'गणित प्रकाश' पुस्तक विद्यार्थियों में विज्ञान विषय के प्रति आकर्षित करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका का पालन करेगी और माध्यमिक स्तर पर गणित चर्चा का मान उन्नयन करने में सहायक होगा। इससे छात्र-छात्राएं लाभान्वित होगे। इस तरह से ही पर्षद की सामाजिक प्रतिबद्धता सार्थक होगी।

समस्त शिक्षाप्रेमी, शिक्षक-शिक्षिका और संश्लिष्ट सभी से मेरा विनित अनुरोध है कि आप अपने बहुमूल्य परामर्श एवं सुझाव देने का प्रयास करें ताकि आगामी दिनों में आने वाले संस्करण में संशोधन किया जा सके। इस पुस्तक के जरिए मान उन्नयन होगा और छात्र-छात्राएँ लाभाविन्त होगे। अंग्रेजी में एक कहावत है— 'even the best can be bettered' पुस्तक की उत्कृष्टता के लिए शिक्षक समाज और विद्वान व्यक्तियों के विचार एवं परामर्श को हमेशा ग्रहण करेंगे।

दिसम्बर, 2014
77/2 पार्क स्ट्रीट
कोलकाता 700 016

कल्याणमय गांगुली
प्रशासक
पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद

प्राक्कथन

पश्चिम बंगाल की माननीया मुख्यमंत्री सुश्री ममता बनर्जी ने 2011 में विद्यालय की शिक्षा के लिए एक 'विशेषज्ञ समिति' का गठन किया। इस विशेषज्ञ समिति को यह दायित्व दिया गया कि विद्यालय स्तर के समस्त पाठ्यक्रम, पाठ्सूची एवं पाठ्य-पुस्तक की पुन: पुनर्विवेचना एवं पुनर्विन्यास प्रक्रिया को संचालित करें। उस समिति की सिफारिश के अनुसार नवीन पाठ्यक्रम, पाठ्यसूची एवं पाठ्य-पुस्तक तैयार किया गया। इस पूरी प्रक्रिया में राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रूपरेखा 2005 शिक्षा अधिकार नियम 2009 (RTE, 2011) इन दोनों को ध्यान में रखा गया है। इसके साथ ही साथ समग्र परिकल्पना में रवीन्द्रनाथ ठाकुर के शिक्षा दर्शन की रूपरेखा को आधार के रूप में ग्रहण किया है।

नवम् श्रेणी के गणित की पुस्तक का नाम '***गणित प्रकाश***' है। पुस्तक में क्रम से गणित की समस्या के समाधान की पद्धति को बतलाया गया है। विद्यार्थियों की सुविधा के लिए प्रत्येक क्षेत्र में यत्नपूर्वक मौलिक अवधारणाओं को सरल भाषा एवं स्वयं करों पद्धति के जरिए दर्शाया गया है। 'गणित' विषय के वैचित्र्यमय एवं आकर्षणीय बनाने के प्रयास को पुस्तक में सहजता से देखा जा सकता है। विद्यार्थियों के प्रायोगिक सामर्थ्य वृद्धि की ओर भी ध्यान दिया गया है। आशा करता हूँ कि शिक्षा जगत् में यह पुस्तक प्रशंसनीय होगा। इस 'गणित प्रकाश' पुस्तक को नवीन शैक्षणिक वर्ष (2015) में पश्चिमबंग सर्व शिक्षा मिशन की आर्थिक सहायता से राज्य के समस्त छात्र-छात्राओं को बिना मूल्य वितरण किया जाएगा।

यह बात बतलाना महत्त्वपूर्ण है कि प्रथम श्रेणी से लेकर नवम् श्रेणी तक परिकल्पित नया पाठ्य क्रम और पाठ्य सूची के अनुसार निर्मित पाठ्य पुस्तक निरन्तर एवं क्रमागत गणित विषय की अवधारणा (Concept) एवं अनुशीलन पद्धति का विस्तार किया गया है। विद्यार्थी क्रमागत उच्च श्रेणी में उत्तीर्ण होकर इस पाठ्य पुस्तक का अनुसरण करने पर सहजता से ही वे गणित की पारदर्शिता को अर्जित करेगें।

चयनित शिक्षाविद शिक्षक-शिक्षिका एवं विषय विशेषज्ञों ने अल्प समय में इस पुस्तक को प्रस्तुत करने का प्रयास किया है। पश्चिम बंगाल के माध्यमिक शिक्षा व्यवस्था के विद्वत लोगों ने पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद के पाठ्य-पुस्तक का अनुमोदन कर हमें कृतज्ञ किया है समय-समय पर पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद, पश्चिम बंगाल सरकार का शिक्षा विभाग, पश्चिम बंगाल सर्व शिक्षा अभियान एवं पश्चिम बंगाल शिक्षा अधिकार ने जो सहायता प्रदान किया है, उन्हें भी धन्यवाद देना चाहूँगा।

पश्चिम बंगाल के माननीय शिक्षा मंत्री डॉ. पार्थ चटर्जी ने आवश्यक विचार एवं परामर्श देकर हमें कृतज्ञ किया है। उनके प्रति अपनी कृतज्ञता व्यक्त करते है।

पुस्तक की उत्कृष्टता के लिए शिक्षा अनुरागी लोगों के विचार -परामर्श को हम सादर ग्रहण करेंगे।

अभीक मजूमदार
चेयरमैन
विशेषज्ञ समिति
विद्यालय शिक्षा विभाग
पश्चिम बंगाल सरकार

दिसम्बर, 2014
निवेदिता भवन, पंचम तल्ला
विधाननगर, कोलकाता - 700 091

विशेषज्ञ —समिति द्वारा परिचालित पाठ्य-पुस्तक प्रणयन पर्षद

निर्माण और विन्यास

प्राध्यापक अभीक मजूमदार (चेयरमैन, विशेषज्ञ समिति)

प्राध्यापक रथीन्द्रनाथ दे (सदस्य सचिव, विशेषज्ञ समिति)

शंकरनाथ भट्टाचार्य

सुमना सोम

तपसुन्दर बन्दोपाध्याय

मलय कृष्ण मजूमदार

पार्थ दास

परामर्श और सहायता

डॉ नुरूल इस्लाम

आवरण और अलंकरण

शंकर बसाक

मुद्रण सहयोग

विप्लव मण्डल

पाठ्य-क्रम

1. वास्तविक संख्या :

(i) प्राकृतिक संख्या, अखंड संख्या, पूर्ण संख्या, परिमेय संख्या, अपरिमेय संख्या, वास्तविक संख्या और बीजगणितीय संख्या की अवधारणा।

(ii) वास्तविक संख्या को दशमलव संख्या के रूप में लिखना।

(iii) वास्तविक संख्याओं को संख्या-रेखा पर दिखाना।

(iv) वास्तविक संख्याओं का जोड़, घटाव, गुणा, भाग।

2. घातांक के नियम :

(i) आधार, घातांक, करणी और घात की अवधारणा।

(ii) घातांक के रूप में पूर्ण संख्या और भिन्न संख्या की अवधारणा।

(iii) घातांक सम्बन्धी नियम एवं उनके प्रयोग।

(iv) घातांक वाले समीकरण और भेद।

3. लेखाचित्र :

(i) समकोणी कार्टेशियन तल और स्थानांक की अवधारणा।

(ii) बिन्दु के स्थानांक की अवघारणा और कार्टेशियन तल पर बिन्दु को अंकित करने की अवधारणा।

(iii) एक चलराशि और दो चल युक्त एकघातीय समीकरणों की अवधारणा और उनका लेखाचित्र अंकित करना।

(iv) लेखाचित्र की सहायता से युगपत समीकरणों का समाधान (हल)। केवल एक हल, असंख्य हल और 'हल संभव नहीं' की अवधारणा।

4. स्थानांक ज्यामिति : दूरी निकालने का सूत्र

(i) समकोणीय कार्टेशियन तल पर दो बिन्दुओं के बीच की दूरी और उसके प्रयोग की अवधारणा।

5. सरल युगपत समीकरण : (दो चलराशि युक्त)

(i) युगपत समीकरणों का हल (विस्थापन, तुलनात्मक, विलोपन तथा वज्रगुणन पद्धति)।

(ii) युगपत समीकरणों की सहायता से वास्तविक समस्याओं का हल।

6. समानान्तर चतुर्भुज के गुण :

(i) चतुर्भुज, ट्रेपिजियम, समानान्तर चतुर्भुज, आयत, वर्ग और रोम्बस की अवधारणा।

(ii) किसी समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजाएँ परस्पर समान होती है। (ii) विपरीत कोण परस्पर समान होते है एवं (iii) प्रत्येक विकर्ण इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है — प्रमाण।

(iii) किसी समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है — प्रमाण।

(iv) किसी चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ परस्पर समान हो तो यह एक समानान्तर चतुर्भुज है — प्रमाण।

(v) किसी चतुर्भुज विपरीत कोण परस्पर समान हो तो यह एक समानान्तर चतुर्भुर्ज है — प्रमाण।

(vi) किसी चतुर्भुज की आमने-सामने की एक जोड़ी भुजायें परस्पर समान और समानान्तर हो तो यह एक समानान्तर चतुर्भुज है — प्रमाण।

(vii) किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करे तो यह एक समानान्तर चतुर्भुज है — प्रमाण।

(viii) उपरोक्त तथ्यों का प्रयोग।

7. बहुपदी व्यंजक :

(i) एक या एक से अधिक चर युक्त बहुपदी व्यंजक की अवधारणा।

(ii) बहुपदी व्यंजक के शून्य की अवधारणा।

(iii) भागशेष का प्रमेय।

(iv) एक गुणन-खण्ड का प्रमेय।

(v) शून्य बहुपदीय (व्यंजक) की अवधारणा।

(vi) उपरोक्त प्रत्येक का प्रयोग।

8. गुणनखण्ड करना : $a^2 - b^2$, $a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$, $a^3+b^3+c^3-3abc$, मध्यपद गुणनखण्ड, शून्य पद्धति।

9. तिर्यक रेखा और मध्य बिन्दु से युक्त प्रमेय :

(i) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा-खण्ड तीसरी भुजा के समानान्तर और इसकी आधी होती है — प्रमाण।

(ii) किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी भुजा के सामानान्तर खींची गई सरल रेखा खण्ड तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है और दूसरी भुजा की आधी होती है — प्रमाण।

(iii) तीन या अधिक समानान्तर सरल रेखायें यदि अपने को काटने वाली रेखा-खण्ड पर समान-समान अन्तखंड बनायें तो ये दूसरी काटने वाली रेखा पर भी समान अन्तखंड बनायेंगी। — प्रमाण आवश्यक नहीं। सिर्फ जाँच लेना जरुरी है।

(iv) उपरोक्त तथ्यों का प्रयोग।

10. लाभ और हानि : क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य, लाभ, हानि, निर्धारित (या अंकित) मूल्य, क्रयमूल्य (पर लाभ या हानि प्रतिशत, विक्रय मूल्य पर लाभ या हानि प्रतिजत, छूट, समतुल्य छूट की अवधारणा और इसका प्रयोग।

11. सांख्यिकी :

(i) तथ्यों की तालिका सम्बन्धी ज्ञान।

(ii) आवृत्ति (परिसंख्या-विभाजन) की तालिका की तैयारी।

(iii) क्रमवार आवृत्ति का ज्ञान।

(iv) वर्गांकित तल पर आयत-लेखांकन।

(v) आवृत्ति का बहुभुज अंकन।

12. क्षेत्रफल वाले प्रमेय :

(i) एक ही आधार पर और समानान्तर रेखा द्वय के बीच स्थित समानान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल समान होता है — प्रमाण।

(ii) समान-समान आधार पर और समानान्तर रेखाद्वय के बीच स्थित समानान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल समान होता है।

(iii) समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = समानान्तर चतुभुर्ज का आधार × ऊँचाई।

(iv) एक त्रिभुज और एक समानान्तर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक जोड़ी समानान्तर रेखाओं के बीच स्थित हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है — प्रमाण।

(v) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई।

(vi) एक आधार पर और समानान्तर रेखा द्वय के बीच स्थित त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होते है — प्रमाण।

(vii) समान समान आधार पर और समानान्तर रेखा द्वय के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल समान होते है।

(viii) समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज एक ही आधार पर और इसके एक ही ओर स्थित हो तो वे समानान्तर रेखा द्वय के बीच स्थित होते है — प्रमाण।

(ix) उपरोक्त तथ्यों का प्रयोग।

13. निर्मेय : किसी त्रिभुज के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल वाले एक समानान्तर चतुभुर्ज का अंकन जिसका एक शीर्ष कोण दिया गया है और इसका प्रयोग।

14. निर्मेय : चतुर्भुज के समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों का अंकन : किसी चतुर्भुज के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज का अंकन और इसका प्रयोग।

15. त्रिभुज और चतुर्भुज की परिसीमा और क्षेत्रफल :

(i) त्रिभुज की परिसीमा और क्षेत्रफल ज्ञात करना। हेरन के सूत्र की अवधारणा।

(ii) आयन क्षेत्र, वर्ग क्षेत्र, समानान्तर चतुर्भुज, रोम्बस ट्रेपिजियम की परिसीमा की परिसीमा और क्षेत्रफल ज्ञात करना।

16. वृत्त की परिधि : वृत्त की परिधि ज्ञात करना। [मान लिया जाता है, $\pi = \frac{22}{7}$ लगभग]

17. संगामी रेखाओं वाले प्रमेय :

(i) त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्द्धक संगामी होते है — प्रमाण। परिकेन्द्र, परि अर्द्धव्यास, परिवृत्त की अवधारणा।

(ii) त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से विपरीत भुजाओं पर खींचे गये लम्ब संगामी होते है — प्रमाण। लम्बबिन्दु, त्रिभुज के आधार की अवधारणा।

(iii) त्रिभुज के कोणों के अन्त: समद्विभाजक संगामी होते है — प्रमाण। अन्त: केन्द्र, अन्तर्अर्द्धव्यास, अन्तर्वृत्त की अवधारणा।

(iv) त्रिभुज की मध्यिकाएं संगामी होती है — प्रमाण। केन्द्रक की अवधारणा तथा केन्द्रक प्रत्येक मध्यिका को 2:1 अनुपात में विभाजित करता है — इसकी अवधारणा।

(v) उपरोक्त तथ्यों का प्रयोग।

18. वृत्त का क्षेत्रफल : वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करना [मान लिया जाता है, $\pi = \frac{22}{7}$ लगभग]

19. स्थानाकं ज्यामिति : सरल रेखा-खण्ड का अन्त: विभाजन और बहिर्विभाजन : किसी एक सरल रेखा को दिये गये अनुपात में अन्त:विभाजित और बहिविभाजित करने वाले बिन्दु का स्थानांक ज्ञात करने के सूत्र की अवधारणा और इसका प्रयोग।

20. स्थानांक ज्यामिति : त्रिभुजाकृति क्षेत्र का क्षेत्रफल

(i) दिये गये तीन बिन्दुओं से बने त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल।

(ii) दिये गये चार बिन्दुओं से बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल।

(iii) दिये गये तीन बिन्दुओं के एक (या सम) रेखीय होने की शर्त्त।

(iv) त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात करना।

21. लॉगरिथ्म :

(i) आवश्यकता / उपयोगिता।

(ii) परिभाषा।

(iii) साधारण लॉगरिथ्म और सहज लॉगरिथ्म की अवधारणा।

(iv) लॉगरिथ्म के गुण।

(v) सहज लॉगरिथ्म के उपयोग।

संयोजन : (मूल्यांकन के अन्तर्गत नहीं)

22. समुच्चय सिद्धान्त

23. संभावना-सिद्धान्त

अन्तिम समयबद्ध मूल्यांकन का अंक विभाजन

विषय	वहु विकल्प आधारित प्रश्न	संक्षिप्र उत्तर वाले प्रश्न	दीर्घ उत्तरीय प्रश्न **	कुल
अंकगणित	2 (1×2)	4 (2×2)	4	10
बीजगणित	5 (1×5)	8 (2×4)	22	35
ज्यामिति	2 (1×2)	4 (2×2)	11	17
स्थानांक ज्यामिति	1 (1×1)	2 (2×1)	3	6
क्षेत्रमिति	2 (1×2)	4 (2×2)	6	12
सांख्यिकी	2 (1×2)	4 (2×2)	4	10
कुल अंक	**14**	**26**	**50**	**90**
	14 + 26 = 40			

(m × n) = (प्रश्न पर अंक × प्रश्न की संख्या)

** दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

अंकगणित		
(i) वास्तविक संख्या (ii) लाभ और हानि	2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 4 अंक
बीजगणित		
(i) बहुपदी व्यंजक	2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 3 अंक
(ii) गुणनखण्ड ज्ञात करना	2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 3 अंक
(iii) लेखाचित्र	2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 4 अंक
(iv) युगपत समीकरण का हल	2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 3 अंक
(v) समस्याओं में युगपत समीकरण का प्रयोग	2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 3 अंक
(vi) घातांक के नियम	2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 3 अंक
(vii) लॉगरिथ्म	2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 3 अंक
सांख्यिकी	2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 4 अंक
ज्यामिति		
	2 प्रमेयों में से 1 प्रमेय	= 4 अंक
	प्रमेयों पर आधारित प्रश्नों के हल 2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 3 अंक
	निर्मेय (अंकन) 2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 4 अंक
निर्देशांक (स्थानांक) ज्यामिति	2 प्रश्नों में से 1 प्रश्न का उत्तर	= 3 अंक
क्षेत्रमिति	3 प्रश्नों में से 2 प्रश्नों के उत्तर = 3 × 2 अंक	= 6 अंक

विषय-सूची

पाठ (अध्याय)	विषय	पृष्ठ
1	वास्तविक संख्या (Real Numbers)	1
2	घातांक के नियम (Laws of Indices)	21
3	लेखाचित्र (Graph)	29
4	स्थानांक ज्यामिति : दूरी निकालने का सूत्र (Co-ordinate Geometry : Distance Formula)	41
5	सरल युगपत समीकरण (दो चलराशि युक्त) (Linear Simultaneous Equations)	47
6	सामानान्तर चतुर्भुज के गुण (Properties of Parallelogram)	72
7	बहुपदी व्यजंक (Polynomial)	94
8	गुणनखण्ड करना (Factorisation)	112
9	निर्यक और मध्य बिन्दु युक्त प्रमेय (Transversal & Mid-Point Theorem)	123
10	लाभ और हानि (Profit and Loss)	133
11	सांख्यिकी (Statistics)	151
12	क्षेत्रफल वाले प्रमेय (Theorems on Area)	174
13	निर्मेय : (Construction)	194
14	निर्मेय : चतुर्भुज के समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों का अंकन (Construction)	198
15	त्रिभुज और चतुर्भुज की परिसीमा और क्षेत्रफल (Area & Perimeter of Triangle & Quadrilateral).	202
16	वृत्त की परिधि (Circumference of Circle)	227
17	संगामी रेखाओं वाले प्रमेय (Theorems on concurrence)	233
18	वृत्त का क्षेत्रफल (Area of Circle)	247
19	स्थानांक ज्यामिति : सरल रेखा-खण्ड का अन्त:विभाजन और बहिर्विभाजन (Co-ordinate Geometry: Internal and External Division of Straight Line Segment)	262
20	स्थानांक ज्यामिति : त्रिभुजाकृति क्षेत्र का क्षेत्रफल (Co-ordinate Geometry: Area of Triangular Region)	271
21	लॉगरिथ्म (Logarithm)	277

संयोजन : (मूल्यांकन के अन्तर्गत नहीं)

22 समुच्चय सिद्धान्त (Set Theory) 288

23 संभावना-सिद्धान्त (Probability Theory) 295

1 वास्तविक संख्या (REAL NUMBER)

हर वर्ष की तरह इस वर्ष भी हमारे मुहल्ले के नेताजी बालक संघ के मैदान में हस्तशिल्प मेले का आयोजन हुआ था। इस मेले में हमलोगों ने अपने हाथ से बनी वस्तुओं को बेचा था।

हमलोगों ने निर्णय लिया है कि मेले में हमलोगों द्वारा बनायी गयी वस्तुओं को बेचकर जो पैसे मिलेंगे उसका अधिकांश हिस्सा मुहल्ले की उन्नति के लिए संघ को दान देंगे।

इसीलिए मेले में कौन-कौन सी वस्तु कितने रुपये में बिकी उसकी तालिका बनाकर संघ के बोर्ड पर लिखा गया।

रंगीन कार्ड (बेचकर)	65 रु०	अचार (बेचकर)	385 रु०
तस्वीर (बेचकर)	275 रु०	साड़ी (बेचकर)	942 रु०
कपड़े का झोला (बेचकर)	512 रु०	पापड़ (बेचकर)	135 रु०

देखते हैं, बोर्ड पर लिखे तथ्यों में कई संख्यायें लिखी हुई हैं।

ये संख्यायें किस प्रकार की संख्यायें हैं, इन्हे समझने की चेष्टा करते हैं।

65, 275, 512, 385, 942, 135 .... संख्यायें प्राकृतिक संख्यायें (Natural Numbers) हैं। गणना करने से ही संख्याओं की सृष्टि हुई है। इसीलिये 1, 2, 3, 4, ..., 50, ... इन्हें हम गणना की संख्या या स्वाभाविक व प्राकृतिक संख्या कहते हैं।

प्राकृतिक संख्याओं में सबसे छोटी संख्या ☐ है।

अब हम प्राकृतिक संख्याओं को बगल के वृत्ताकार रंगीन क्षेत्र में लिखते हैं और इन संख्याओं का एक समूह बनाते हैं।

स्वाभाविक संख्या का दल

प्राकृतिक संख्याओं के इस समूह को अंग्रेजी अक्षर 'N' द्वारा प्रकट किया जाता है।

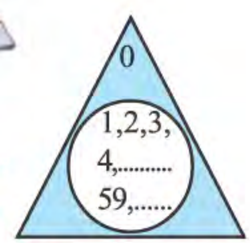
मनामी ने अपना चित्र बेचकर 275 रु० पाया था। लेकिन उसने पूरे 275 रु० मुहल्ले की उन्नति के लिए संघ (क्लब) में दान दे दिया।

मनामी के पास शेष बचे = 275 रु० – 275 रु० = 0 रु०

'0' क्या प्राकृतिक संख्या है?

नहीं '0' प्राकृतिक संख्या नहीं है।

0, 1, 2, 3, ... ये सभी अखण्ड संख्यायें (Whole Numbers) हैं।



अखण्ड संख्या का दल

प्राकृतिक संख्याओं के समूह में (0) शामिल कर देने पर अखण्ड संख्याओं का समूह बन जाता है। अर्थात् 0 और प्राकृतिक संख्याओं को अखण्ड संख्या (Whole Numbers) कहते हैं।

हम बगल (पार्श्व) में अखण्ड संख्याओं को त्रिभुजाकार क्षेत्र में लिखकर अखण्ड संख्याओं का समूह बनाते हैं। अखण्ड संख्याओं के समूह को अंग्रेजी अक्षर 'W' द्वारा प्रकट किया जाता है।

1 कार्ड और अचार बेचकर कुल कितने रुपये मिले योग करके लिखते हैं।

कार्ड और अचार बेचकर मिले कुल, 65 रु० + 385 रु० = 450 रु०

450 एक ☐ संख्या। अर्थात् दो प्राकृतिक संख्याओं का योगफल प्राकृतिक संख्या पाते हैं।

अब हम किन्हीं दो प्राकृतिक संख्याओं को योगकर देखते हैं।

दो प्राकृतिक संख्याओं का योग सदैव एक प्राकृतिक संख्या होता है। [विभिन्न प्राकृतिक संख्याओं को जोड़कर जाँच लेते हैं]

2 किन्हीं दो अखण्ड संख्याओं का योगफल सदैव एक अखण्ड संख्या होता है [अलग-अलग प्राकृतिक संख्याओं को जोड़कर स्वयं जाँच लें]

3 अब हम किन्हीं दो प्राकृतिक या अखण्ड संख्याओं को गुणा करके जो मिलता है उसे लिखते हैं तो पाते हैं कि, दो प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल सदैव ☐ संख्या मिलता है। दो अखण्ड संख्याओं का गुणनफल सदैव एक अखण्ड संख्या होता है।

4 यदि दो प्राकृतिक संख्याओं का वियोग करें तो देखें वियोगफल भी प्राकृतिक संख्या होता है या नहीं ?

दो प्राकृतिक संख्यायें 65 और 385 लेते हैं।

$65 - 385 = -320$

65 से 385 का वियोग करके –320 पाते हैं जो प्राकृतिक संख्या नहीं है।

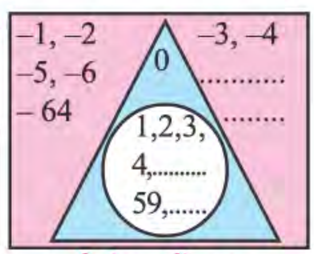
अर्थात् दो प्राकृतिक संख्याओं का वियोग सदैव एक प्राकृतिक संख्या नहीं होता।

5 –320 किस प्रकार की संख्या है ?

–320 एक पूर्ण संख्या है।

> अखण्ड संख्या और –1, –2, –3, ... संख्यायें मिलकर पूर्ण संख्या (Integers) का समूह बनाती हैं। पूर्ण संख्याओं के समूह को अंग्रेजी अक्षर 'Z' द्वारा प्रकट किया जाता है।

हम पूर्ण संख्याओं को पार्श्व के आयताकार क्षेत्र में लिखते हैं और पूर्ण संख्याओं का समूह बनाते हैं।



पूर्ण संख्याओं का दल

> पूर्ण संख्याओं के समूह में, कुछ संख्यायें 0 (शून्य) से बड़ी हैं और कुछ संख्यायें 0 (शून्य) से छोटी हैं। इन्हें क्या कहा जाता है ?
> 0 से बड़ी पूर्ण संख्याओं अर्थात् 1, 2, 3, ... को **धनात्मक पूर्ण संख्या (Positive Integers)** और 0 से छोटी पूर्ण संख्याओं अर्थात् –1, –2, –3, ... को **ऋणात्मक पूर्ण संख्या (Negative Integers)** कहा जाता है।

> किन्तु 0 (शून्य) एक पूर्ण संख्या है जो धनात्मक अथवा ऋणात्मक पूर्ण संख्या नहीं है।

6 किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं को लेकर इनका योग, वियोग और गुणा करके देखा जाए क्या मिलता है।

-8 और -5 संख्याओं का योग, वियोग और गुणा करते हैं।

$(-8) + (-5) = \square$, $(-8) - (-5) = \square$ एवं $(-8) \times (-5) = \square$

पाते हैं, (-8) और (-5) दो पूर्ण संख्याओं का योगफल, वियोगफल और गुणनफल पूर्ण संख्या ही है।

7 हम किन्ही अन्य दो पूर्ण संख्याओं को लेकर उनका योग, वियोग और गुणा करके देखते हैं कि पूर्ण संख्याओं का योगफल, वियोगफल तथा गुणनफल सदैव $\square$। [स्वयं जाँच कर देखें।]

8 यदि दो पूर्ण संख्याओं में भाग की क्रिया की जाए तो क्या मिलता है – देखें।

$$5 \div 7 = \frac{5}{7}, \quad 9 \div 2 = \frac{9}{2}$$

दो पूर्ण संख्याओं का भागफल भिन्न संख्या मिली। दो पूर्ण संख्याओं का भागफल सदैव पूर्ण संख्या नहीं भी हो सकता है।

9 $\frac{5}{7}, \frac{9}{2}$ ...... इस तरह की संख्याओं को क्या कहते हैं?

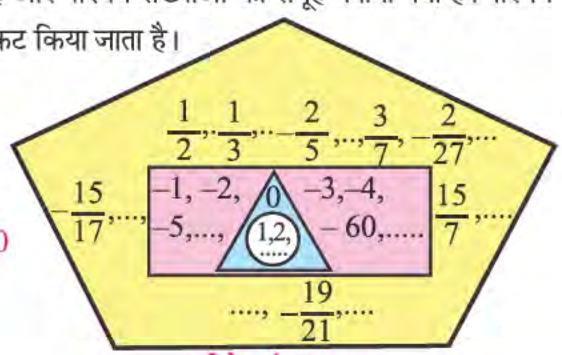
$\frac{5}{7}, \frac{9}{2}$ .... इस तरह की संख्याओं को परिमेय संख्यायें **(Rational Numbers)** कहते हैं।

> जिन सभी संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में प्रकट किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्ण संख्यायें हैं और $q \neq 0$, उन्हें परिमेय संख्या **[Rational Numbers]** कहा जाता है।

किन्तु $q \neq 0$ क्यों? (स्वयं समझकर लिखें)

> पूर्ण संख्याओं के समूह में $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{6}$ .... सभी संख्याओं को शामिल करने पर परिमेय संख्याओं का समूह बनता है।

बगल के पंचभुज क्षेत्र में सभी परिमेय संख्यायें लिखी गई हैं और परिमेय संख्याओं का समूह बनाया गया है। परिमेय संख्याओं के समूह को सामान्यत: अंग्रेजी अक्षर Q द्वारा प्रकट किया जाता है।



परिमेय संख्या–समूह

हम -5 को लिख सकते हैं, $-5 = \frac{-5}{1}$

अर्थात्, -5 को $\frac{p}{q}$ को रूप में लिख सके

जहाँ p, q पूर्ण संख्यायें [$p = -5$ और $q = 1$] और $q \neq 0$

अत: (-5) एक परिमेय संख्या है।

> सभी पूर्ण संख्यायें ही परिमेय संख्यायें हैं

$\frac{2}{3}$ एक परिमेय संख्या है। फिर, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ ....

10 $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$, ... इन्हें $\frac{2}{3}$ का क्या कहा जायेगा ?

$\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$.......... भिन्नों को $\frac{2}{3}$ के **समतुल्य परिमेय संख्या (Equivalent rational numbers) अथवा समतुल्य भिन्न (Equivalent fractions) कहा जाता है।**

> समझ लिया, $\frac{p}{q}$ को परिमेय संख्या कहेंगे यदि p और q पूर्ण संख्यायें हो और $q \neq 0$ हो। आवश्यकता अनुसार $\frac{p}{q}$ को लघुतम और सरलतम रूप में लिखते है। अर्थात् p और q के बीच 1 को छोड़कर कोई अन्य संख्या उभयनिष्ट धनात्मक खण्ड (उत्पादक) न हो। अर्थात् p और q **परस्पर मौलिक संख्या (Co-prime)** हो।

11 निम्न प्रश्नों का कारण सहित उत्तर लिखें।

(i) सभी परिमेय संख्यायें क्या पूर्ण संख्या हैं ? (ii) प्रत्येक पूर्ण संख्या क्या परिमेय संख्या है ?

(iii) प्रत्येक पूर्ण संख्या क्या अखण्ड संख्या है ?

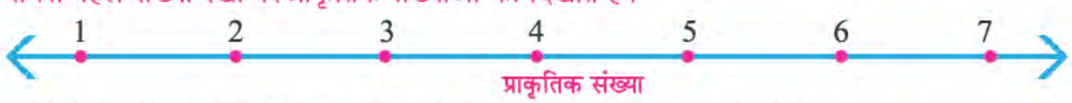
(i) $\frac{1}{2}$ परिमेय संख्या है किन्तु $\frac{1}{2}$ पूर्ण संख्या नहीं है। अत: कहा जा सकता है कि सभी परिमेय संख्यायें पूर्ण संख्या नहीं होतीं।

(ii) माना कि n एक पूर्ण संख्या है और चूँकि n को $\frac{n}{1}$ लिखा जा सकता है अत: n एक परिमेय संख्या।

(iii) [स्वयं लिखें]

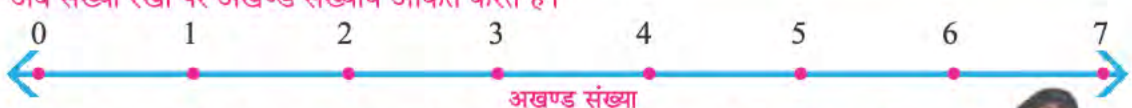
हमारी मित्र रेहाना ने निश्चय किया है कि वो सभी संख्याओं को संख्या रेखा पर अंकित करने की चेष्टा करेगी। इसलिए हम लोगों ने क्लब के मैदान में चूने का प्रयोग करके एक संख्या रेखा खींचा और उस पर संख्याओं को अंकित किया।

सबसे पहले संख्या रेखा पर प्राकृतिक संख्याओं को दिखाते हैं।



देखते हैं कि जितनी दायीं ओर जाते हैं उतनी ही बड़ी संख्या पाते हैं। सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या ☐ है।

अब संख्या रेखा पर अखण्ड संख्यायें अंकित करते हैं।



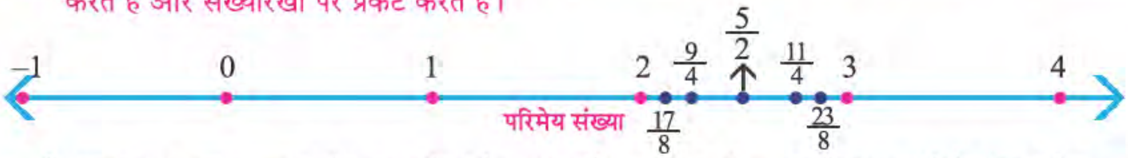
देखते हैं कि जितना ही दाहिनी तरफ बढ़ते हैं उतनी ही बड़ी संख्या पाते हैं। सबसे छोटी अखण्ड संख्या ☐ है।

संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं को दिखाते है। सबसे बड़ी और सबसे छोटी पूर्ण संख्या क्या क्या हैं लिख सकते हैं ?

0 के दाहिनी ओर जितनी दूर जायेंगे उतनी ही बड़ी संख्या पायेंगे और 0 के बांयीं ओर जितनी दूर जायेंगे उतनी ही छोटी संख्या पायेंगे। संख्या रेखा पर जिस किसी पूर्ण संख्या के दाहिनी ओर की पूर्ण संख्यायें उस पूर्ण संख्या से बड़ी हैं किन्तु बायीं ओर की पूर्णसंख्यायें उस पूर्ण संख्या से छोटी हैं। जैसे –3 के दाहिनी ओर की कोई भी पूर्ण संख्या –3 से बड़ी है किन्तु –3 से बायीं ओर की कोई भी पूर्ण संख्या –3 से छोटी है।

∴ सबसे छोटी पूर्ण संख्या और सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं पा सकते।

12 संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं को कैसे अंकित करेंगे ? पहले 2 से 3 के बीच 1 परिमेय संख्या की गणना करते हैं और संख्यारेखा पर प्रकट करते हैं।



2 और 3 का मध्य मान 2 तथा 3 की मध्यवर्ती परिमेय संख्या है। 2 और 3 की मध्यवर्ती संख्या पाने के लिए 2 के साथ 3 का योग करके योगफल में 2 द्वारा भाग करते हैं। अर्थात् $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ एक परिमेय संख्या हुई जो 2 और 3 के बीच स्थित है। $\frac{5}{2}$ को संख्या रेखा पर अंकित किया।

13 संख्या रेखा पर 2 और 3 के बीच और 4 परिमेय संख्यायें लिखते हैं।

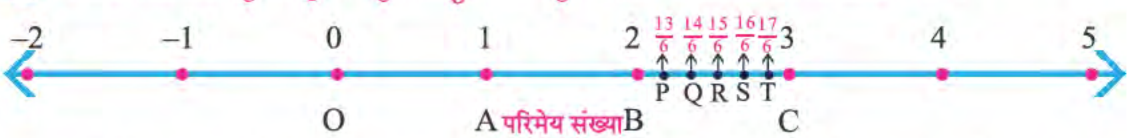
2 और 3 के मध्यवर्ती 1 परिमेय संख्या $\frac{5}{2}$ पायी गयी है।

2 और $\frac{5}{2}$ की मध्यवर्ती परिमेय संख्या $\frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}$	2 और $\frac{9}{4}$ की मध्यवर्ती परिमेय सं. $\frac{2+\frac{9}{4}}{2} = \frac{17}{8}$
$\frac{5}{2}$ और 3 की मध्यवर्ती परिमेय संख्या $\frac{\frac{5}{2}+3}{2} = \frac{11}{4}$	$\frac{11}{4}$ तथा 3 की मध्यवर्ती परिमेय संख्या $= \frac{\frac{11}{4}+3}{2} = \square$

14 दूसरे ढंग (विधि) से गणना करते हैं : संख्या रेखा पर 2 और 3 के बीच ऐसी ही 5 परिमेय संख्यायें लिखी जाँए।

दूसरी तरह पाते हैं, 2 और 3 के समतुल्य परिमेय संख्या लिखें जिनके हर का मान 5 + 1 = 6 है।
$\therefore\ 2 = \frac{2}{1} = \frac{12}{6}$ और $3 = \frac{3}{1} = \frac{18}{6}$ $\therefore$ 2 और 3 मध्यवर्ती 5 परिमेय संख्यायें $\frac{13}{6}, \frac{14}{6}, \frac{15}{6}, \frac{16}{6}, \frac{17}{6}$ हैं।

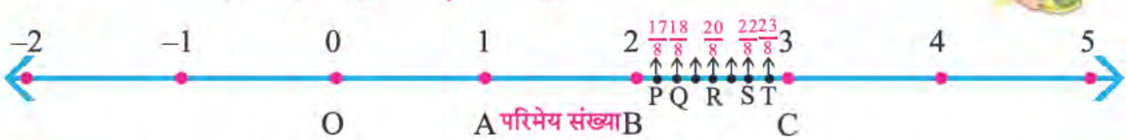
15 संख्या रेखा पर $\frac{13}{6}, \frac{14}{6}, \frac{15}{6}, \frac{16}{6}$ तथा $\frac{17}{6}$ परिमेय संख्याओं को करते प्रकट हैं।



पहले बिन्दु O के दाहिनी ओर OA = 1 इकाई लिया, $\therefore$ OB = 2 इकाई और OC = 3 इकाई।
BC को 6 बराबर भागों में बाँटा, BP $= \frac{1}{6}$ इकाई $\therefore$ OP = OB + BP $= (2 + \frac{1}{6})$ इकाई $= \frac{13}{6}$ इकाइ।

अत: $\frac{13}{6}, \frac{14}{6}, \frac{15}{6}, \frac{16}{6}$ और $\frac{17}{6}$ परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर अंकित करके P, Q, R, S और T बिन्दु पाया।

16 संख्या रेखा पर $\frac{9}{4}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{11}{4}$ एवं $\frac{23}{8}$ परिमेय संख्या को अंकित करते हैं।



(i) पहले $2, \frac{17}{8}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{23}{8}$ और 3 परिमेय संख्याओं के समतुल्य परिमेय संख्या लिखते है जिनका हर 8 है।

$$2 = \frac{16}{8}, \frac{17}{8}, \frac{9}{4} = \frac{18}{8}, \frac{5}{2} = \frac{20}{8}, \frac{11}{4} = \frac{22}{8}, \frac{23}{8}$$

(ii) अब O बिन्दु के दाहिनी ओर OA = 1 इकाई मान लिया। ∴ OB = 2 इकाइ एवं OC = 3 इकाई।

BC को 8 समान भागों में बाँटा। माना कि BP = $\frac{1}{8}$ इकाई ∴ OP = OB + BP = 2 + $\frac{1}{8}$ = $\frac{17}{8}$ इकाई

अत: $\frac{17}{8}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{23}{8}$ परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर अंकित कर P, Q, R, S और T बिन्दु पाया।

क्या-क्या मिला लिखा जाए।

(i) माना कि x तथा y दो परिमेय संख्यायें हैं जहाँ $x < y$

∴ $\frac{x+y}{2}$ एक परिमेय संख्या है जो x और y के बीच (मध्य) स्थित है।

(ii) फिर, x और y दो परिमेय संख्यायें हैं और $x < y$ हो तो

संख्या रेखा पर x और y के मध्य n संख्यक परिमेय संख्यायें नीचे की भाँति ली जा सकती हैं,

$(x + d), (x + 2d), (x + 3d), ..., (x + nd)$ जहाँ $d = \frac{y-x}{n+1}$

संख्या रेखा पर x और y के मध्य n परिमेय संख्यायें हैं $(x + d), (x + 2d), (x + 3d), ...$ $(x + nd)$. चूँकि n को जितनी हो उतनी बड़ी संख्या लेना संभव है, अत: किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्या की संख्या असंख्य होगी।

17 $\frac{1}{7}$ और $\frac{1}{6}$ के मध्य एक परिमेय संख्या लिखी जाएं।

$\frac{1}{7}$ और $\frac{1}{6}$ के मध्य एक परिमेय संख्या $\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{6}}{2} = \frac{13}{84}$

18 $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के मध्य पाँच परिमेय संख्यायें लिखी जाएं?

यहाँ, $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$ और n = 5; अत: $d = \frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}{5+1} = \frac{\frac{1}{5}}{6} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$

अत: पाँच परिमेय संख्यायें $(x + d), (x + 2d), (x + 3d), (x + 4d)$ और $(x + 5d)$ हैं

अर्थात्, $(\frac{3}{5} + \frac{1}{30}), (\frac{3}{5} + \frac{2}{30}), (\frac{3}{5} + \frac{3}{30}), (\frac{3}{5} + \frac{4}{30}), (\frac{3}{5} + \frac{5}{30})$

अर्थात्, $\frac{19}{30}, \frac{20}{30}, \frac{21}{30}, \frac{22}{30}, \frac{23}{30}$

∴ पाँच परिमेय संख्यायें $\frac{19}{30}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{23}{30}$ हैं जो $\frac{3}{5}$ तथा $\frac{4}{5}$ के मध्य स्थित हैं।

19 5 और 6 के बीच 6 परिमेय संख्यायें लिखी जाए।

5 और 6 के मध्य 6 परिमेय संख्यायें लिखनी हैं।

∴ 5 और 6 की समतुल्य परिमेय संख्या लिखी जाय जिनका हर 6 + 1 = 7 है।

∴ $5 = \frac{35}{7}$ और $6 = \frac{42}{7}$

∴ 5 और 6 की मध्यवर्ती 6 परिमेय संख्यायें $\frac{36}{7}, \frac{37}{7}, \frac{38}{7}, \frac{39}{7}, \frac{40}{7}$ और $\frac{41}{7}$ हैं।

20 3 और 4 के मध्य 3 परिमेय संख्यायें लिखी जाएं और इन्हें संख्या रेखा पर अंकित किया जाए। [स्वयं करें]

21 $\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{5}$ के मध्य 3 परिमेय संख्यायें लिखें और इन्हें संख्या पर अंकित करें। [स्वयं करें]

22 $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के मध्य 3 परिमेय संख्यायें लिखें और संख्या रेखा पर अंकित करें [स्वयं करें]

स्वयं करें — 1.1

1. परिमेय संख्या किसे कहते हैं लिखें। 4 परिमेय संख्यायें लिखें।
2. 0 क्या एक परिमेय संख्या है ? 0 को $^p/_q$ [जहाँ p और q पूर्ण संख्या और $q \neq 0$ और p व q के मध्य 1 के अलावा कोई धनात्मक साधारण गुणनखण्ड उभयनिष्ठनहीं] के रूप में प्रकट करें।
3. निम्न परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर अंकित करें।

   (i) 7 (ii) –4 (iii) $\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{9}{2}$ (v) $\frac{2}{9}$ (vi) $\frac{11}{5}$ (vii) $-\frac{13}{4}$
4. निम्न में प्रत्येक के मध्य एक परिमेय संख्या लिखें और संख्या रेखा पर प्रकट करें।

   (i) 4 और 5 (ii) 1 और 2 (iii) $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ (iv) – 1 और $\frac{1}{2}$ (v) $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{3}$ (vii) – 2 और – 1
5. 4 और 5 के मध्य 3 परिमेय संख्या लिखें और संख्या रेखा पर अंकित करें।
6. 1 और 2 के मध्य 6 परिमेय संख्यायें लिखें और इन्हें संख्या रेखा पर अंकित करें।
7. $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{4}$ के मध्य 3 परिमेय संख्यायें लिखें।
8. सत्य कथन के सामने (T) और असत्य कथन के सामने (F) लिखें।

   (i) दो पूर्ण संख्याओं का योग, वियोग और गुणा करके पूर्ण संख्या पाते हैं।

   (ii) दो पूर्ण संख्याओं के बीच भाग की क्रिया करने पर पूर्ण संख्या मिलती है।
9. दो परिमेय संख्याओं का योग, वियोग, गुण और भाग (भाजक शून्य न हो) करने पर कौन संख्या पाई जाती है – लिखा जाए।

हम परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर प्रकट कर पाए हैं अर्थात् जिन सभी संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में प्रकट किया जाता है [जहाँ p और q पूर्ण संख्या और $q \neq 0$] उन्हें संख्या रेखा पर (प्रकट) अंकित किया गया है।

किन्तु शेष संख्याओं अर्थात् जिन सभी संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में प्रकट नहीं किया जाता [जहाँ p और q पूर्ण संख्या हैं और $q \neq 0$] उन्हें क्या कहा जाता है ?

जिन सभी संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में प्रकट नहीं किया जा सकता जहाँ p व q पूर्ण संख्या तथा $q \neq 0$ उन्हें **अपरिमेय संख्या** (Irrational Number) कहा जाता है।

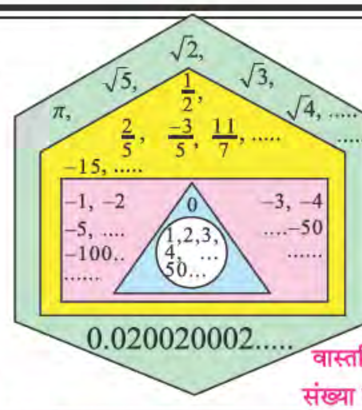
जैसे : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, ..., 0.10110111011110...

ग्रीस के दार्शनिक और गणितज्ञ पाइथागोरस के अनुयायियों ने प्राय: 400 B.C. में पहली बार अपरिमेय संख्या के बारे में बताया था। उन्होंने संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं के अलावा और संख्याओं के अस्तित्व का अनुभव किया था। क्रम से विभिन्न गणितज्ञों ने विभिन्न अपरिमेय संख्याओं की अवधारणायें प्रदान की हैं और अपरिमेय संख्याओं की खोज अभी भी जारी है।

Pythagoras of Samos
(570 BC–495 BC)

सभी परिमेय संख्याओं समूह और सभी अपरिमेय संख्याओं का समूह मिलाकर वास्तविक संख्या के समूह को अंग्रेजी अक्षर 'R' द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

समझ सके कि सभी परिमेय संख्यायें और सभी अपरिमेय संख्यायें मिलकर वास्तविक संख्यायें हैं। अत: वास्तविक संख्या या परिमेय संख्यायें हैं अथवा अपरिमेय संख्या हैं।



वास्तविक संख्या समूह

Cantor (1845-1918) Dedekind (1831-1916)

प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए ही संख्या रेखा पर क्या एक बिन्दु मिलता है?

प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिये संख्या रेखा पर एक बिन्दु पाते हैं और संख्या रेखा के प्रत्येक बिन्दु के लिए एक निश्चित वास्तविक संख्या पाते हैं। इसीलिए संख्या रेखा को वास्तविक संख्यारेखा कहा जाता है।

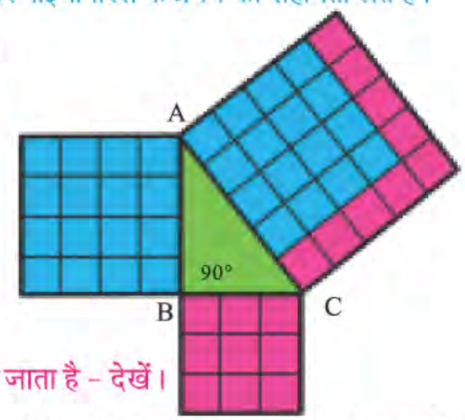
1870 में दो जर्मन गणितज्ञ कैण्टर और डेडिकाईंड (Cantor व Dedekind) ने इस कथन को स्वयं सिद्ध कथन के रूप में ग्रहण किया था।

अब देखते हैं कि अपरिमेय संख्यायें किस प्रकार संख्या रेखा पर प्रदर्शित की जाती हैं। संख्या रेखा पर अपरिमेय संख्या को अंकित करने के लिये ज्यामितिक पद्धति का व्यवहार करते हैं और पाइथागोरस के प्रमेय की सहायता लेते हैं।

पाइथागोरस का प्रमेय (Pythagoras Theorem)

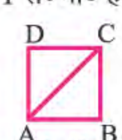
किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

अर्थात् किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल अन्य दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योग के समान होता है। समकोण त्रिभुज ABC के लिये $AC^2 = AB^2 + BC^2$



23 अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर कैसे अंकित किया जाता है - देखें।

ईमोन ने अपनी अभ्यास पुस्तिका में एक वर्गाकार चित्र ABCD आंका है जिसके एक भुजा की लम्बाई 1 से०मी० है।



$\therefore$ AB = BC = 1 से०मी०

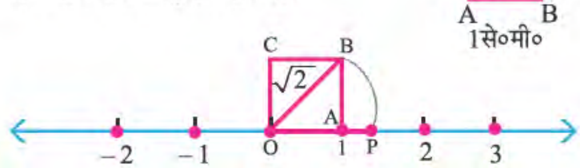
$\therefore$ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ से०मी० $= \sqrt{1^2 + 1^2}$ से०मी० $= \sqrt{2}$ से०मी०

$\therefore$ AC कर्ण की लम्बाई $\sqrt{2}$ से०मी० है।

(i) माना कि O बिन्दु शून्य को प्रकट करता है।

OA = 1 इकाई

OABC एक वर्गाकार चित्र बनाया गया। OB = $\sqrt{2}$ इकाई।



चित्र (i)

(ii) O बिन्दु पर पेंसिल कम्पास का काँटा रखकर OB के समान अर्द्धव्यास लेकर एक चाप लिया जो संख्या रेखा को P बिन्दु पर काटता है। OP = $\sqrt{2}$ इकाई।

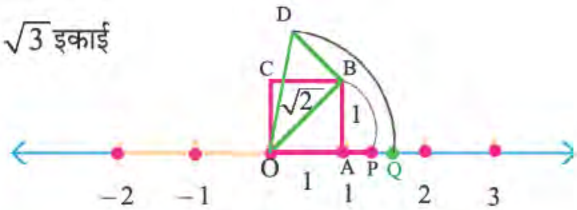
$\therefore$ $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या को संख्या रेखा पर अंकित करके बिन्दु P पाया गया।

24 अपरिमेय संख्या $\sqrt{3}$ को संख्या रेखा पर कैसे प्रदर्शित किया जाता है – देखें।

रेहाना चित्र (i) में OB के ऊपर BD लम्ब अंकित कर BD = 1 इकाई लेती है। O, D को मिलाती है।

पाइथागोरस के प्रमेय का प्रयोग करके मिलता है

$OD = \sqrt{OB^2 + BD^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}$ इकाई $= \sqrt{3}$ इकाई



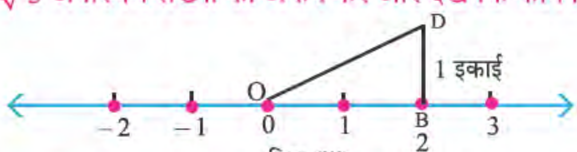
चित्र (ii)

$\therefore$ बिन्दु O को केन्द्र मानकर OD के समान अर्द्धव्यास लेकर एक (वृत्त) चाप लिया जो संख्या रेखा को बिन्दु Q पर काटता है।

$\therefore$ OQ = $\sqrt{3}$ इकाई।

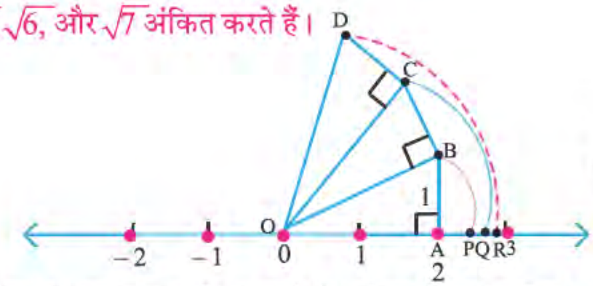
$\therefore$ $\sqrt{3}$ के संख्या रेखा को स्थापित करके Q बिन्दु मिला।

25 हमने संख्या रेखा पर OB = 2 इकाई के ऊपर BD लम्ब खींचकर BD = 1 इकाई लिया। OD के समान लम्बाई की माप लेकर $\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या का अंकन करे और देखें कि कौन बिन्दु मिलता है।



चित्र (iii)

26 हम संख्या रेखा पर $\sqrt{5}, \sqrt{6},$ और $\sqrt{7}$ अंकित करते हैं।



चित्र (iii)

(i) पहले संख्या रेखा पर बिन्दु O पर शून्य अंकित करते हैं। संख्या रेखा पर बिन्दु A इस प्रकार लिया कि OA = 2 इकाई हो।

A बिन्दु पर OA ⊥ AB खींचा एवं AB = 1 इकाई लिया।

पाइथागोरस प्रमेय से पाते हैं, OB = $\sqrt{2^2+1^2}$ इकाई = $\sqrt{5}$ इकाई

बिन्दु O को केन्द्र मानकर OB के समान अर्द्धव्यास लेकर एक चाप अंकित किया जो सरल रेखा को बिन्दु P पर काटता है, $\therefore$ OP = $\sqrt{5}$ इकाई

अपरिमेय संख्या $\sqrt{5}$ को संख्यारेखा पर अंकित करके बिन्दु P पाया।

(ii) अब OB पर BC लम्ब खींचा और BC = 1 इकाई लिया।

पाइथागोरस प्रमेय से पाते हैं,

$OC^2 = OB^2 + BC^2 = \{(\sqrt{5})^2 + (1)^2\}$ वर्गइकाई = (5 + 1) वर्गइकाई = 6 वर्गइकाई

$\therefore$ OC = $\sqrt{6}$ इकाई

बिन्दु O को केन्द्र मानकर OC के समान अर्द्धव्यास लेकर एक चाप अंकित किया जो संख्यारेखा को Q बिन्दु पर काटता है। $\therefore$ OQ = $\sqrt{6}$ इकाई

$\therefore$ संख्या रेखा पर अपरिमेय संख्या रेखा $\sqrt{6}$ को अंकित करके बिन्दु Q मिला।

27 इसी प्रकार अपरिमेय संख्या $\sqrt{7}$ को संख्या रेखा पर अंकित कर बिन्दु R मिला। [स्वयं करें]

इस प्रकार हम पाते हैं कि दी गयी किसी पूर्ण संख्या m के लिये $\sqrt{m-1}$ को संख्या रेखा पर अंकित कर पाने पर $\sqrt{m}$ को भी संख्या रेखा पर अंकित किया जा सकता है।

दो अपरिमेय संख्याओं का योग, वियोग, गुण और भाग ☐ संख्या होती है। (भाजक शून्य न रहने पर)

28 किन्तु दो अपरिमेय संख्याओं का योग, वियोग, गुण और भाग से प्राप्त संख्या क्या अपरिमेय संख्या होगी ? दो अपरिमेय संख्याओं का योग, वियोग, गुण और भाग करके देखते हैं।

$\sqrt{5}$ और $(-\sqrt{5})$ का योग करके पाते हैं, $\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0$; 0 परिमेय संख्या।

$\therefore$ दो अपरिमेय संख्याओं का योगफल सदैव अपरिमेय संख्या नहीं होता।

फिर $\sqrt{7} - \sqrt{7} = 0$

दो अपरिमेय संख्याओं का वियोगफल सदैव अपरिमेय संख्या नहीं होता।

29 $\sqrt{5}$ के साथ $\sqrt{5}$ का गुणा करके क्या मिलता है, देखा जाए ?

$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 = 5$ [$\because$ 5 का वर्गमूल $= \sqrt{5}$]

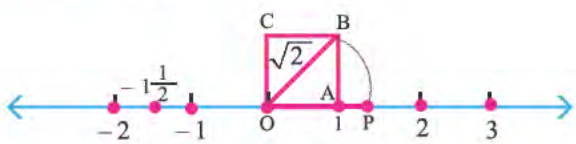
मिलता है, दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल सदैव अपरिमेय संख्या नहीं होता।

दो अपरिमेय संख्याओं का भाग देकर भी देखा कि भागफल उपरिमेय संख्या नहीं मिलता। (स्वयं करें)

पाते हैं, दो अपरिमेय संख्याओं का भागफल सदैव अपरिमेय संख्या नहीं होता।

> **मंतव्य :** $\sqrt{9} = 3$ जब कि $3^2 = 9$ एवং $(-3)^2 = 9$
> और $\sqrt{16} = 4$ जबकि $4^2 = 16$ और $(-4)^2 = 16$, वर्गमूल "$\sqrt{\ }$" चिह्न संख्या के धनात्मक वर्गमूल को प्रकट करने के लिये व्यवहार (प्रयोग) में लगा जाता है।

वास्तविक संख्याओं को संख्या रेखा पर अंकित करने से कोई वास्तविक संख्या दूसरी वास्तविक संख्या से बड़ी है या छोटी है यह समझने में सुविधा हुई है।



चित्र (iv)

हमने समझा कि $\sqrt{2} < 2, -1\frac{1}{2} < -1$ आदि।

वास्तविक संख्यायें '=' और '<' के सापेक्ष कई बहुत आवश्यक नियम मानती हैं। इन नियमों को समझते हैं।

1. यदि a और b कोई दो वास्तविक संख्यायें हो तो $a < b$, $b < a$, $a = b$ में से किसी एक शर्त को अवश्य मानेगीं। जैसे यदि $a = 1$ और $b = 1.4$ हो, तो $a < b$ होगा।

2. i) $a = b, b = c \Rightarrow a = c$

   ii) $a < b, b < c \Rightarrow a < c$ (जैसे $3 < 5$ और $5 < 11 \Rightarrow 3 < 11$)

   a, b तथा c तीनों वास्तविक संख्यायें हैं।

3. (i) $a = b \Rightarrow a + c = b + c$
   (ii) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (जैसे $3 < 5 \Rightarrow 3 + 4 < 5 + 4$)
   a, b, c तीनों वास्तविक संख्यायें।
4. (i) $a = b \Rightarrow a \times c = b \times c$
   (ii) $a < b$ और $c > 0 \Rightarrow a \times c < b \times c$

   (जैसे $3 < 5 \Rightarrow 3 \times 4 < 5 \times 4$ किन्तु $3 < 5 \Rightarrow 3\times(-4) > 5\times(-4)$)

   a, b, c तीनों वास्तविक संख्यायें।

उपरोक्त सभी नियम वास्तविक संख्याओं के लिये स्वत:सिद्ध हैं।
स्वत:सिद्धों की सहायता से वास्तविक संख्याओं के प्रमेय प्रमाणित किये जा सकते हैं। जैसे —
(i) $-(a+b) = -a - b$. (ii) $a.o = o$ इत्यादि। वास्तविक संख्याओं के प्रश्न हल करते समय इन नियमों का पालन किया जाता है।

स्वयं करें — 1.2

1. **निम्न कथनों में से सत्य और असत्य कथनों को पहचानें :**
   (i) दो परिमेय संख्याओं का योगफल सदैव परिमेय संख्या होता है।
   (ii) दो अपरिमेय संख्याओं का योगफल सदैव अपरिमेय संख्या होता है।
   (iii) दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल सदैव परिमेय संख्या होता है।
   (iv) दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल सदैव परिमेय संख्या होता है।
   (v) प्रत्येक परिमेय संख्या ही वास्तविक संख्या है।
   (vi) प्रत्येक वास्तविक संख्या ही अपरिमेय संख्या है।
2. **अपरिमेय संख्या से क्या समझते हैं ? 4 अपरिमेय संख्यायें लिखें।**
3. **निम्न संख्याओं में से परिमेय संख्यायें चुनें :**
   (i) $\sqrt{9}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) $\sqrt{7}$ (iv) $\sqrt{50}$ (v) $\sqrt{100}$
   (vi) $-\sqrt{81}$ (vii) $\sqrt{42}$ (viii) $\sqrt{29}$ (ix) $-\sqrt{1000}$
4. **संख्यारेखा पर $\sqrt{5}$ को अंकित करें।**
5. **संख्यारेखा पर $\sqrt{3}$ को अंकित करें।**
6. **एक ही संख्या रेखा पर $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, -\sqrt{6}, -\sqrt{8}, -\sqrt{11}$ को अंकित करें।**

परिमेय संख्याओं के योग, वियोग, गुणा और भाग हमने पहले ही सीख लिया है, अब हम कुछ अपरिमेय संख्याओं के योग, वियोग, गुणा और भाग करना सीखेगें। जैसे– $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}\times\sqrt{7}=\sqrt{35}$, $2\sqrt{7}\div\sqrt{7}$ = 2 आदि। बीज गणित में हमने सीखा था $a + a = 2a$, $3b - b = 2b$, $a\times b=ab$ आदि।इनकी सहायता से वास्तविक संख्याओं की विभिन्न क्रियाओं को समझने का प्रयास करते है। कुछ अपरिमेय संख्याओं और परिमेय संख्याओं को एक कागज पर लिखकर दीवार पर टाँग देते हैं। इसके बाद इनमें से दो-दो संख्याओं को लेकर योग, वियोग, गुणा और भाग करते हैं।

किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं के योग, वियोग, गुणा और भाग से एक वास्तविक संख्या पाई जाती है (यदि भाग की क्रिया में भाजक शून्य न हो)।

30 आईये देखते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं को योग, वियोग, गुणा और भाग (भाजक शून्य हो) करके क्या मिलता है।

कोई दो वास्तविक संख्यायें $\sqrt{2}$ और $2\sqrt{2}$ लिया। $\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-\sqrt{2}$,
$\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=2\times(\sqrt{2})^2=2\times 2=4 \quad \therefore \sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$, $\sqrt{2}\div 2\sqrt{2}=$
अर्थात वास्तविक संख्यायें पाया।

31 अन्य किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं को लेकर उनके योग, वियोग, गुणा और भाग (यदि भाजक शून्य न हो) करके हमेशा वास्तविक संख्या पाते हैं। [स्वयं करें]

32 हम किन्हीं तीन वास्तविक संख्याओं a, b तथा c को लेकर वास्तविक संख्याओं के मुख्य नियमों की जाँच करके देखें कि क्या मिलता है?

(i) $(a+b)+c=a+(b+c)$ [योग के साहचर्य का नियम] (ii) $a+b=b+a$ [योग के क्रम विनिमेय का नियम]
(iii) $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ [गुणा के साहचर्य का नियम] (iv) $a\times b=b\times a$ [गुणाके क्रम विनिमेय का नियम]
(v) $a(b+c)=ab+ac$ और $(a+b)c=ac+bc$ [गुणा का वितरण नियम]
(vi) $a+0=a$ और $0+a=a$ [0 को योग का तादात्म्य अवयव (addtive identity element) कहते है]
(vii) $a\times 1=a$ और $1\times a=a$ [1 को गुणा का तादात्म्य अवयव (multiplicative identity element कहते है]
(viii) $a+(-a)=0$ और $(-a)+a=0$ [$-a$ को a के योग का प्रतीप अवयव (inverse element) कहते हैं।]
(ix) $a\times\frac{1}{a}=1$ और $\frac{1}{a}\times a=1$ (यदि $a\neq 0$ हो) [$\frac{1}{a}$ को a के गुणा का प्रतीप अवयव (inverse element) कहते हैं।]

इन नियमों को वास्तविक संख्याओं का स्वयं सिद्ध गुण कहजाता है

इन नियमों की जाँच स्वयं करते है हम करते समय नियमों के व्यवहार पर ध्यान दे :

33 सरल करें **(i)** $-7\sqrt{2}+7(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ **(ii)** $-22\sqrt{3}+11(1+2\sqrt{3})$

(i) $-7\sqrt{2}+7(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$= -7\sqrt{2}+(7\sqrt{3}+7\sqrt{2})$ [$\because a(b+c)=ab+ac$]

$= -7\sqrt{2}+(7\sqrt{2}+7\sqrt{3})$ [$\because a+b=b+a$]

$= (-7\sqrt{2}+7\sqrt{2})+7\sqrt{3}$ [$\because a+(b+c)=(a+b)+c$]

$= 0+7\sqrt{3}$ [$\because -a+a=0$]

$= 7\sqrt{3}$ [$\because 0+a=a$]

(ii) [स्वयं करें] (प्रत्येक पग पर वास्तविक संख्याओं के नियमों के प्रयोग का उल्लेख करें)।

जब हम पाँच साथी मिलकर वास्तविक संख्या का समूह बनाकर इसके गुणों की जाँच कर रहे थे उसी समय हमारे अन्य तीन साथी अन्य एक सफेद बोर्ड पर वास्तविक संख्याओं को दूसरी तरह व्यक्त कर रहे थे।

बोर्ड पर $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ और $3\frac{1}{5}$ को वे दशमिक संख्या के रूप में प्रकट करने की चेष्टा कर रहे हैं।

हम भी $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ और $3\frac{1}{5}$ को दशमिक संख्या के रूप में व्यक्त करते हैं।

$\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{3}{8} = 0.375$ और $3\frac{1}{5} = 3.2$

हमने बोर्ड पर कुछ और भिन्न संख्यायें लिखा जिनके हरों के मूल उत्पादक 2 और 5 हैं।

लिखा $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{4}, \frac{8}{25}, \frac{13}{20}$

34 हम $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{4}, \frac{8}{25}, \frac{13}{20}$ को दाशमिक संख्या के रूप में बदलें। [स्वंय करें]

> $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{4}, \frac{8}{25}$ और $\frac{13}{20}$ को दाशमिक संख्या के रूप में बदलें समय देखा जाता है कि भागफल एक दाशमिक संख्या है और भागशेष शून्य मिलता है जब हर के मूल उत्पादक केवल 2 और 5 हैं।

35 हमने एक अन्य कोई परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में लिया जिसके हर q के मूल उत्पादक के रूप में केवल 2 और 5 है और $\frac{p}{q}$ को दाशमिक संख्या के रूप में व्यक्त करके देखते हैं कि भागफल एक दाशमिक संख्या है और भागशेष शून्य है। [स्वयं जाँच करें]

इस प्रकार की दाशमिक संख्या को कैसी संख्या कहा जाए ?

ऐसी संख्या को ससीम दाशमिक संख्या कहा जाता है।

$\frac{p}{q}$ रूप की परिमेय संख्या को दाशमिक संख्या के रूप में व्यक्त करने पर ससीम दाशमिक संख्या पायी जाती है जब कि q के मौलिक उत्पादक केवल 2 और 5 हों।

यदि $\frac{p}{q}$ आकार की परिमेय संख्या को दाशमिक संख्या के रूप में व्यक्त करें जबकि q के मौलिक उत्पादकों में केवल 2 और 5 न हों, तब क्या मिलेगा, देखें।

36 अब $\frac{5}{3}, \frac{17}{6}, \frac{16}{7}$ वास्तविक संख्याओं को दाशमिक संख्या के रूप में व्यक्त करते हैं और देखते हैं कि क्या मिलता है।

$\frac{5}{3} \rightarrow$ 3) 5 (1.66....
```
     1.66....
3 )  5
    -3
     20
    -18
      20
     -18
        2
```

$\frac{17}{6} \rightarrow$ 6) 17 (2.833....
```
     2.833....
6 )  17
    -12
      50
     -48
       20
      -18
        20
       -18
         2
```

$\frac{16}{7} \rightarrow$

```
        2.2857142....
    7 | 16
      |-14
        20
       -14
        60
       -56
        40
       -35
        50
       -49
        10
       - 7
        30
       -28
        20
       -14
         6....
```

∴ देखते/पातें हैं

$\frac{5}{3} = 1.66.... = 1.\dot{6}$ [भागशेष 2, 2, 2....., भाजक 3]

$\frac{17}{6} = 2.833..... = 2.8\dot{3}$ [भागशेष 5, 2, 2,....., भाजक 6]

$\frac{16}{7} = 2.2857142857142.....$

$= 2.\dot{2}8571\dot{4}$

देखतें हैं कि प्रत्येक भाग की क्रिया शेष नहीं होती अर्थात भागशेष 0 नहीं मिलता है अर्थात दाशमिक संख्या के रूप में व्यक्त करने पर प्रत्येक संख्या के लिये आवर्त दाशमिक संख्या मिलती है।

हम किसी $\frac{p}{q}$ के रूप में परिमेय संख्या को दाशमिक संख्या के रूप में प्रकट करतें हैं जहाँ q के मौलिक उत्पादक 2 और 5 नहीं हैं तो एक आवर्त्त दाशमिक संख्या के रूप में पातें हैं। [स्वयं करें]

प्रत्येक परिमेय संख्या को दाशमिक संख्या के रूप में बदलने पर ससीम दाशमिक संख्या अथवा आवर्त दाशमिक संख्या पातें हैं।

37 निम्न परिमेय संख्याओं (बिना भाग दिये) को दाशमिक संख्या के रूप में बदलने पर ससीम दाशमिक संख्या पातें हैं या नहीं, देखें :

(i) $\frac{7}{16}$ (ii) $\frac{9}{125}$ (iii) $\frac{15}{56}$ (iv) $\frac{19}{80}$ (v) $\frac{3}{24}$

(i) $\frac{7}{16}$ का हर 16

एवं $16 = 2^4$

∴ 16 का 2 के अलावा कोई और मौलिक उत्पादक नहीं है।

∴ $\frac{7}{16}$ को दाशमिक संख्या के रूप में प्रकट करने पर ससीम दाशमिक संख्या पायेंगे।

(ii) इसी प्रकार $\frac{9}{125}$ को दाशमिक संख्या के रूप में व्यक्त करने पर ससीम दाशमिक संख्या मिलेगी। [स्वयं करें]

(iii) $\frac{15}{56}$ का हर 56 है और $56 = 7 \times 2^3$

∴ 56 के मौलिक उत्पादक 2 के अलावा और एक मौलिक उत्पादक 7 है।

∴ $\frac{15}{56}$ को दाशमिक संख्या के रूप में प्रकट करने पर ससीम दाशमिक संख्या नहीं पायेंगे। आवर्त्तदाशमिक संख्या पायेंगे।

इसी प्रकार (iv) और (v) [स्वयं करें]

38 हम निम्न परिमेय संख्याओं को दाशमिक संख्या के रूप में व्यक्त करके देखतें हैं कि कौन ससीम दाशमिक संख्या और कौन आवर्त्त दाशमिक संख्या है।

(i) $\frac{3}{11}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{7}{24}$ (iv) $\frac{17}{125}$

(i) $\frac{3}{11} \rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} & .2727.... \\ 11 & 30 \\ & -22 \\ & \quad 80 \\ & \quad -77 \\ & \quad\quad 30 \\ & \quad\quad -22 \\ & \quad\quad\quad 80 \\ & \quad\quad\quad -77 \\ & \quad\quad\quad\quad 3 \end{array}$$

$\therefore \frac{3}{11} = 0.\dot{2}\dot{7}$

$\therefore \frac{3}{11}$ को दाशमिक संख्या में बदलने पर एक आवर्त्त दशमलव संख्या मिलती है।

(ii) $\frac{5}{8} \rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} & .625 \\ 8 & 50 \\ & -48 \\ & \quad 20 \\ & \quad -16 \\ & \quad\quad 40 \\ & \quad\quad -40 \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$\therefore \frac{5}{8} = 0.625$

$\therefore \frac{5}{8}$ का दाशमिक रूप एक ससीम दाशमिक संख्या है

इसी प्रकार (iii) और (iv) स्वयं करें।

ईमान और तियासा बोर्ड पर अनेक ससीम दाशमिक संख्या और आवर्त दाशमिक संख्या लिख रहे हैं। उन्होंने लिखा है 5.875, $2.\dot{6}$, $0.\dot{4}\dot{5}$ और $1.\dot{2}8571\dot{4}$

39 क्या प्रत्येक ससीम दाशमिक संख्या और प्रत्येक आवर्त दाशमिक संख्या क्या परिमेय संख्या है? उपरोक्त संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त/प्रकट करने का प्रयास करते हैं [जहाँ p, q पूर्णांक है और $q \neq 0$]

$5.875 = \frac{5875}{1000} = \frac{47}{8}$

$2.\dot{6} = 2 + .\dot{6} = 2 + \frac{6}{9} = 2\ \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ [दूसरे प्रकार से $2.\dot{6} = \frac{26-2}{9} = \frac{8}{3}$]

$0.\dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

$1.\dot{2}8571\dot{4} = \frac{1285714-1}{999999} = \frac{1285713}{999999} = \frac{9 \times \cancel{142857}}{7 \times \cancel{142857}} = \frac{9}{7}$

देखते हैं बोर्ड पर लिखी हुई प्रत्येक ससीम और आवर्त्त दाशमिक संख्या परिमेय संख्या है

40 $\frac{47}{8}, \frac{8}{3}, \frac{5}{11}$ और $\frac{9}{7}$ परिमेय संख्याओं को दाशमिक संख्या के रूप में बदलें। [स्वयं करें]

41 0.5 और $0.4\dot{9}$ के बीच क्या संबंध है गणना करके देखे। [स्वयं करें]

हम किसी भी ससीम दाशमिक संख्या और आवर्त दाशमिक संख्या को लेकर पाते हैं कि ये परिमेय संख्या है

पाते हैं परिमेय संख्या को दाशमिक संख्या के रूप में प्रकट करने पर ससीम दाशमिक संख्या या आवर्त दाशमिक संख्या पाते हैं और किसी भिन्न संख्या को दाशमिक संख्या के रूप में प्रकट करने पर ससीम दाशमिक संख्या अथवा आवर्त दाशमिक संख्या है तो संख्या है तो संख्या परिमेय संख्या होगी।

42 परिमेय संख्या को दाशमिक में बदलने पर क्या मिलता है- देखा किन्तु अपरिमेय संख्या को दशमलव के रूप में बदलने पर क्या होता है- देखा जाय।

परिमेय संख्या को दाशमिक संख्या के रूप में प्रकट करने पर असीम अनावर्त्त दाशमिक संख्या (non-terminating and non-recurring) पायेगें और जिस संख्या का दाशमिक रूप असीम अनावर्त्त दाशमिक संख्या है वह संख्या अपरिमेय संख्या है

जैसे, 0.10110111011110... एक परिमेय संख्या है क्योंकि यह असीम और अनावर्त्त है

हम अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$ और $\sqrt{11}$ का दाशमिक रूप लिखते हैं। (भाग पद्धति द्वारा)

```
          |  2      | 1.414213
          | -1      |
24        |  100
          | - 96
281       |  400
          | - 281
2824      |   11900
          | - 11296
28282     |    60400
          |    56564
282841    |    383600
          |  - 282841
2828423   |   10075900
          |  - 8485269
               1590631
                .....
```

$\sqrt{2}$, $\sqrt{11}$ जैसी अपरिमेय संख्यायें क्रम से $x^2-2=0$, $x^2-11=0$ इस प्रकार के समीकरणों का एक हल (Root) हैं। इस तरह के पूर्ण संख्या युक्त बहुपदों (व्यंजन वाले) समीकरण के हल को बीजगणितीय अपरिमेय संख्या कहते हैं। इस प्रकार की कुछ अपरिमेय संख्याओं को दाशमिक संख्या के रूप में भाग द्वारा प्रकट किया। π ,e आदि अपरिमेय संख्यायें ऊपर की भाँति पूर्ण संख्या युक्त बहुपदी समीकरणों के हल नहीं हैं। इस प्रकार की संख्या को (Transandental) अबीजगणितीय संख्या कहते हैं। इन्हे दशमलव के रूप में प्रकट करना कठिन है। बाद में इन्हें दाशमिक संख्या के रूप में बदलने का नियम सीखेगें। किन्तु सभी अपरिमेय संख्याओं का दाशमिक रूप असीम और अनावर्त्त होता है।

43 अब $\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{3}$ के बीच संख्या रेखा पर एक अपरिमेय संख्या लिखते हैं।

$\frac{1}{3} = 0.333 \ldots = 0.\dot{3}$ और $\frac{2}{3} = 0.666 \ldots = 0.\dot{6}$

$\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{3}$ की मध्यवर्ती अपरिमेय संख्या एक ऐसी संख्या होगी जो असीम और अनावर्त्त (non-terminating and non-recurring) होगी।

$\therefore$ $\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{3}$ के बीच एक अपरिमेय संख्या 0.4504500450004 ... है।

44 हम 0.23233 2333 233332... और 0.25255 2555 255552.... दो संख्याओं के बीच की दो परिमेय संख्यायें लिखते हैं।

माना कि a = 0.23 233 23332 33332... और b = 0.25 2552555 255552...

a और b दो असीम और अनावर्त्त दाशमिक संख्यायें हैं।

दशमलव के बाद a और b पहले दाशमिक स्थान पर 2 है किन्तु दूसरे दाशमिक स्थान पर a में 3 और b में 5 हैं।

अत: $a < b$

माना कि c = 0.25 एवं d = 0.2525

यहाँ c और d परिमेय संख्यायें हैं। अत: यहाँ a और b के बीच स्थित दो परिमेय संख्यायें 0.25 और 0.2525 हैं।

सभी वास्तविक संख्याओं को दाशमिक संख्या के रूप में प्रकट करना संभव है।

किन्तु वास्तविक संख्याओं का दाशमिक रूप क्या संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं को प्रकट करने में सहायक है ? दशमलव में बदलकर वास्तविक संख्या को संख्या रेखा पर अंकित कर देखा जाय।

तीर्थ ने बोर्ड पर लिखा है, 3.256, 4.339, 2.401 और 5.078

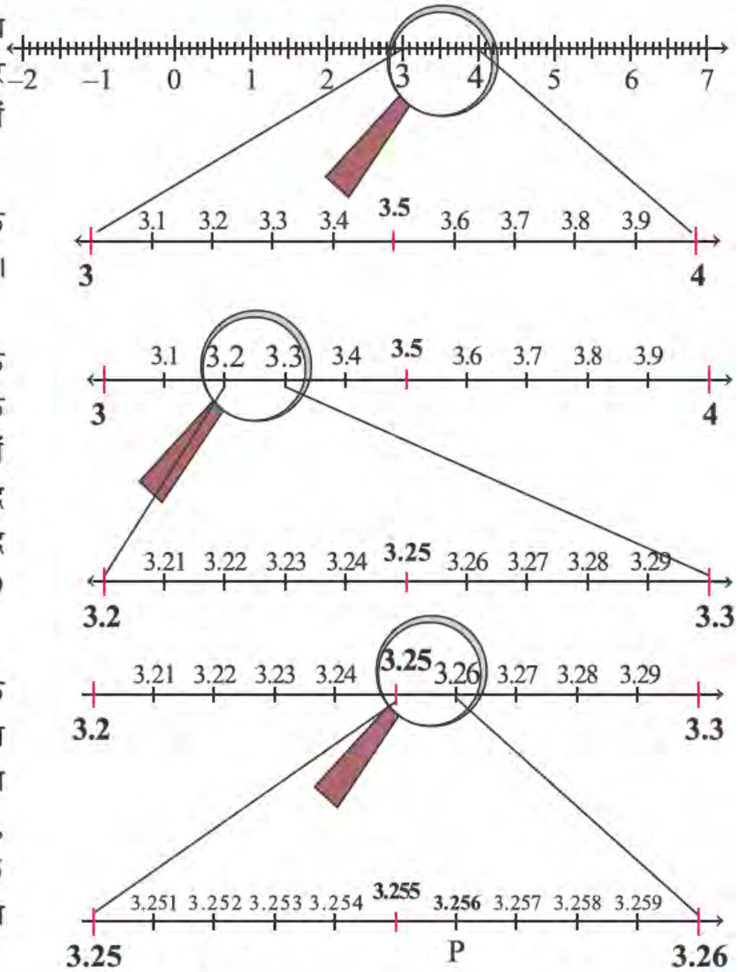
45 हम 3.256 (वास्तविक संख्या) को संख्या रेखा पर अंकित करते है।

(i) वास्तविक संख्या 3.256 संख्या रेखा पर 3 और 4 के बीच है, अत: 3 और 4 के मध्यवर्ती दूरी को 10 समान भागों में बाँटकर निशान लगाते हैं।

3 के बाद पहला भाग 3.1, उसके बाद क्रम से 3.2, 3.3 ... 3.9 तक लिखा।

(ii) 3.256 चूँकि 3.2 और 3.3 के बीच स्थित है, इसलिये 3.2 और 3.3 के बीच की दूरी को 10 बराबर भागों में बाँटा और निशान लगाया। 3.2 के बाद पहला दाग 3.21 का है और इसके बाद क्रम से 3.22, 3.23, 3.24 .... 3.29 तक लिखा।

(iii) 3.256 चूँकि 3.25 और 3.26 के बीच है, अत: 3.25 और 3.26 के बीच की दूरी को 10 बराबर भागों में बाँटा और 3.25 के बाद क्रम से 3.251, 3.252, 3.253, 3.254 और 3.255 ...... लिखा और 3.256 पर निशान लगाकर P बिन्दु पाया।



∴ संख्या रेखा पर 3.256 वास्तविक संख्या को अंकित करके P बिन्दु पाया।

इस पद्धति से संख्या रेखा पर किसी भी वास्तविक संख्या को अंकित करने को क्या कहते हैं?

इसी प्रकार आवर्द्धन शीशे (Magnifying glass) की सहायता से क्रमश: दो संख्याओं के मध्य की दूरी को समान भागों में बाँट कर किसी भी वास्तविक संख्या को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करने की विधि को क्रमवार विवर्द्धन पद्धति (Process of successive magnification) कहा जाता है।

46 इसी पद्धति से 4.339, 2.401 और 5.078 संख्याओं को संख्या रेखा पर अंकित करें और कौन बिन्दु पाते हैं — देखें। [स्वयं करें]

तितली ने बोर्ड पर अनेक आवर्त्त दाशमिक संख्यायें लिखा हैं। उसने लिखा है $2.6\dot{7}$, $5.3\dot{7}$, 4. किन्तु आवर्त दाशमिक संख्याओं को कैसे संख्या रेखा पर अंकित करेगें ?

ऊपर की तरह आवर्द्धन शीशे की सहायता से सही-सही अन्तर चुनकर इसे समान-समान 10 भागों में बाँट कर आवर्त दाशमिक संख्यायें संख्या रेखा पर अंकित की जाती हैं।

हम $2.6\dot{7}$ आवर्त दाशमिक संख्या को संख्या रेखा पर अंकित करते हैं।

पहले $2.6\dot{7}$ को दशमलव के 3 स्थान तक लिखकर पाते हैं $2.6\dot{7} = 2.677....$

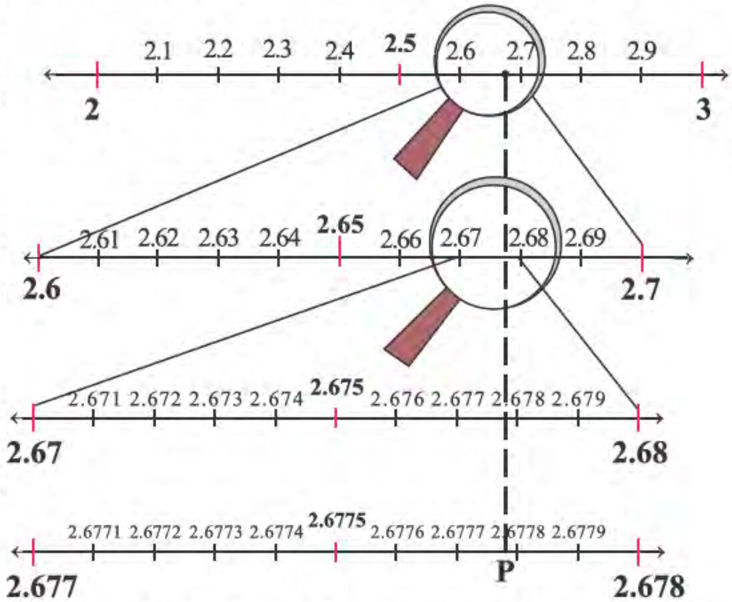
(i) 2.67̇ संख्या रेखा पर 2 और 3 के बीच स्थित है। अत: पूर्व की भाँति 2 और 3 के बीच की दूरी को 10 बराबर भागों में बाँटते हैं।

(ii) अब चूँकि 2.677, 2.6 और 2.7 के बीच अत: 2.6 से 2.7 के बीच की दूरी को 10 बराबर भागों में बाँटते हैं।

(iii) फिर 2.677 चूँकि 2.67 और 2.68 के बीच स्थित है, अत: 2.67 और 2.68 के बीच की दूरी को 10 बराबर भागों में बाँटते हैं।

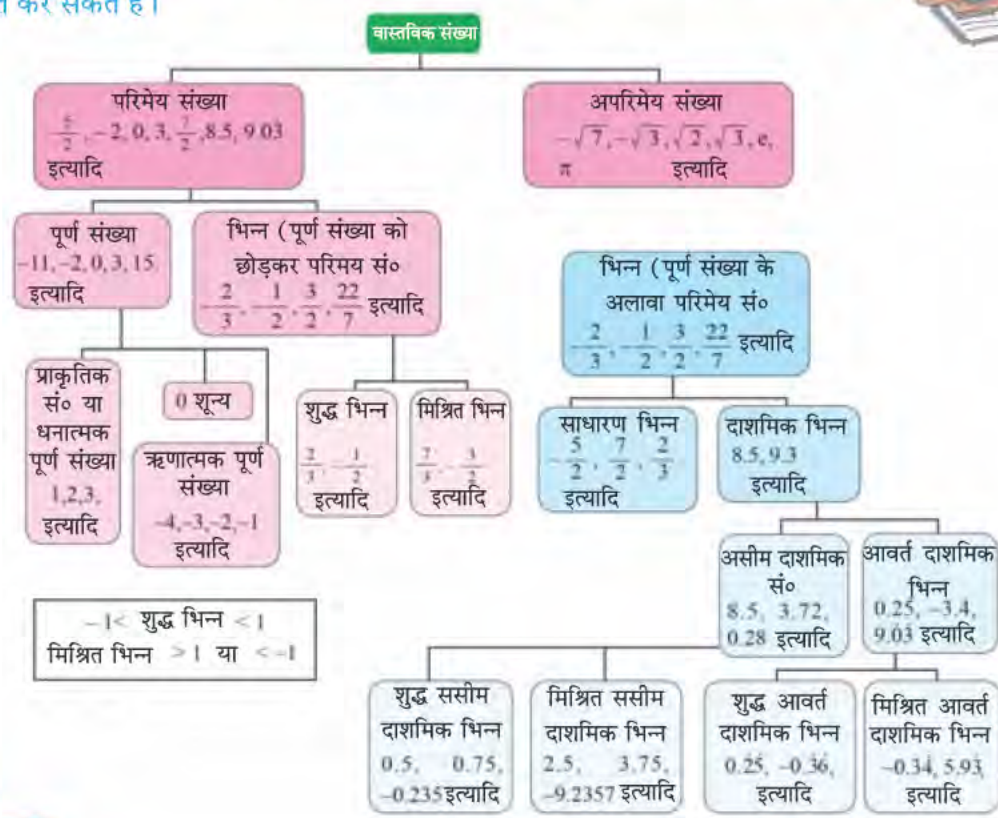
2.67̇, 2.677 और 2.678 के बीच स्थित है।

(iv) और भी यथार्थ मान पाने के लिए 2.677 और 2.678 के बीच की दूरी को 10 समान भागों में बाँट लेते हैं।



ऊपर के चित्र को देखते हैं 2.67̇ संख्या को अंकित करके जो बिन्दु पाया है वह 2.677 की अपेक्षा 2.678 के अधिक निकट स्थित है और 2.677 और 2.67 के बीच असंख्या अपरिमेय संख्या भी हैं।

आवृत्त दाशमिक को बराबर भाग में परिणत करके उस बराबर भाग को हमलोग संख्या रेखा में स्थापित कर सकते हैं।



हल करें—1.

1. भाग की क्रिया की सहायता के बिना बतायें कि निम्न संख्याओं में से कौन–कौन संख्या दाशमिक रूप में बदलने पर ससीम भिन्न होगी ?

(i) $\frac{17}{80}$ (ii) $\frac{13}{24}$ (iii) $\frac{17}{12}$ (iv) $\frac{16}{125}$ (v) $\frac{4}{35}$

2. निम्न संख्याओं को दाशमिक संख्या के रूप में बदलें और बतायें कि किस प्रकार की दाशमिक संख्या हैं।

(i) $\frac{1}{11}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{3}{13}$ (iv) $3\frac{1}{8}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{7}{25}$

3. निम्न को $\frac{p}{q}$ के रूप में प्रकट करें जहाँ **p** और **q** पूर्ण संख्यायें है और $q \neq 0$.

(i) $0.\dot{3}$ (ii) $1.\dot{3}$ (iii) $0.5\dot{4}$ (iv) $0.\dot{3}\dot{4}$ (v) $3.\dot{1}\dot{4}$

(vi) $0.1\dot{7}$ (vii) $0.4\dot{7}$ (viii) $0.\dot{5}\dot{4}$ (ix) $0.\dot{0}0\dot{1}$ (x) $0.\dot{1}6\dot{3}$

4. चार संख्यायें लिखे जिनका दशमलव रूप असीम और अनावर्त हो।

5. $\frac{5}{7}$ तथा $\frac{9}{7}$ के बीच की **3** भिन्न अपरिमेय संख्यायें लिखें।

6. $\frac{3}{7}$ और $\frac{1}{11}$ के बीच की **3** भिन्न अपरिमेय संख्यायें लिखें।

7. निम्न में से परिमेय और अपरिमेय संख्यायें बतायें।

(i) $\sqrt{47}$ (ii) $\sqrt{625}$ (iii) 6.5757... (iv) 1.1010010001...

8. निम्न संख्याओं को संख्या रेखा पर अंकित करें।

(i) 5.762 (ii) 2.321 (iii) 1.052 (iv) 4.178

9. **$2.\dot{2}\dot{6}$** और **$5.5\dot{4}$** संख्याओं को दशमलव के **4** स्थान तक संख्या रेखा पर अंकित करें।

10. **0.232332333233332...** और **0.212112111211112...** के बीच स्थित दो परिमेय संख्यायें लिखें।

11. **0.2101** और **0.2222...** अथवा **$0.\dot{2}$** के बीच स्थित दो परिमेय संख्यायें लिखें।

12. प्राकृतिक संख्या, अखण्ड संख्या, पूर्णसंख्या, परिमेय संख्या, अपरिमेय संख्या और वास्तविक संख्याओं से सम्बन्धित दस सत्य और दस असत्य कथन लिखें।

13. गुणा करने पर 2 रु० और योग करने पर 1 रु० खर्च हो तो निम्न संख्याओं के मान ज्ञात करने में कितना खर्च होगा ज्ञात करें और किस नियम का पालन कर खर्च कम किया जा सकता है ? :

(i) $3x^2 + 2x + 1$, जबकि $x = 5$ **(ii)** $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$, जब $x = 7$

(संकेत: $3\times5^2+2\times5+1 = 3 \times 5 \times 5 + 2 \times 5 + 1$, यहाँ 3 गुणा की क्रिया और दो योग की क्रिया के लिए खर्च कुल 3 रु० हैं।

किन्तु यदि गुणा के वितरण नियम का पालन कर, $3x^2 + 2x + 1 = x(3x+2) + 1$ लिखे तब 2 गुणा और 2 योग करना पड़ता है और खर्च 6 रु० होते हैं।)

14. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.) :

(i) $\sqrt{5}$ का दाशमिक रूप

(a) एक ससीम दाशमिक (b) एक ससीम या आवर्त दाशमिक
(c) एक असीम और अनावर्त दाशमिक (d) कोई नहीं।

(ii) दो अपरिमेय संख्याओं का गुणफल

(a) हमेशा अपरिमेय संख्या (b) हमेशा ही परिमेय संख्या
(c) हमेशी ही पूर्ण संख्या (d) परिमेय या अपरिमेय संख्या।

(iii) π एवं $\frac{22}{7}$

(a) सदैव ही परिमेय संख्या (b) सदैव ही अपरिमेय संख्या
(c) π परिमेय संख्या और $\frac{22}{7}$ अपरिमेय संख्या (d) π अपरिमेय संख्या और $\frac{22}{7}$ परिमेय संख्या।

(iv) दो परिमेय संख्याओं के बीच

(a) कोई परिमेय संख्या नहीं (b) केवल एक परिमेय संख्या
(c) असंख्य अपरिमेय संख्यायें (d) कोई अपरिमेय संख्या नहीं है।

(v) दो अपरिमेय संख्याओं के बीच

(a) कोई परिमेय संख्या नहीं (b) केवल एक अपरिमेय संख्या
(c) असंख्य अपरिमेय संख्यायें (d) कोई अपरिमेय संख्या नहीं है।

(vi) 0 संख्या

(a) अखण्ड संख्या है किन्तु पूर्ण संख्या नहीं है। (b) पूर्ण संख्या किन्तु परिमेय संख्या नहीं हैं
(c) परिमेय संख्या किन्तु वास्तविक संख्या नहीं है। (d) अखण्ड संख्या, पूर्ण संख्या, परिमेय संख्या और वास्तविक संख्या हैं किन्तु अपरिमेय संख्या नहीं।

15. संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न :

(i) एक ऐसी संख्या लिखें जिसमें दो अपरिमेय संख्याओं का योग एक परिमेय संख्या हो।

(ii) दो अपरिमेय संख्याओं का वियोग एक परिमेय संख्या हो – ऐसी संख्या लिखें।

(iii) $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक परिमेय संख्या लिखें।

(iv) $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या लिखें।

(v) $.012\dot{3}$ (आवर्त संख्या) को साधारण भिन्न के रूप में लिखें।

2 घातांक के नियम
(LAWS OF INDICES)

अभी हमलोगों के स्कूलों की छुट्टियाँ हैं। प्राय: आठ दिनों तक स्कूलें बंद रहेंगी। हम पाँच मित्रों ने मिलकर यह ठीक किया है कि इन दिनों हम सभी लोग पंतग उड़ायेंगें। इसलिए मेरे पिताजी ने हम सभी को कुछ पंतग, धागे और लटाइयां खरीदकर दे दिए।

पतंग उड़ाने के लिए और ज्यादा धागे की आवश्यकता है। इसलिए हममें से प्रत्येक ने 2 रुपये देकर कुल 2 रु० + 2 रु० + 2 रु० + 2 रु० + 2 रु० = 5 × 2 रु० चंदा इकट्ठा किया

1 यदि हम x मित्र होते और प्रत्येक मित्र 2रू० चंदा देता तो कुल कितने रूपये होते, आईये गणना करते हैं।

कुल चन्दा होता = 2 रु० + 2 रु० + ... +2 रु० (x बार) = $x \times 2$ रु० = 2x रु०

बीजगणितीय व्यंजक 2x में 2 को x का क्या कहा जाता है?

2, x का गुणांक **[Coefficient]** है।

2 हमें 5 × 2 रु० से अधिक रूपये की आवश्यकता है। अत: 5 मित्रों में से प्रत्येक ने 5 रू० चंदा दिया।

∴ अब कुल चंदा मिला = 5 रु० + 5 रु० + 5 रु० + 5 रु० + 5 रु० = 5 × 5 रु० = 5^2 रु०

3 यदि x मित्रों में से प्रत्येक मित्र ने x रु० चंदा दिया होता तब कितना चंदा होता?

कुल चंदा होता = x रु० + x रु० + x रु० + x रु० + ... + x रु० (x बार) = $x \times x$ रु० = x^2 रु०

x^2 -को क्या कहते हैं? x^2– यहां 2 और x को क्या कहते है?

x^2 को x का द्विघात (वर्ग) कहते है। x^2 में 2 **घातांक [Index]** और x **आधार [Base]**।

4 यदि x में x का गुण 6 बार किया जाए, $x \times x \times x \times x \times x \times x = x^6$

यहाँ x^6 में 6 ☐ और x ☐ [स्वयं करें]

∴ हम लिख सकते हैं

यदि x कोई वास्तविक संख्या और n कोई धनात्मक पूर्ण संख्या हो तो x . x . x...... x (n बार) = x^n, यहाँ n और x-को x^nका **घातांक [Index]** और **आधार [Base]** कहते हैं। x^nको x का n घात कहा जाता है।

परिभाषा के अनुसार x^n = x . x . . . . . x (n खण्ड)

$x^1 = x$ (जहाँ x एक वास्तविक संख्या तथा n एक पूर्ण घनात्मक संख्या है।)

5 अब x^5 और x^3 को गुण करके देखते हैं।

$x^5 \times x^3 = (x. x. x. x. x) \times (x. x. x) = x. x. x. x. x. x. x. x = x^8 = x^{5+3}$

इसी प्रकार $x^3 \times x^5 = x^8 = x^{3+5}$

6 अब x^m और x^n का गुणा करें [जहाँ x कोई वास्तविक संख्या है और m, n धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं]

$x^m \times x^n$ = {x . x . x.... x (m खण्ड तक)} × { x . x . x.... x (n खण्ड तक)}

= x . x . x.... x (m+n खण्ड तक) = x^{m+n}

पाते हैं x कोई वास्तविक संख्या और m तथा n धनात्मक पूर्ण संख्या हो तो $x^m \times x^n = x^{m+n}$ होताहैं।

$x^m \times x^n = x^{m+n}$ - को क्या कहा जाता है ?

$x^m \times x^n = x^{m+n}$ (जहाँ x एक वास्तविक सं और m तथा n धनात्मक पूर्ण संख्या है) को **घातांक का मौलिक नियम [Fundamental Law of Indices]** कहा जाता है।

7 अब x^5 में x^3 से और x^3 में x^5 भाग देते है [जहाँ x शून्य के अलावा वास्तविक संख्या है]

$$x^5 \div x^3 = \frac{x^5}{x^3} = \frac{x.x.\cancel{x}.\cancel{x}.\cancel{x}}{\cancel{x}.\cancel{x}.\cancel{x}} = x^2 = x^{5-3} \quad \text{फिर} \quad x^3 \div x^5 = \quad \frac{x^3}{x^5} \quad \frac{\cancel{x}.\cancel{x}.\cancel{x}}{\cancel{x}.\cancel{x}.\cancel{x}.x.x} \quad \frac{1}{x^2} \quad \frac{1}{x^{5-3}}$$

8 x^m में x^n से भाग देकर देखते है [x शून्य को छोड़कर कोई वास्तविक संख्या है तथा m, n धनात्मक पूर्ण संख्या है]

$$x^m \div x^n = \frac{x^m}{x^n} = \frac{x.x.x........x \text{ (m खण्ड तक)}}{x.x.x........x \text{ (n खण्ड तक)}} = x.x.x......x\{(m-n) \text{ खण्य तक, जब } m > n\} = x^{m-n}$$

[अंश और हर से n संख्या से x को अलग करने पर मिला]

इसी प्रकार, $x^m \div x^n = \frac{1}{x^{n-m}}$, जब $n > m$

पाते हैं, x शून्य को छोड़कर कोई वास्तविक संख्या और m व n दो धनात्मक पूर्ण संख्याये हों तो

$$\frac{x^m}{x^n} = \begin{cases} x^{m-n} & \text{जब } m > n \\ \frac{1}{x^{n-m}} & \text{जब } n > m \end{cases}$$

9 इस समय पतंग की बहुत भाग है क्योंकि मुहल्ले के अधिकांश लड़के-लड़कियाँ दोपहर बाद पतंग उड़ाते है। इसीलिए मुहल्ले की मिठू दीदी भी पतंग बेचती हैं। सजल ने कहा कि मिठू दीदी के पास $(2^2)^4$ पतंग हैं। किन्तु $(2^2)^4$ कितनी पतंगे है-आइये गणना करते हैं।

$(2^2)^4 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2+2} = 2^8 = 2^{2\times4} = 256$

10 x कोई वास्तविक संख्या और m व n दो धनात्मक पूर्ण संख्यायें हो तो $(x^m)^n$ का मान क्या होगा ? देखे।

$(x^m)^n = x^m. x^m...... x^m$ (n संख्यक)

$= x^{m+m+.......+m \text{ (n बार)}}$

$= x^{mn}$ [$\because$ m और n दो धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं। $\therefore$ mn भी धनात्मक पूर्ण संख्या है।]

पाते हैं। x एक वास्तविक संख्या और m तथा n दो धनात्मक पूर्ण संख्याये हो तो $(x^m)^n = x^{mn}$

11 मिठू दीदी की दुकान में 2^8 पतंगे हैं। किन्तु दीपू चाचा के कारखाने में बहुत सी पतंगे हैं। यदि दीपू चाचा के कारखाने में 6^8 पतंगे हो तो दीपू चाचा को कारखाने में मिठू दीदी की दुकान की पतगों से कितनी गुनी पतंगे हैं ? आइये देखें।

$6^8 = (3\times2)^8 = (3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)$

$= (3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3) \times (2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)$

$= 3^8 \times 2^8$

$\therefore$ दीपू चाचा के कारखाने में मिठू दीदी की दुकान की पतंगो से 3^8 गुना पतंगे हैं।

12 x और y दो वास्तविक संख्याये हैं और m धनात्मक पूर्ण संख्या हो तो $(xy)^m$ क्या होगी ?

$(xy)^m = (xy)\cdot(xy)\cdot(xy).....(xy)$ (m संख्यक)

$= \{x\cdot x\cdot x....x$ (m संख्यक)$\} \times \{y\cdot y\cdot y....y$ (m संख्यक)$\}$

$= x^m y^m$

13 इसी प्रकार $\left(\frac{x}{y}\right)^m$ का मान क्या होता है, देखें जहाँ x कोई वास्तविक संख्या, y शून्य के अलावा कोई वास्तविक संख्या और m एक धनात्मक पूर्ण संख्या है। ($\because$ 0 से भाग देना अज्ञात)

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \; \ldots\ldots \; \frac{x}{y} (\text{m संख्यक}) = \frac{x \cdot x \cdot x \; \ldots . x \,(\text{m संख्यक})}{y \cdot y \cdot y \; \ldots . y \,(\text{m संख्यक})} = \frac{x^m}{y^m}$$

$\therefore$ पाते है, x और y वास्तविक संख्यायें हो और m कोई धनात्मक पूर्ण संख्या हो, तो

$(xy)^m = x^m y^m$ ओर $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$ (जहाँ $y \neq 0$)

अब घातांक के पाये गये नियमों को लिखते हैं।

x और y कोई दो वास्तविक संख्यायें हों और m व n दो धनात्मक पूर्ण संख्यायें हो तो

(i) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ (ii) $x^m \div x^n = \begin{cases} x^{m-n} \text{ जब } m > n, \\ \frac{1}{x^{n-m}} \text{ जब } n > m, x \neq 0 \end{cases}$

(iii) $(x^m)^n = x^{mn}$ (iv) $(xy)^m = x^m \cdot y^m$ (v) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$, $y \neq 0$

14 अब इन नियमों की सहायता से निम्न राशियों का मान निर्णय करते हैं।

(i) $\frac{2^7 . 3^9}{6^6 . 3^2}$ **(ii)** $\frac{40^{12}}{5^9 \, 2^{30}}$ **(iii)** $\frac{63^5}{7^4 \, 3^8}$ **(iv)** $\frac{33^4 \times 6^3 \times 2^1}{12^5 \times 11^2}$

(v) $(0.125)^9 \times 8^9$ **(vi)** $2^3 \times (0.7)^3 \times 5^3$ **(vii)** $(-2)^3 \times (-2)^5$ **(viii)** $(-2)^4 \times (-3)^4$

(i) $\frac{2^7 . 3^9}{6^6 . 3^2} = \frac{2^7 . 3^9}{(3\times2)^6 . 3^2} = \frac{2^7 . 3^9}{3^6 . 2^6 . 3^2} = \frac{2^{7-6} . 3^9}{3^8} = 2 \cdot 3^{9-8} = 6$

(ii) $\frac{40^{12}}{5^9 \, 2^{30}} = \frac{(8 \times 5)^{12}}{5^9 \, 2^{30}} = \frac{8^{12} . 5^{12}}{5^9 . 2^{30}} = \frac{\{(2)^3\}^{12} . 5^{12}}{5^9 . 2^{30}} = \frac{2^{36} . 5^{12-9}}{2^{30}} = 2^{36-30} . 5^3 = 2^6 \cdot 5^3 = 8000$

(v) $(0.125)^9 \times 8^9 = (0.125 \times 8)^9 = (1.000)^9 = (1)^9 = 1$

इसी प्रकार (iii), (iv) ,(vi), (vii) और (viii) का सरलतम मान स्वयं निकालें।

15 हमारे पास 2^5 पतंगे हैं। हम 2^3 लोगों में पतंगो को समान-समान संख्या में बाँटना चाहते हैं। आइये देखे प्रत्येक को कितनी पतंगे मिलती हैं?

प्रत्येक को मिली पतंगों की संख्या $= (2^5 \div 2^3) = 2^{5-3} = 2^2$

16 किन्तु हम यदि 2^5 पतंगो को 2^5 लोगों में समान रूप से बाँट दें तो प्रत्येक को कितनी पतंगे मिलेगी-देखें।

इस दशा में प्रत्येक को मिली पतंग की संख्या $= (2^5 \div 2^5) = \frac{2^5}{2^5} = 1$

किन्तु 2^0 का मान कितना है?

यदि $2^0 = 1$ माने तब $a^m \div a^n = a^{m-n}$ नियम m = n के लिये सत्य होता है।

अर्थात हम लिख सकते हैं $2^5 \div 2^5 = 2^{5-5} = 2^0$

परिभाषा के अनुसार यदि x कोई (शून्य के अलावा) वास्तविक संख्या हो और n एक धनात्मक पूर्ण संख्या हो, तो

(vi) $x^0 = 1$ (vii) $x^{-1} = \frac{1}{x}$ (viii) $x^{-n} = (x^{-1})^n$

इस परिभाषा के बाद x^n का अर्थ समस्त पाया जहाँ x शून्य को छोड़ कोई वास्तविक संख्या और n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है।

∴ पाते है, x शून्य के अलावा कोई वास्तविक संख्या हो, तो

(ix) $x^{-n} = (x^{-1})^n = \frac{1}{x^n}$ होगा जहाँ n कोई धनात्मक पूर्ण संख्या है।

17 $x^{-3} \times x^5$ का मान क्या होगा ? (जहा $x \neq 0$, x कोई वास्तविक संख्या है)

$$x^{-3} \times x^5 = (x^{-1})^3 \times x^5 = \frac{1}{x^3} \times x^5 = x^{5-3} = x^2$$

18 $x^{-3} \times x^{-6}$ का मान क्या होगा ? (जहाँ x कोई वास्तविक संख्या है और $x \neq 0$)

$$x^{-3} \times x^{-6} = (x^{-1})^3 \times (x^{-1})^6 = \frac{1}{x^3} \times \frac{1}{x^6} = \frac{1}{x^{3+6}} = \frac{1}{x^9} = x^{-9} = x^{(-3)+(-6)}$$

घातांक के नियम सत्य होंगे जब x शून्य को छोड़कर कोई वास्तविक संख्या हो और m एवं n दो धनात्मक पूर्ण संख्यायें हो।

19 आइये देखें 2^{2^3} और $(2^2)^3$ में कौन संख्या बड़ी है ?

$2^{2^3} = 2^8$ और $(2^2)^3 = 2^6$ ∵ $2^8 > 2^6$ ∴ $2^{2^3} > (2^2)^3$

20 2^{300} और 3^{200} में कौन बड़ी है ? (स्वयं करे)

21 m और n पूर्ण संख्याये हो तो निम्न के मान निर्णय करें।

(i) $\frac{2^{m+2}.3^{2m-n}}{6^m.3^{m-n-1}}$ (ii) $\frac{2^{m+1}.3^{2m-n}.5^{m+n}.6^n}{15^m.10^{n+2}.6^m}$

(i) $\frac{2^{m+2}.3^{2m-n}}{6^m.3^{m-n-1}} = \frac{2^{m+2}.3^{2m-n}}{(3\times2)^m.3^{m-n-1}} = \frac{2^{m+2}.3^{2m-n}}{3^m.2^m.3^{m-n-1}} = \frac{2^{m+2-m}.3^{2m-n}}{3^{m+m-n-1}} = \frac{4.3^{2m-n}}{3^{2m-n-1}} = 4.3^{2m-n-2m+n+1}$

$= 4.3 = 12$

समाधान (ii) का सरलतम मान ☐। [स्वयं लिखें]

22 हमने आठ दिनों की छुट्टी में बहुत मजे किये और बहुत सी पतंगे उड़ायी। तृषा और शकील के पास अब भी बहुत सी पतंगे हैं। तृषा के पास जितनी पतंगे है उसका वर्ग करने पर 36 होगा। किन्तु शकील के पास कितनी पतंगे है उस (संख्या) का घन करने पर 27 होगा। आइये गणना करके देखते हैं किसके पास कितनी पतंगे है ?

माना कि तृषा के पास x पतंगे है।

∴ $x^2 = 36$

या $x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$ ∴ $x = 6$ [क्योंकि पतंगों की संख्या ऋणात्मक नहीं होती]

पाते हैं, $x = 36^{1/2} = 6$, x को 36 का वर्गमूल कहते हैं।

माना कि शकील के पास y पतंगे है।

∴ $y^3 = 27$

∴ $y = 27^{1/3}$, y को 27 का घनमूल कहते हैं।

∵ $3^3 = 27$

∴ $27^{1/3} = 3$

अत: तृषा के पास 6 पतंगे और शकील के पास 3 पतंगे हैं।

∵ $x = 6$ हो $x^2 = 36$
$x = -6$ हो तो $x^2 = 36$
∴ $x^2 = 36$ हो तो
$x = \pm\sqrt{36}$

अत: यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या हो तो a का वर्गमूल = $a^{1/2}$ और a का घनमूल = $a^{1/3}$

किन्तु $a^{1/n}$ को क्या कहेगे जहाँ n कोई धनात्मक पूर्ण संख्या है ?

$a^{1/n}$ को a-का n वाँ मूल कहते है।

अर्थात किसी धनात्मक पूर्ण संख्या n एवं किसी धनात्मक वास्तविक संख्या a के लिये $a^{1/n}$ एक अनन्य (Unique) धनात्मक पूर्ण संख्या x होगी यदि $x^n=a$ हो। x को a का n वाँ मूल कहा जाता है। उसी x को ही $\sqrt[n]{a}$ या $a^{1/n}$ लिखते है। 0 का n वाँ मुल 0 है।

$\because 3^3=27$	फिर $2^6=64$
$\therefore 27^{1/3} = 3 \quad \therefore$ 3,27 का एक घनमूल है।	$\therefore (64)^{1/6}=\square \quad \therefore$ 2,64 का एक 6 ठवाँ मूल है

यदि a ऋणात्मक वास्तविक संख्या हो और n एक धनात्मक विषम संख्या हो तो $a^{1/n}$ एक अनून्य ऋणात्मक वास्तविक संख्या होगी यदि $x^n=a$ हो। जैसे $(-8)^{1/3} = -2, (-27)^{1/3} = -3$ क्योंकि $(-2)^3 = -8$ और $(-3)^3 = -27$ है।

23 किन्तु $(27)^{4/3}$ का मान कैसे पायेंगे ? देखें।

$$(27)^{4/3} = (27^{1/3})^4 = (3)^4 = 81$$

एवं $(64)^{5/6} = (64^{1/6})^5 = \square^5 = \square$ [स्वयंकरे]

समझा है, a का मान कोई धनात्मक वास्तविक संख्या, q का मान कोई धनात्मक पूर्ण संख्या और p कोई पूर्ण संख्या हो तो $a^{p/q}=(a^{1/q})^p$ होगा जहाँ $a^{1/q}$ a का q वाँ मूल है और $(a^{1/q})^p$ $a^{1/q}$ के पूर्ण संख्या के घातांक के अनुसार मान है।

जैसे, **(i)** $8^{5/3} = (8^{1/3})^5 = 2^5 = 32$ **(ii)** $(27)^{-4/3} = (27^{1/3})^{-4} = (3)^{-4} = \frac{1}{3^4} \quad \frac{1}{81}$

अत: धनात्मक वास्तविक संख्या के परिमेय घात की परिभाषा मिलती है। ऋणात्मक वास्तविक संख्या a के परिमेय घात $\frac{p}{q}$ की परिभाषा मिली जहाँ q विषम संख्या है। जैसे $(-32)^{4/5} = \{(-32)^{1/5}\}^4 = (-2)^4 = 16$

फिर $a^{-2/5} \times a^{3/2} = a^{-4/10} \times a^{15/10} = (a^{1/10})^{-4} \times (a^{1/10})^{15} = (a^{1/10})^{-4+15} = (a^{1/10})^{11} = a^{11/10} = a^{-2/5+3/2}$

वास्तविक संख्याओ के परिमेय घात के लिये भी घातांक के नियम लागू होते है जहाँ वे स्पष्ट परिभाषित है।

24 $\frac{2}{8^{-2/3}} \times \frac{\sqrt[6]{2}}{4^{-5/12}}$ का सरलतम मान ज्ञात करते हैं।

$$\frac{2}{8^{-2/3}} \times \frac{\sqrt[6]{2}}{4^{-5/12}} = \frac{2}{(2^3)^{-2/3}} \times \frac{2^{1/6}}{(2^2)^{-5/12}} = \frac{2}{2^{3\times(-2/3)}} \times \frac{2^{1/6}}{2^{2\times(-5/12)}} = \frac{2}{2^{-2}} \times \frac{2^{1/6}}{2^{-5/6}} = 2 \times 2^2 \times 2^{1/6+5/6}$$

$$= 2^{1+2+6/6} = 2^{1+2+1} = 16$$

25 $\{(32)^{-2/3})^{3/4}\}^{4/5}$ का सरलतम मान ज्ञात करें [स्वयं करे]

26 $[\{(81^{-\frac{3}{4}})^{\frac{1}{9}}\}^3]^{-1}$

27 $[(\frac{x^b}{x^c})^{b+c} \times (\frac{x^c}{x^a})^{c+a} \times (\frac{x^a}{x^b})^{a+b}]$ का सरलतम मान ज्ञात करते हैं।

समाधान (हल); $(\frac{x^b}{x^c}) \times (\frac{x^c}{x^a})^{c+a} \times (\frac{x^a}{x^b})^{a+b}$

$= (x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})^{c+a} \times (x^{a-b})^{a+b} = x^{b^2-c^2} \times x^{c^2-a^2} \times x^{a^2-b^2} = x^{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2}$

$= x^0 = 1$ ज्ञात मान = 1

28 तीर्थ ने अपनी अभ्यास पुस्तिका में $2^x = 128$ लिख रखा है। तीर्थ के समीकरण $2^x = 128$ से x का मान कैसे पाते है देखे।

$2^x = 128$

या $2^x = 2^7$.......................... (i)

सं० (i) समीकरण से x का मान कैसे मिलेगा ?

(x) a एक वास्तविक संख्या है और $a \neq 0, 1, -1$ और x, y परिमेय संख्या यदि $a^x = a^y$ हो, तब $x = y$ होगा।
(xi) a, b धनात्मक वास्तविक संख्याये एवं x शून्य को छोड़कर कोई वास्तविक संख्या हो तो यदि $a^x = b^x$ हो तब $a = b$
फिर $a^x = b^x \Rightarrow x = 0$

$\therefore \quad 2^x = 2^7$ हो तो पाते है $x = 7$ [(x) न० से]

29 $a + b + c = 0$ हो तो दिखाये कि $\dfrac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \dfrac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \dfrac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1$

प्रमाण : $\dfrac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \dfrac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \dfrac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$= \dfrac{x^{-b}}{x^{-b}(x^b + x^{-c} + 1)} + \dfrac{x^a}{x^a(x^c + x^{-a} + 1} + \dfrac{1}{(x^a + x^{-b} + 1)}$

$= \dfrac{x^{-b}}{x^{-b+b} + x^{-b-c} + x^{-b}} + \dfrac{x^a}{x^{a+c} + x^{a-a} + x^a} + \dfrac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$\because$ $a + b + c = 0$
$\therefore$ $a = -b - c$ एवं
$a + c = -b$

$= \dfrac{x^{-b}}{x^0 + x^a + x^{-b}} + \dfrac{x^a}{x^{-b} + x^0 + x^a} + \dfrac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$= \dfrac{x^{-b}}{1 + x^a + x^{-b}} + \dfrac{x^a}{x^{-b} + 1 + x^a} + \dfrac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$= \dfrac{x^{-b} + x^a + 1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1$ (प्रमाणित)

30 $2^x = 3^y = 12^z$ हो तो प्रमाणित करे कि $xy = z(x + 2y)$

मान लिया, $2^x = 3^y = 12^z = k$ (जहाँ $k \neq 0, 1, -1$)

$\therefore 2^x = k \Rightarrow 2 = k^{\frac{1}{x}}$ .... (i)

फिर $3^y = k \Rightarrow 3 = k^{\frac{1}{y}}$ .... (ii)

तथा $12^z = k \Rightarrow 12 = k^{\frac{1}{z}}$ ...... (ii)

अब $12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$

अत: $k^{1/z} = (k^{1/x})^2 \times k^{1/y}$

या $k^{1/z} = k^{2/x} \times k^{1/y}$

या $k^{1/z} = k^{2/x + 1/y}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y}$ [$\because a^x = a^y \Rightarrow x = y$ जहाँ $a \neq 0, 1, -1$]

या $\dfrac{1}{z} = \dfrac{2y + x}{xy}$ $\quad \therefore \quad xy = z(x + 2y)$ (प्रमाणित)

घातांक के नियम परिमेय घातों के लिये भी लागू होता है। किन्तु अपरिमेय घातांको के लिये भी क्या ये नियम लागू होते हैं ?

$2^{\sqrt{2}}, 3^{\sqrt{7}}$ इत्यादि किस तरह की संख्याये हैं। अर्थात अपरिमेय घातों वाली संख्यायें कैसी संख्याये है इसके बारे में हम बाद की ऊँची कक्षाओं में जानेंगे। किन्तु हम यदि मान लेगे कि संख्याओ पर भी घातांक के नियम लागू किये जा सकते हैं यदि ये अच्छी तरह से परिभाषित हो।

31 $p^a = q^b = r^c$ एवं $pqr = 1$ हो तो प्रणित करे कि $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ [स्वयं करें]

हल करें- 2

1. मान निर्णय करे :

(i) $\left(\sqrt[5]{8}\right)^{\frac{5}{2}} \times \left(16^{\frac{-3}{2}}\right)$ (ii) $\left\{(125)^{-2} \times (16)^{\frac{-3}{2}}\right\}^{\frac{-1}{6}}$

(iii) $4^{\frac{1}{3}} \times \left[2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}\right] \div 9^{\frac{1}{4}}$

2. सरल करें :

(i) $(8a^3 \div 27x^{-3})^{\frac{2}{3}} \times (64a^3 \div 27x^{-3})^{\frac{-2}{3}}$ (ii) $\{(x^{-5})^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{-3}{10}}$

(iii) $[\{(2^{-1})^{-1}\}^{-1}]^{-1}$ (iv) $\sqrt[3]{a^{-2}}.\, b \times \sqrt[3]{b^{-2}}.\, c \times \sqrt[3]{c^{-2}}.\, a$

(v) $\left(\dfrac{4^{m+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2.2^m}}{2.\sqrt{2^{-m}}}\right)^{\frac{1}{m}}$ (vi) $9^{-3} \times \dfrac{16^{\frac{1}{4}}}{6^{-2}} \times \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$

(vii) $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

3. मान के उर्ध्व क्रम में सजाएं :

(i) $5^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{1}{4}}, 6^{\frac{1}{3}}$ (ii) $3^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}, 8^{\frac{1}{4}}$ (iii) $2^{60}, 3^{48}, 4^{36}, 5^{24}$

4. प्रमाण करें :

(i) $\left(\dfrac{a^q}{a^r}\right)^p \times \left(\dfrac{a^r}{a^p}\right)^q \times \left(\dfrac{a^p}{a^q}\right)^r = 1$ (ii) $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}\left(\dfrac{x^n}{x^\ell}\right)^{n+\ell}\left(\dfrac{x^\ell}{x^m}\right)^{\ell+m}$

(iii) $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-\ell} \times \left(\dfrac{x^n}{x^\ell}\right)^{n+\ell-m} \times \left(\dfrac{x^\ell}{x^m}\right)^{\ell+m-n} = 1$

(iv) $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}} \times \left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}} \times \left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}} = 1$

5. $x + z = 2y$ एवं $b^2 = ac$ हो तो दिखायें कि $a^{y-z}\, b^{z-x}\, c^{x-y} = 1$

6. $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ एवं $c = xy^{r-1}$ हो तो दिखाये कि $a^{q-r}\, b^{r-p}\, c^{p-q} = 1$

7. $x^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{b}} = z^{\frac{1}{c}}$ एवं $xyz = 1$ हो तो दिखाये कि $a + b + c = 0$

8. $a^x = b^y = c^z$ एवं $abc = 1$ हो तो दिखाये कि $xy + yz + zx = 0$

9. हल करें :

(i) $49^x = 7^3$ (ii) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 9$ (iii) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 48$

(iv) $2^{4x} . 4^{3x-1} = \frac{4^{2x}}{2^{3x}}$ (v) $9 \times 81^x = 27^{2-x}$

(vi) $2^{5x+4} + 2^9 = 2^{10}$ (vii) $6^{2x+4} = 3^{3x}.2^{x+8}$

10. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.):

(i) $(0.243)^{0.2} \times (10)^{0.6}$ का मान है

(a) 0.3 (b) 3 (c) 0.9 (d) 9

(ii) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times (16)^{\frac{1}{2}}$ का मान है

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) $\frac{1}{2}$

(iii) $4^x = 8^3$ हो तो x का मान है

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{9}{2}$ (c) 3 (d) 9

(iv) $20^{-x} = \frac{1}{7}$ हो तो $(20)^{2x}$ का मान है

(a) $\frac{1}{49}$ (b) 7 (c) 49 (d) 1

(v) $4 \times 5^x = 500$ हो तो x^x का मान है

(a) 8 (b) 1 (c) 64 (d) 27

11. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :

(i) $(27)^x = (81)^y$ हो तो x:y का मान लिखें।

(ii) $(5^5 + 0.01)^2 - (5^5 - 0.01)^2 = 5^x$ हो तो x का मान बतायें।

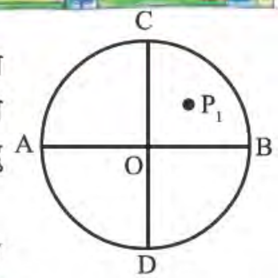
(iii) $3 \times 27^x = 9^{x+4}$ हो तो x का मान बतायें।

(iv) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}}$ का मान लिखें।

(v) 3^{3^3} और $(3^3)^3$ से कौन सही है ? युक्ति दें।

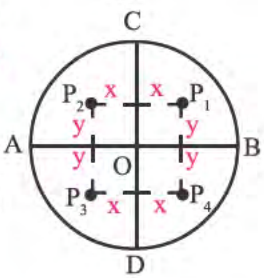
3 लेखाचित्र (GRAPH)

हमलोगों की कक्षा की साथी अमीना, ध्रुव, रूपा और हबीब विद्यालय के वृत्ताकार मैदान में क्रिकेट के खेल देख रहे थे। उन्होंने देखा कि उनका साथी दीप्तार्क मैदान में एक जगह खड़ा है। उनलोगों ने आपस में विचार करना शुरु किया कि मैदान में दीप्तार्क की स्थिति कैसे स्पष्ट की जाए।



कागज पर एक वृत्तांकन करके दीप्तार्क का सठीक स्थिती स्पष्ट करने की उन्होंने चेष्टा की। यदि दीप्तार्क P_1 पर खड़ा हो तो उसकी स्थिति जानने के लिये उन्होंने पहले परस्पर लम्ब हों ऐसे दो व्यास AB और CD खींचा और दोनों व्यासों के कटान बिन्दु अर्थात् के केन्द्र का नाम O दिया।

यदि P_1 की CD से दूरी x इकाई और AB से y इकाई हो, तो यही x इकाई और y इकाई दूरियो की सहायता से हम P_1 की स्थिती (या अवस्थान) निर्णय कर सकते हैं।



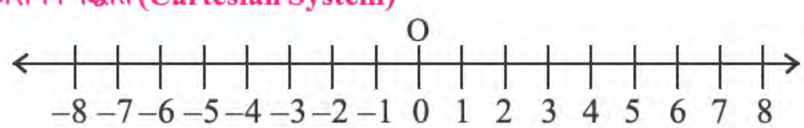
किन्तु CD से x इकाई और AB से y इकाई की दूरियों पर P_1 बिन्दु की ओर तीन स्थितियाँ, P_2, P_3, और P_4 पायी जाती हैं।

किन्तु यदि ऐसा कहा जाए कि, P_1 बिन्दु AB सरस रेखा खण्ड के ऊपर और CD सरल रेखा खण्ड के दाहिनी ओर CD से x इकाई और AB से y इकाई दूर है तब P_1 बिन्दु की एक ही निश्चित स्थिति पाई जाती है।

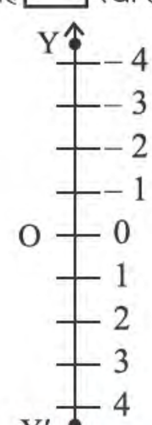
अत: दीप्तार्क मैदान में कहाँ है अब बताया जा सकता है।

किसी एक ही समतल पर किसी बिन्दु की स्थिति ज्ञात करने के लिये परस्पर लम्ब दो अक्षों से निश्चित दिशा में उस बिन्दु की लम्बवत दूरी कितनी है — यह जान लेना आवश्यक है। यह सिद्धान्त गणित की एक विशेष शाखा का आधार सिद्धान्त है। गणित की शाखा स्थानांक ज्यामिति (Coordinate Geometry) है। इस सिद्धान्त के जनक फ्रांसिसी दार्शनिक और गणितज्ञ रेने दे कार्ते हैं।

कार्टेशियन पद्धति (Cartesian System)

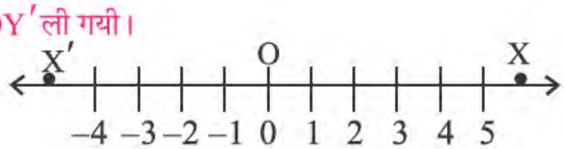


यह ☐ रेखा है।

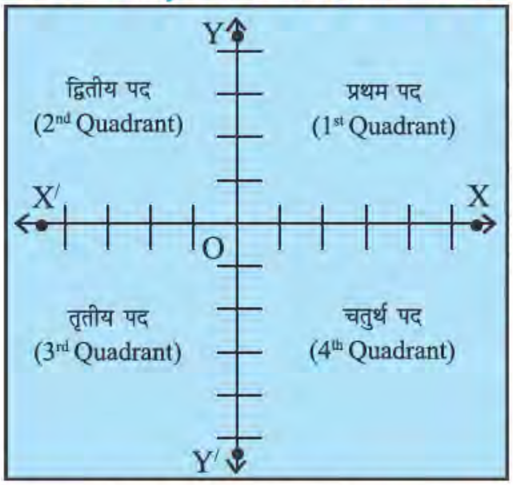


इस रेखा पर O मूल बिन्दु है। O से धनात्मक दिशा में 4 की दूरी 4 इकाई और इसी प्रकार ऋणात्मक दिशा में – 2 की दूरी 2 इकाई है। दे कार्ते ने इसी तरह की दो संख्या रेखाओं को एक दूसरे के लम्बवृत रखते हुए किसी तल पर बिन्दु की स्थिति ज्ञात करने का सिद्धान्त बताया था।

दो सरल रेखायें XOX′ और YOY′ ली गयी।



इन दोनों सरल रेखाओं को बिन्दु O पर लम्बवृत रखने पर क्षैतिज रेखा XOX' अर्थात् x अक्ष और उर्ध्व रेखा YOY' अर्थात y अक्ष पाते हैं। XOX' और YOY' का परस्पर कटान बिन्दु O मूल बिन्दु हैं।



चूँकि धनात्मक संख्यायें OX और OY की ओर स्थित है अत: OX को x अक्ष को धनात्मक दिशा और OY को y अक्ष की धनात्मक दिशा कहा जाता है। फिर चूँकि ऋणात्मक संख्यायें OX' और OY' की ओर स्थित हैं, इसलिये OX' को x अक्ष की ऋणात्मक दिशा और OY' को y अक्ष की ऋणात्मक दिशा कहा जाता है।

ये अक्ष पूरे समतल को चार समान भागों में बाँटते हैं। इन चार भागों को प्रथम पाद, द्वितीय पाद, तृतीय पाद और चतुर्थ पाद कहा जाता है। हम इस समतल को कार्टेशियन तल अथवा स्थानांक तल कहते हैं। या **xy** तल कहते हैं।

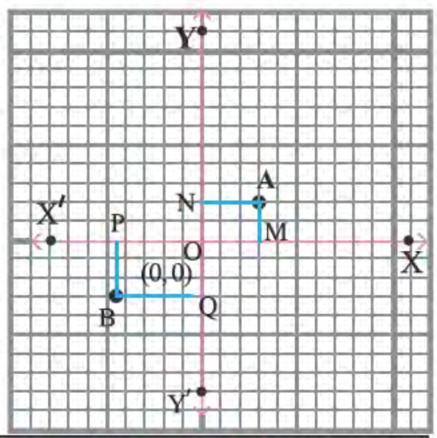
XOY कोण के मध्यवर्ती क्षेत्र को **प्रथम पाद** कहा जाता है।
YOX' कोण के मध्यवर्ती क्षेत्र को **द्वितीय पाद** कहा जाता है।
$X'OY'$ कोण के मध्यवर्ती क्षेत्र को **तृतीय पाद** कहा जाता है।
$Y'OX'$ कोण के मध्यवर्ती क्षेत्र को **चतुर्थ पाद** कहा जाता है।

O को **मूल बिन्दु** कहा जाता है।

अब हम वर्गांकित कागज पर XOX' और YOY' दो परस्पर लम्ब खीचते हैं और इस कागज पर किसी बिन्दु A की स्थिति इन अक्षों की सहायता से कैसे जानी जा सकती है, देखते हैं।

पहले वर्गांकित कागज पर सबसे छोटे वर्ग की एक भुजा को 1 इकाई मान लेते हैं। अब A से y अक्ष पर AN लम्ब खीचतें हैं। इसके बाद A से x अक्ष पर AM लम्ब खींचा। देखा गया कि y अक्ष से x अक्ष की धनात्मक दिशा में A की लम्बवत दूरी AN = OM = 3 इकाई और x अक्ष से y अक्ष की धनात्मक दिशा में A की लम्बवत दूरी AM = ON = 2 इकाई है।

इसी प्रकार y अक्ष से x अक्ष की ऋणात्मक दिशा में B बिन्दु की लम्बवृत दूरी BQ = OP = 4 इकाई और x अक्ष से y अक्ष की ऋणात्मक दिशा में B बिन्दु की लम्बवृत दूरी BP = OQ = 3 इकाई है।



- किसी बिन्दु का x स्थानांक अथवा भुजा y अक्ष से उस बिन्दु की लम्बवत दूरी होता हैं। (x के धनात्मक स्थानांक के लिये मूलबिन्दु से x के धनात्मक दिशा में और ऋणात्मक स्थानांक के लिये मूल बिन्दु से (x स्थानांक के मान के) बराबर गिनते हैं।)
- किसी बिन्दु का y स्थानांक अथवा कोटि y अक्ष पर (या समानान्तर) x अक्ष से उस बिन्दु की लम्बवृत दूरी होती हैं। (y के धनात्मक स्थानांक के लिये मूलबिन्दु से y के धनात्मक दिशा में और ऋणात्मक स्थानांक के लिये मूलबिन्दु से y के ऋणात्मक दिशा में बराबर गिनते हैं।)
- स्थानांक तल पर किसी बिन्दु के स्थान को निश्चित रूप से दर्शाने के लिये (x स्थानांक, y स्थानांक) (इस तरह) लिखा जाता हैं। जैसे — A बिन्दु का स्थानांक (3, 2), O **मूल बिन्दु** का स्थानांक (0, 0)

x अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु की x अक्ष से दूरी ____ इकाई है। अतः x अक्ष पर किसी बिन्दु का y स्थानांक ____ है। अर्थात् x अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु का स्थानांक (x, 0) अथवा (–x, 0) जैसा होता है।
इसी प्रकार y अक्ष पर किसी की y अक्ष से दूरी ____ इकाई है। अतः y अक्ष पर किसी बिन्दु का x स्थानांक ____ है। अर्थात् y अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु का स्थानांक (0, y) अथवा (0, –y) जैसा होता है।

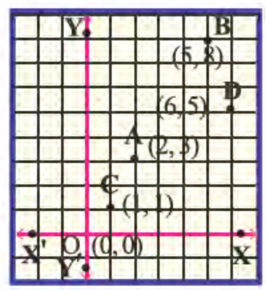
x अक्ष की धनात्मक दिशा में x अक्ष पर कोई बिन्दु स्थित हो तो $x > 0$ और $y = 0$ तथा x अक्ष की ऋणात्मक दिशा में x अक्ष पर कोई बिन्दु स्थित हो तो $x < 0$ और $y = 0$ होता है। y अक्ष की धनात्मक दिशा में y अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के लिये $x = 0$ और $y < 0$ होता है।

1 अब वर्गांकित कागज पर XOX$'$ और YOY$'$ दो परस्पर लम्ब खींचते हैं और कुछ बिन्दुओं को इस कागज पर स्थापित करके देखें कि ये किस पाद में पड़ते हैं।

वर्गांकित तल पर बिन्दु अंकित करने की विधि

पहले हम धनात्मक भुज और धनात्मक कोटि वाले बिन्दु लेते हैं।
[वर्गांकित तल के दोनों अक्षों पर सबसे छोटे वर्ग की एक भुजा की लम्बाई को 1 इकाई माना।]

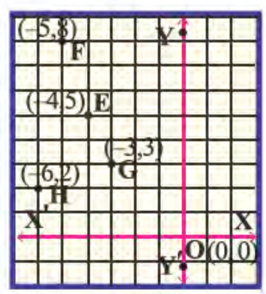
(2,3) बिन्दु का भुजा ____ और कोटि ____ है।



मूल बिन्दु O (0,0) से OX पर 2 इकाई जाकर वहाँ से OY के समानान्तर ऊपर का ओर 3 इकाई जाकर A (2, 3) बिन्दु पाते हैं। इस बिन्दु पर पेन्सिल से निशान बनाकर उसके बगल में स्थानांक लिखते हैं।

इसी प्रकार B (5, 8), C (1, 1), D (6, 5), ... बिन्दुओं को वर्गांकित तल पर अंकित कर देखते हैं कि A, B, C, D, ... प्रत्येक बिन्दु ____ [प्रथम/द्वितीय] पद में उपस्थित हैं।

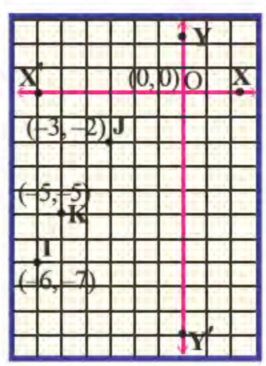
अब ऐसे बिन्दुओं को वर्गांकित तल पर अंकित करेंगे जिनका भुजा ऋणात्मक और कोटि धनात्मक हैं।



(– 4, 5) स्थानांक वाले बिन्दु का भुज ____ और कोटि ____ है; मूल बिन्दु O (0,0) से OX$'$ पर अर्थात् x अक्ष पर बायीं ओर 4 इकाई जाकर OY के समानान्तर 5 इकाई ऊपर जाने पर E (–4, 5) बिन्दु मिला।

इसी प्रकार F (–5, 8), G (–3, 3), H (–6, 2) ,........ बिन्दु वर्गांकित कागज तल पर अंकित करके पाते हैं कि ये बिन्दु ____ पाद में स्थित है।

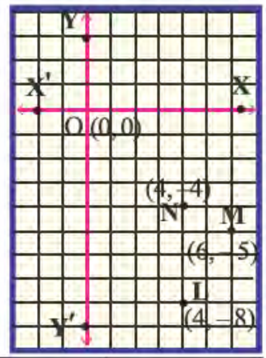
हम **(–6, –7)** बिन्दु को वर्गांकित कागज पर अंकित करते है।



बिन्दु (–6, –7) का भुज और कोटि दोनों ____ अतः मूल बिन्दु O (0,0) से OX$'$ पर 6 इकाई जाकर वहाँ से OY$'$ के समानान्तर 7 इकाई नीचे जाने पर I (–6, –7) बिन्दु मिला।

इसी प्रकार J (–3, –2), K (–5, –5), ... आदि बिन्दुओं को अंकित करके देखते हैं कि प्रत्येक बिन्दु ____ पाद में है।

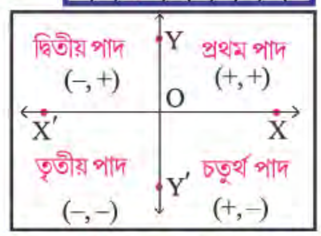
अब बिन्दु **(4, –8)** को वर्गांकित कागज पर अंकित करते हैं।



बिन्दु (4, –8) का भुजा धनात्मक और कोटि [ ] हैं। अत: मूल बिन्दु O (0,0) से OX पर 4 इकाई जाकर वहाँ से OY′ के समानान्तर 8 इकाई के नीचे जाने पर L (4, –8) बिन्दु मिला।

इसी प्रकार M (6, –5), N (4, –4), ... आदि बिन्दुओं को अंकित करके देखते हैं कि प्रत्येक बिन्दु [ ] पाद में स्थित हैं।

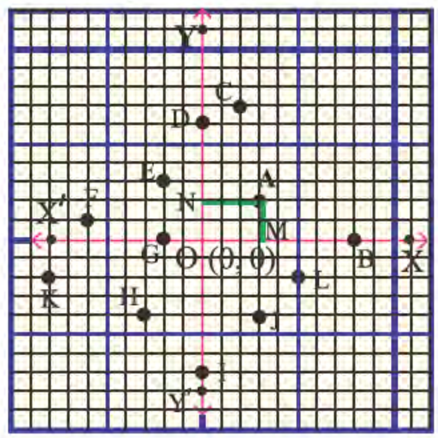
2 अब हम मिजानूर द्वारा वर्गांकित कागज पर अंकित बिन्दुओं का स्थानांक जानने का प्रयास करते है और देखते हैं कि किन पादों में स्थित हैं।



A बिन्दु से OX और OY पर क्रम से AM और AN लम्ब खींच कर पाते हैं कि OM = 3 इकाई अर्थात् y अक्ष से दूरी 3 इकाई अर्थात् ON = 2 इकाई अर्थात् x अक्ष से दूरी 2 इकाई हैं।

∴ A बिन्दु का स्थानांक (3, 2) है।

अर्थात् हम पाते हैं कि y अक्ष से दूरी x स्थानांक और x अक्ष से दूरी y स्थानांक होती है।



इसी प्रकार B बिन्दु का स्थानांक (8, 0) है। [चूँकि OX पर मूल बिन्दु से 8 इकाई दूर है।]

अर्थात् (8,0) बिन्दु x अक्ष की धनात्मक दिशा में x अक्ष पर स्थित है।

D बिन्दु का स्थानांक (0,6) है। [चूँकि OY अक्ष पर मूल बिन्दु से [ ] इकाई दूर है।] अर्थात् बिन्दु (0,6) y अक्ष की धनात्मक दिशा की ओर y अक्ष पर स्थित हैं।

हल करें — 3.1

1. निम्न बिन्दुओं को वर्गांकित कागज पर अंकित करें और बतायें कि x अक्ष से ऊपर और नीचे कौन-कौन बिन्दु है?
   (3,–2), (–4,2), (4,5), (– 5,– 5), (–2,7), (7,–7), (0, 9), (0,– 9)
2. वर्गांकित कागज पर निम्न बिन्दुओं को अंकित करें और बतायें कि y से कौन बायें है और कौन दाये है?
   (5, –7), (– 10, 10), (– 8,–4), (4, 3), (–6, 2), (11,–3), (4, 0), (–4, 0)
3. निम्न बिन्दुओं को वर्गांकित कागज पर अंकित करें और बतायें कि किस पाद में या किस अक्ष के ऊपर और किस ओर हैं?
   (–11,–7), (0,5), (9,0), (–4,–4), (12,–9), (3,13), (0,–6), (–5,0),
4. x अक्ष पर स्थित किन्हीं चार बिन्दुओं के स्थानांक लिखें।
5 y अक्ष पर स्थित किन्हीं चार बिन्दुओं के स्थानांक लिखें।
6. प्रत्येक पाद में स्थित चार-चार बिन्दुओं के स्थानांक लिखें।
7. किसी बिन्दु की x अक्ष का धनात्मक दिशा में दूरी 5 इकाई और y अक्ष से धनात्मक दिशा में दूरी 7 इकाई है। इस बिन्दु का स्थानांक लिखें।

3.1 मैंने और मारिया ने पुस्तकों की दूकान से 16 रु० में 2 ग्राफ-पुस्तिका खरींदी। एक ग्राफ-पुस्तिका और एक एक पेंसिल का मूल्य क्या होगा ? गणना करें।

माना कि एक ग्राफ-पुस्तिका का मूल x रु० और पेंसिल का मूल्य y रु० है।

$\therefore$ 2 ग्राफ-पुस्तिका का मूल $2 \times x$ रु० = 2x रु०

और 3 पेंसिल का मूल्य $3 \times y$ रु० = 3y रु०

$\therefore$ कुल मूल्य = (2x + 3y) रु०

शर्त्तानुसार, $2x + 3y = 16$ .... (i)

16 रु० में 2 ग्राफ-पुस्तिकायें 3 पेंसिल खरीदी गयीं – इसकी सूचना समीकरण संख्या (i) की सहायता से व्यक्त की गयी है एवं दो चल राशियों वाला एक घातीय समीकरण मिला है।

अब गणना करके देखते हैं कि x और y के कौन कौन से समीकरण संख्या (i) एक को संतुष्ट करके अर्थात्

3.2 समीकरण संख्या (i) एक के बायें पक्ष में x और y कौन-कौन से मान रखने पर उनका योगफल 16 मिलेगा।

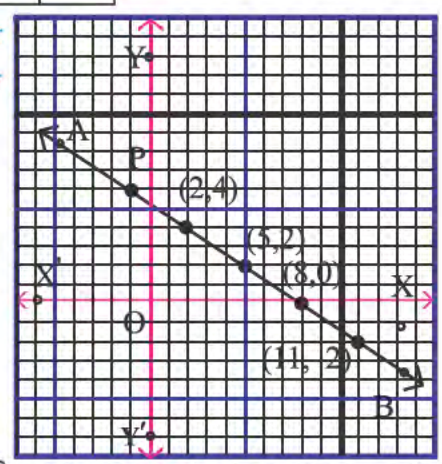
समी० सं० (i)में x = 5 और y = 2 रखने पर पाते है।	फिर समी० सं०(i) में x = 2 और y = 4 रखने पर पाते है।
$2x + 3y = 2 \times 5 + 3 \times 2 = \square$	$2x + 3y = 2 \times 2 + 3 \times 4 = \boxed{16}$

3.3 x और y के जो-जो मान 2x + 3y = को संतुष्ट करते हैं उन्हें क्या कहा जायेगा ?

x और y के जो मान समीकरण संख्या (i) को संतुष्ट करते हैं उन्हें समीकरण का समाधान या मूल कहा जाता है। पाते है, समीकरण संख्या (i) के असंख्य समाधान पाये जा सकते हैं। वे हैं

x	8	5	2	11	.....
$y = \frac{16-2x}{3}$	0	2	4	–2	....

जितने समाधान मिले उनके x और y के मानो को क्रमशः x स्थानांक और y स्थानांकर मानकर प्रत्येक जोड़े समाधान के लिये वर्गांकित कागज पर एक-एक बिन्दु मिलेगें।



मारिया ने वर्गांकित कागज पर XOX$'$ और YOY$'$ दो परस्पर लम्ब अक्ष खींचकर और सबसे छोटे वर्ग की एक भुजा की लम्बाई को 1 एक इकाई मानकर (8,0), (5,2), (2,4) और (11, –2) बिन्दुओं को अंकित कर इन्हें मिलाने पर जो सरल रेखा पाया वह $\overleftrightarrow{AB}$ सरल रेखा का एक खण्ड हैं।

$\therefore$ $2x + 3y = 16$ एक दो चल राशियुक्त एक घातीय या सरल समीकरण हैं।

अतः दो चलराशि युक्त एक घातीय या सरल समीकरण का सामान्य रूप $ax + by + c = 0$ हैं।

(जहाँ, a, b, c स्थिरांक हैं एवं a और b एक साथी शून्य नहीं हैं। अर्थात् $a^2 + b^2 \neq 0$)

$2x + 3y - 16 = 0$ समीकरण में 2, 3, – 16 स्थिरांक हैं।
$ax + by + c = 0$ समीकरण में a, b, c अर्निदिष्ट स्थिरांक (वास्तविक संख्या है।)

हम AB सरल रेखा पर कोई बिन्दु P लिया। P बिन्दु का स्थानांक (–1, 6) हैं।

समीकरण संख्या (i) के बाँयें पक्ष में $x = -1$ एवं $y = 6$ रख कर देखे क्या मिलता हैं, $2x+3y = 2\times(-1)+3\times6 = 16$

$\therefore$ $x = -1, y = 6$ समीकरण संख्या (i) को संतुष्ट करता है अर्थात $x = -1, y = 6$ समी० सं० (i) का एक समाधान हैं।

हम $\overleftrightarrow{AB}$ सरल रेखा पर कोई बिन्दु P को छोड़कर अन्य कोई बिन्दु लेकर देखते हैं कि एस बिन्दु का स्थानांक समीकरण संख्या (i) को संतुष्ट करता है। [स्वंय करें]

अर्थात् AB सरल रेखा पर सभी बिन्दु समीकरण संख्या (i) के समाधान हैं।

अर्थात् समीकरण संख्या (i) के प्रत्येक समाधान के लिये $\overleftrightarrow{AB}$: सरल रेखा पर एक बिन्दु पायेगें। फिर $\overleftrightarrow{AB}$ पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के लिये समीकरण संख्या (i) का एक समाधान पायेगें।

समीकरण संख्या (i) का AB सरल रेखा के साथ क्या संबंध हैं ?

AB सरल रेखा समीकरण संख्या (i) का लेखन चित्र हैं।

लेखाचित्र एक ज्यामितिक आकृत्ति (चित्र) हैं जिसका बीजगणितीय रूप दिया गया समीकरण होता हैं। अर्थात् समीकरण द्वारा प्रकाशित चलराशियों के बीच के संबंधों का चित्र रूप लेखाचित्र होता हैं। एक अथवा दो चलराशि युक्त समीकरण का लेखाचित्र (two dimension) एक सरल रेखा होगीं। सरल समीकरणों का लेखाचित्र हमेशा एक समरल में रहता हैं। इस समतल को कार्टेशियन तल कहा जाता हैं।

अत: $ax + by + c = 0$ समीकरण का लेखाचित्र एक सरल रेखा होती हैं।

ग्राफ-पुस्तिका और पेंसिल की संख्या के दाम ऋणात्मक नहीं हो सकता। किन्तु समीकरण के लेखा चित्र चूँकि एक सरल रेखा है। अत: ऋणात्मक स्थानांक उस सरल रेखा पर स्थित होंगे।

किसी एक या दो चलराशि युक्त एक घातीय यी सरल समीकरण का लेखाचित्र अंकन करने में क्या-क्या किया गया- देखते हैं —

(i) पहले एक या दो चलराशि युक्त एक घातीय समीकरण के कई समाधान बिन्दु (कम से कम तीन) ज्ञात किया।

(ii) इसके बाद ग्राफ-कागज के दो अक्षों पर सबसे छोटे वर्ग की कितनी भुजाओं की इकाई मानेंगे निश्चित करके बिन्दुओं को अंकित किया और पैमाने (Scale) की सहायता से इन्हें मिलाकर एक सरल रेखा पाया जो एक या दो चलराशि युक्त एक घातीय समीकरण का लेखाचित्र हैं।

[दो समाधान बिन्दुओं को मिलाने पर सरल रेखा पायी जाती हैं। किन्तु सतर्कता के लिये तीन बिन्दु अंकित कर लेखाचित्र अंकित किया जाता हैं।]

4 जोसेफ ने मुहल्ले की उसी दुकान से 33 रु० में समान मूल्य के 5 ग्राफ-पुस्तिकायें और 4 पेंसिलें खरीदी। 5 ग्राफ पुस्तिकाओं और 4 पेंसिलों का कुल मूल्य 33 रु० है — इस समस्या की समीकरण के रूप में लिखते हैं।

माना कि, 1 पुस्तिका का मूल्य x रु० और 1 पेंसिल का मूल्य y रु० हैं।

$\therefore$ 5 पुस्तिकाओं का मूल्य 5x रु० और 4 पेंसिल का मूल्यों 4y रु० हैं।

शर्त्तानुसार, $5x + 4y = 33$ ________ (ii)

$\therefore$ दो चलराशि युक्त एक घातीय समीकरण पाते हैं।

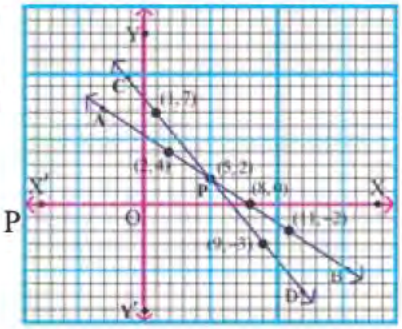
अब मारिया द्वारा बनायें ग्राफ कागज पर ही समीकरण संख्या (ii)का लेखाचित्र अंकित करते हैं।

समीकरण संख्या (ii) के तीन समाधान हैं।

समीकरण हैं : $5x + 4y = 33$

x	1	9	5
$y = \frac{33-5x}{4}$	7	-3	2

अब हम मारिया के वर्गांकित कागज पर दोनों अक्षों पर प्रत्येक सबसे छोटे वर्ग की एक भुजा की लम्बाई को 1 इकाई मानकर (1,7), (9,–3) और (5,2) बिन्दुओं को अंकित करते है एवं इन बिन्दुओं को मिलाने से $\overleftrightarrow{CD}$ सरल रेखा मिली।



$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD}$ सरल रेखा समीकरण संख्या (ii) का लेखाचित्र हैं।

पाते हैं AB और CD सरल रेखायें एक दूसरे को बिन्दु P पर काटते हैं। P का स्थानांक (☐, ☐) हैं।

$\therefore$ **x = 5, y = 2** समीकरण संख्या (i) और (ii) को संतुष्ट करता हैं।

समीकरण संख्या (i) और (ii) का एक ही साधारण समाधान हैं।

समीकरण संख्या (i) और (ii) को क्या कहा जायेगा ?

समीकरण संख्या (i) को (ii) सरल या दो राशियुक्त एक घातीय संगत समीकरण कहते हैं।

पातें हैं, दो अज्ञात संख्या युक्त एक घातीय दो चलराशि युक्त समीकरणों को संगत समीकरण कहते हैं।

5 4 वर्ष पहले हमारी बहन मीता और भाई सोहम की उम्रों का अनुपात 1:2 था। 4 चार वर्ष के बाद उनकी उम्रों का अनुपात 3:4 होगा। इस सूचनाओं से संगत समीकरणों का गठन करते हैं और मीता और सोहम की उम्र ज्ञात करते हैं।

माना कि, मीता की वर्तमान उम्र x वर्ष और सोहम की वर्तमान आयु y वर्ष हैं।

$\therefore$ 4 वर्ष पहले मीता की उम्र = (x – 4) वर्ष थी और सोहम की उम्र = (y – 4) वर्ष थी।

शर्त्तानुसार, $\frac{x-4}{y-4} = \frac{1}{2}$ ———— (i)

फिर, 4 वर्ष के बाद मीता की उम्र = (x + 4) वर्ष और सोहम की उम्र = (y + 4) वर्ष होगीं।

शर्त्तानुसार, $\frac{x+4}{y+4} = \frac{3}{4}$ ____ (ii) (i) और (ii) संख्या समीकरण निर्मेय संगत समीकरण हैं।

अब इन दो समीकरणों को लेखाचित्र पर अंकित किया जाय।

$\frac{x-4}{y-4} = \frac{1}{2}$

या, 2x – 8 = y – 4

या, 2x = y + 4

$\therefore\ x = \frac{y+4}{2}$

$x = \frac{y+4}{2}$	2	3	☐
y	0	2	– 2

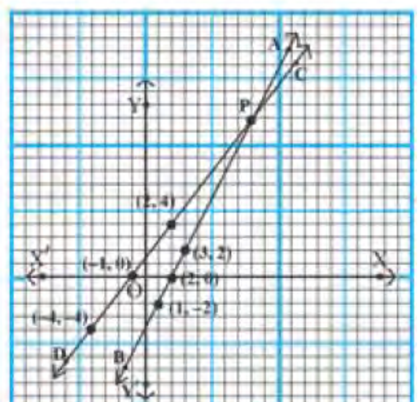
$\frac{x+4}{y+4} = \frac{3}{4}$

या 4x + 16 = 3y + 12

$\therefore\ x = \frac{3y-4}{4}$

$x = \frac{3y-4}{4}$	☐	2	– 4
y	0	☐	– 4

वर्गांकित कागज पर XOX′ और YOY′ परस्पर लम्ब x अक्ष और y अक्ष खींचा। दोनों अक्षों पर सबसे छोटे वर्ग की 1 भुजा की लम्बाई को इकाई मानकर (2,0), (3,2) एवं (1, – 2) बिन्दुओं को अंकित करके और इन्हें मिलाते हुए $\overleftrightarrow{AB}$ सरल रेखा और (–1, 0), (2, 4) और (–4, –4) बिन्दुओं को अंकित कर और मिलाकर $\overleftrightarrow{CD}$ सरल रेखा पाया।



$\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ सरल रेखायें एक दूसरे को परस्पर बिन्दु P पर काटती हैं। P बिन्दु का स्थानांक = (8 , 12)

अत: लेखाचित्र पर पाते हैं, x = 8 और y = 12

$\therefore$ मीता की वर्तमान उम्र 8 वर्ष और सोहम की वर्तमान उम्र 12 वर्ष हैं।

6 सुखदेव ने दो अंको की एक संख्या लिखा है। जिसके अंको का योग 6 और संख्या के साथ 36 जोड़ने पर अंक स्थान विनिमय कर लेते हैं। सूचना अनुसार समीकरण गठन करें। लेखाचित्र की सहायता से इन्हें हल करें और दो अंकों की संख्या लिखें।

माना कि दो अंको की एक संख्या में इकाई स्थान का अंक x और दहाई स्थान का अंक y हैं।

$\therefore$ अंको की संख्या = 10y + x है

अंको की योगफल = x + y है

द	इ
y	x

शर्त्तानुसार, x + y = 6.............(i)

द	इ
x	y

अंको के स्थान बदलने(विनिमय करने) पर पाते हैं, 10x + y

शर्त्तानुसार,

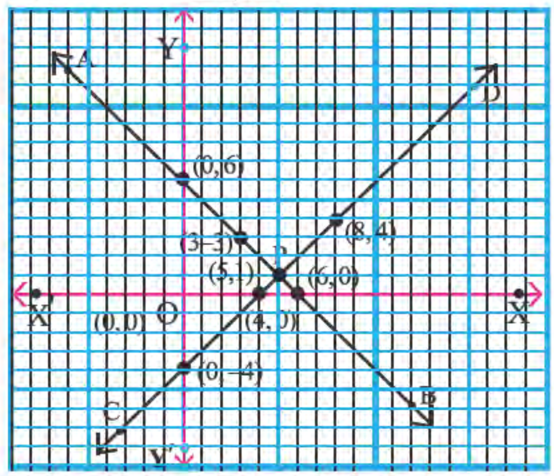
$\therefore$ 10y + x + 36 = 10x + y

या, 9y – 9x + 36 = 0

या y – x + 4 = 0...................(ii)

x	6	0	3
y = 6 – x	0	6	3

x	0	4	8
y = x – 4	– 4	0	4



समीकरण (i) और (ii) का लेखाचित्र से समाधान करके पाते हैं कि, x = 5 और y = 1 **[स्वयं करें]**

$\therefore$अभीष्ट दो अंकों की संख्या = 10 × 1 + 5 = 15

7 वर्गांकित कागज पर (2, 5), (5,2), (3,6), (5, 0) (3, 0), (–2, 0), (–2, –5), (0, 2), (0, 3), (0, –2) आदि बिन्दुओं को वर्गांकित कागज पर अंकित कर देखें क्या पाते हैं। **[स्वयं करें]**

पातें हैं कि कुछ बिन्दु प्रथम पाद में, कुछ द्वितीय पाद में, कुछ तृतीय पाद में, कुछ चतुर्थ पाद में और कुछ x अक्ष पर कुछ y अक्ष पर स्थित हैं। x अक्ष पर स्थित बिन्दुओं में विशेष समानता हैं। इन बिन्दुओं का y स्थानांक 0 शून्य हैं। अर्थात बिन्दुओं की x अक्ष से दूरी 0 इकाई हैं।

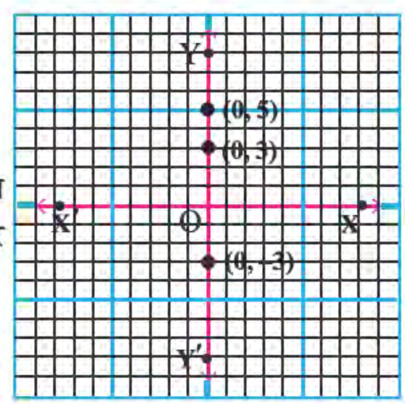
8 अब x = 0 इस चलराशि युक्त एक घातीय समीकरण के लेखा चित्र अंकित करते हैं।

x = 0 समीकरण को लिख सकते हैं x + 0.y = 0

$\therefore$ y के प्रत्येक मान के लिये x का मान शून्य होगा।

अतः

x	0	0	0
y	3	5	–3



$\therefore$ वर्गाकित कागज पर XOX$'$और YOY$'$ दो परस्पर लम्बवत् अक्ष खींच कर (0,3), (0,5) और (0, –3) बिन्दुओं को अंकित कर और मिलाकर ☐ अक्ष पाया।

अतः y अक्ष x = 0 का लेखाचित्र हैं।

इसी प्रकार, y = 0 समीकरण का लेखाचित्र x अक्ष हैं। **[स्वयं करें]**

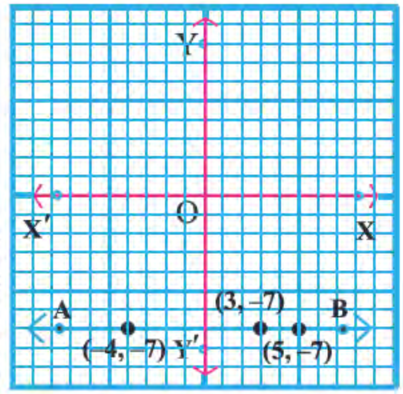
9 हम $y + 7 = 0$ का लेखाचित्र अंकित करें।

$y + 7 = 0$ समीकरण को लिख सकते हैं $0.x + y = -7$

$\therefore$ x के किसी भी मान के लिये y का मान -7 होगा।

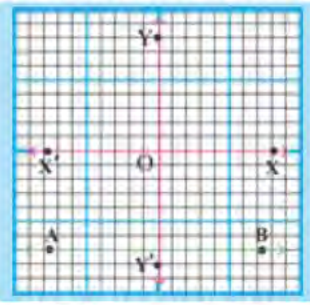
अत: $y + 7 = 0$ समीकरण से पाते हैं,

x	3	−4	5
y	−7	−7	−7



वर्गांकित कागज पर XOX′ और YOY′ दो परस्पर लम्बवत् अक्ष खींचकर दोनों अक्षों पर सबसे छोटे वर्ग की एक भुजा की लम्बाई को 1इकाई मानकर (3, − 7), (− 4, −7) और (5, − 7) बिन्दुओं को अंकित कर और इन्हें मिलाकर ☐ अक्ष के समानान्तर एक सरल रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ पाया।

$\overleftrightarrow{AB}$ एक घातीय एक चलराशि युक्त समीकरण $y + 7 = 0$ का लेखन चित्र हैं। [अर्थात $y = b$ (जहाँ b = स्थिरांक हैं) समीकरण का लेखाचित्र x अक्ष के समानान्तर हैं।]



$y + 7 = 0 \therefore y = -7$

अर्थात x अक्ष से 7 इकाई दूर y ऋणात्मक दिशा में x अक्ष के समानान्तर $y = -7$ समीकरण का लेखाचित्र $\overleftrightarrow{AB}$ सरल रेखा मिली।

10 इसी प्रकार पाते हैं $x - 9 = 0$ समीकरण का लेखाचित्र ☐ अक्ष के समानान्तर हैं। [स्वयं करें]
(अर्थात $x = b$ (जहाँ b = स्थिरांक) समीकरण का लेखाचित्र ☐ अक्ष के समानान्तर हैं।

11 अब $7x + 6y = 42$ समीकरण का लेखाचित्र अंकित करते हैं। लेखाचित्र और दोनों अक्षों से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल और अक्ष द्वय द्वारा लेखाचित्र पर घिरे खण्ड की लम्बाई ज्ञात करते हैं।

$7x + 6y = 42$ ....(i)

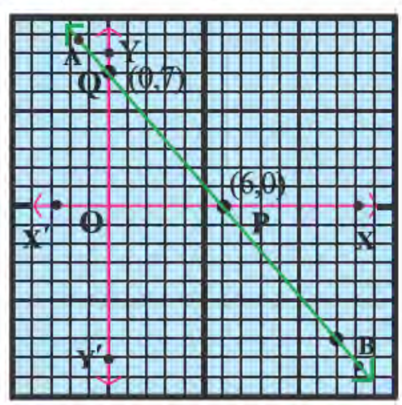
या, $7x = 42 - 6y \;\therefore\; x = \dfrac{42 - 6y}{7}$

$y = 0$ हो तो, $x = \dfrac{42 - 6.0}{7} = \dfrac{\cancel{42}^{\,6}}{\cancel{7}} = 6$

$y = 7$ हो तो, $x = \dfrac{42 - 6.7}{7} = $ ☐

$y = -7$ हो तो, $x = \dfrac{42 - 6.(-7)}{7} = $ ☐

$x = \dfrac{42-6y}{7}$	6	☐	12
y	0	7	−7



वर्गांकित कागज पर XOX′ और YOY′ दो परस्पर लम्बवत् अक्ष खींचकर प्रत्येक अक्ष पर सबसे छोटे वर्ग की एक भुजा की लम्बाई को 1इकाई मानकर (6, 0), (0, 7) और (12, − 7) बिन्दुओं को अंकित कर और इन्हें मिलाकर $\overleftrightarrow{AB}$ सरल रेखा पाया।

$\overleftrightarrow{AB}$ सरल रेखा x अक्ष को P पर और y अक्ष को Q पर काटती हैं।

यहाँ बिन्दु P का स्थानांक (6,0) और बिन्दु Q का स्थानांक (0,7) हैं।

$\therefore$ OP = 6 इकाई और OQ = 7 इकाई

$\therefore \Delta$ OPQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OP \times OQ$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 7$ वर्ग इकाई = 21 वर्ग इकाई $\therefore$ Δ OPQ का क्षेत्रफल = 21 वर्ग इकाई

समकोण Δ OPQ और $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$ [पाइथागोरस के प्रमेय से पाते हैं।]

$= (6^2 + 7^2)$ वर्ग इकाई

$= (36 + 49)$ वर्ग इकाई = 85 वर्ग इकाई

$\therefore \quad PQ = \sqrt{85}$ इकाई

```
         9.2
    ┌ 85.00
    │-81
182 │ 400
    │-364
       36
```

अक्ष द्वय द्वारा लेखाचित्र पर खण्डित अंश की लम्बाई 9.2 इकाई (प्राय:

12 समीकरण : $2x + 4y = 5$ का लेखाचित्र अंकित करें।

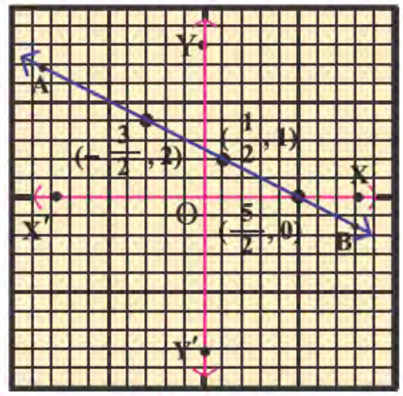
$2x + 4y = 5$............(i)

$2x + 4y = 5$

या, $x = \frac{5-4y}{2}$

$x = \frac{5-4y}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y	1	0	2

दोनों अक्ष बराबर क्षुद्रतम वर्ग क्षेत्र के दोनों भुजा की लम्बाई = **1** इकाई



इस सारणी से मिलता हैं कि सभी बिन्दुओं का भुजा या कोटि एक साथ पूर्ण संख्या नहीं हैं। इन बिन्दुओं को किस तरह वर्गांकित कागज पर अंकित करें ?

इस दशा में वर्गांकित कागज पर दोनों अक्षों पर सबसे छोटे दो वर्गों की भुजाओं को 1 इकाई मानकर बिन्दुओं को वर्गांकित कागज पर अंकित कर और इन्हें मिला कर लेखाचित्र पायेंगे।

किन्तु इस प्रकार का समीकरण अर्थात $ax + by = c$ [जहाँ a और $b \neq 0$] a और b के म० स० प० द्वारा c विभाज्य न हो ऐसे समीकरणों का लेखाचित्र नौवीं कक्षा में पाठ्यक्रम में शामिल नहीं हैं।

हल करें — 3.2

1. **निम्नलिखित बिन्दुओं को ग्राफ कागज पर अंकित करें और बतायें कि ये कहाँ (अक्ष पर या किस पाद में) स्थित हैं :**

(i) (3, 0) (ii) (0,8) (iii) (−5, 0) (iv) (0,−6) (v) (6,4) (vi) (−7, 4) (vii) (9,−9) (viii) (−4, −5)

2. **ग्राफ कागज पर XOX$'$ और YOY$'$ पर परस्पर लम्ब खींचकर किन्हीं 5 बिन्दुओं को अंकित करें, जो तृतीय पाद में स्थित हैं :**

3. **निम्न कथनों को सरल संगत समीकरणों के रूप में प्रकाशित करें :**

(i) 3 अभ्यास पुस्तिकाओं और 2 पेंन का कुल दाम 55 रु० और 4 अभ्यास पुस्तिकाओं और 3 पेन का दाम 75रु० हैं।

(ii) दो संख्याओं को योगफल 80 हैं और इन संख्याओं के वियोगफल का 3 गुणा बड़ी संख्या से 20 अधिक हैं।

(iii) किसी भिन्न के अंश और हर के साथ 2 जोड़ने पर $\frac{7}{9}$ इसका मान और भिन्न के अंश और हर से 3 घटाने पर इसका मान $\frac{1}{2}$ हो जाता हैं।

(iv) दो अंको की संख्या के दहाई का अंक इकाई स्थान के अंक का दो गुणा हैं। अंकद्वय का स्थान बदलने पर बनी संख्या मूल संख्या से 27 कम हैं।

4. निम्न कथनों को दो चलराशि युक्त एक घातीय समीकरण के रूप में बदलें और समीकरणों का लेखाचित्र अंकित करें ।

(i) वर्तमान में सुजाता के पिता की आयु सुजाता की आयु से 26 वर्ष अधिक हैं। [मान लें कि सुजाता के पिता की वर्तमान आयु x वर्ष और सुजाता की वर्तमान आयु y वर्ष हैं।]

(ii) दो संख्याओं का योग 15 हैं।

(iii) किसी भिन्न के अंश और हर के साथ 2 जोड़ने पर इसका मान $\frac{7}{9}$ होता हैं।

(iv) हमारे कमरें की परिसीमा 80 मीटर हैं।

(v) दो संख्याओं में बड़ी संख्या का 5 गुना छोटी संख्या के 8 गुने के समान हैं।

5. निम्न समीकरणों का लेखाचित्र अंकित करें ।

(i) $x = 5$ (ii) $y + 2 = 0$ (iii) $x = 3 - 4y$ (iv) $3x - 7y = 21$ (v) $5x - 3y = 8$ (vi) $2x + 3y = 11$

(vii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 0$ (viii) $6x - 7y = 12$ (ix) $x + y - 10 = 0$ (x) $y = 5x - 3$ (xi) $y=0$

6. निम्न कथनों को युग्म समीकरणों के रूप में प्रकट करें और इनके लेखाचित्र अंकित कर मान समाधान करें।

(i) वतर्मान में रजत के मामा रजत से 16 वर्ष बड़े हैं। 8 वर्षों के बाद उसके मामा की आयु उसकी आयु की दो गुनी हो जायेगी। लेखाचित्र की सहायता से रजत और उसके मामा की वर्तमान आयु ज्ञात करें।

(ii) दो संख्याओं का योगफल 15 और वियोगफल 3 हैं। लेखाचित्र की सहायता से हल करके दोनों संख्याओं के मान बतायें।

(iii) किसी भिन्न के अंश से 3 वियोग कर और हर के साथ 2 योग करने पर इसका मान $\frac{1}{3}$ होता हैं और अंश से 4 तथा हर से 2 वियोग करने पर इसका मान $\frac{1}{2}$ हो जाता हैं। समीकरण में बदलकर लेखाचित्र की सहायता से हल करें और भिन्न का मान निर्णय करें।

(iv) रोहित के आयताकार बगीचें की परिसीमा 60 मीटर हैं। बगीचें की लम्बाई 2 मीटर अधिक और चौड़ाई 2 मीटर कम होने पर बगीचें का क्षेत्रफल 24 वर्ग मीटर कम हो जाता हैं। लेखाचित्र की सहायता से समाधान कर बगीचें की लम्बाई और चौड़ाई बतायें।

(v) एक नाव धारा को अनुकूल 16 घण्टे में 64 कि०मी० और धारा के विपरीत 8 घण्टे में 24 कि०मी० जाती हैं। लेखाचित्र की सहायता से समाधान कर स्थित जल में नाव का वेग और धारा का वेग ज्ञात करें।

संकेत : माना स्थिर जल में नाव का वेग x कि०मी०/घ० एवं धारा का वेग y कि०मी०/घ०। $\therefore$ धारा के अनुकूल नाव का वेग $(x + y)$ कि०मी०/घ० एवं धारा के प्रतिकूल नाव का वेग $(x - y)$ कि०मी०/घ० हैं।

7. निम्न युग्म समीकरणों का लेखाचित्र अंकित करें और कटान बिन्दु का स्थानांक ज्ञात करें ।

(i) $x = 0$ और $2x + 3y = 15$ (ii) $y = 5$ और $2x + 3y = 11$

(iii) $x + y = 12$ और $x - y = 2$ (iv) $3x - 5y = 16$ और $2x - 9y = 5$

8. लेखाचित्र की सहायता से निम्न समीकरणों को हल करें।

(i) $4x - y = 3;\quad 2x + 3y = 5$ (ii) $3x - y = 5;\quad 4x + 3y = 11$

(iii) $3x - 2y = 1;\ 2x - y = 3$ (iv) $2x + 3y = 12;\ 2x = 3y$

(v) $5x - 2y = 1;\ 3x + 5y = 13$

9. लेखाचित्र की सहायता से दिये गयें दो समीकरण हल करें।

$3x + 2y = 12$, $12 = 9x - 2y$

10. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 2$ का लेखाचित्र अंकित करें और यह लेखाचित्र दोनों अक्षों के साथ जो त्रिभुज बनाता हैं उसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

11. $x = 4$, $y = 3$ और $3x + 4y = 12$ के लेखाचित्र अंकित करें और इन लेखाचित्रों से बने त्रिभुज के क्षेत्रफल ज्ञात करें।

12. $y = \frac{x+2}{3}$ का लेखाचित्र अंकित करें। इन लेखाचित्र पर $x = -2$ के लिये y का मान और x के किस मान के लिये y का मान 3 होगा ज्ञात करें।

13. लेखाचित्र की सहायता से समाधान करें: $\frac{3x-1}{2} = \frac{2x+6}{3}$

संकेत : $y = \frac{3x-1}{2}$ और $y = \frac{2x+6}{3}$ समीकरणों का लेखाचित्र अंकित कर इनके कटान बिन्दु का स्थानांक ज्ञात करें। स्थानांक ही अभिष्ट समाधान हैं।

14. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.):

(i) $2x + 3 = 0$ समीकरण का लेखाचित्र

(a) x अक्ष के समानान्तर (b) y अक्ष के समानान्तर
(c) किसी अक्ष के समानान्तर नहीं हैं (d) मूलबिन्दु से गुजरता हैं।

(ii) $ay + b = 0$ (a और b स्थिारांक है और $a \neq 0, b \neq 0$) समीकरण का लेखाचित्र

(a) x अक्ष के समानान्तर (b) y अक्ष के समानान्तर
(c) किसी अक्ष के समानान्तर नहीं ह (d) मूल बिन्दु गामी हैं।

(iii) $2x + 3y = 0$ समीकरण का लेखाचित्र

(a) x अक्ष के समानान्तर (b) y अक्ष के समानान्तर
(c) मूल बिन्दुगामी हैं। (d) (2,0) बिन्दु गामी हैं।

(iv) $cx + d = 0$ (c और d कोई संख्या हैं, $c \neq 0$) समीकरण का लेखाचित्र y अक्ष का समीकरण यदि होगा

(a) $d = -c$ (b) $d = c$ (c) $d = 0$ (d) $d = 1$

(v) $ay + b = 0$ (a और b स्थिारांक, $a \neq 0$) समीकरण का लेखाचित्र x समीकरण का होगा जब

(a) $b = a$ (b) $b = -a$ (c) $b = 2$ (d) $b = 0$

15. संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्नः

(i) $2x + 3y = 12$ समीकरण का लेखाचित्र x अक्ष को जिस बिन्दु पर काटता हैं उसका स्थानांक लिखें।

(ii) $2x - 3y = 12$ समीकरण का लेखाचित्र y अक्ष को जिस बिन्दु पर काटता हैं उसका स्थानांक लिखें।

(iii) $3x + 4y = 12$ के लेखाचित्र और दोनों अक्षों से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल लिखें।

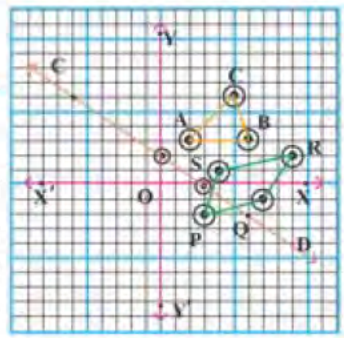
(iv) (6, – 8) बिन्दु की x अक्ष और y अक्ष से दूरियाँ लिखें।

(v) $x = y$ का लेखाचित्र x अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ जो कोण बनाता हैं उसका मान लिखें।

4 स्थानांक ज्यामिति : दूरी निकालने का सूत्र
(Co-ordinate Geometry : Distance Formula)

हमारे मित्र अर्क और आयेशा दोनो ने एक बहुत बड़ा पिचबोर्ड बनाया है। हमलोगों ने सोचा है कि अपने बगीचे में उस ग्राफ-बोर्ड की सहायता से एक मजेदार खेल खेलेंगे।

मैं अपनी पुस्तिका में कुछ बिन्दुओं का स्थानांक (Co-ordinates) लिखूँगा। सुचेता इन बिन्दुओं को ग्राफ-बोर्ड पर अंकित करेगी और बिन्दूओं को मिलाकर विभिन्न ज्यामितिक चित्र बनायेगी।



मैंने अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखा – (2,3), (6,3) और (5,6)

सुचेता ने ग्राफ-बोर्ड पर A (2,3) B (6,3) और C (5,6) विन्दुओ को अंकित करके इन्हे मिलाया और कैसा ज्यामितिक चित्र मिला देखा जाए।

XOX′ और YOY′ दो परस्पर लम्बवृत अक्ष खींचकर दोनो अक्षो पर सबसे छोटे वर्ग की एक भुजा की लम्बाई की 1 इकाई मानकर A, B और C बिन्दुओं को ग्राफ-बोर्ड पर अंकित किया और इन्हें मिलाया। ABC एक ☐ [चतुर्भुज / त्रिभुज] पाया गया।

1 अब हम P (3, –2), Q (7, –1), R (9, 2), और S (4, 1) बिन्दुओं को ग्राफ बोर्ड पर अंकित करते है और इन्हे मिलाते हैं – देखें क्या पाते हैं।

ऊपर के ग्राफ बोर्ड पर P,Q,R और S बिन्दुओ को अंकित कर इन्हें मिलाते हैं। PQRS एक ☐ [त्रिभुज / चतुर्भुज] पाते हैं। पृथा ने इसी ग्राफ बोर्ड पर दो चलराशि युक्त एक घातीय समीकरण 2x+3y=6 का लेखाचित्र अंकित किया और एक ☐ [सरल रेखा / वक्र रेखा] $\overleftrightarrow{CD}$ पाया। [स्वयं करें]

पाते हैं, बिन्दुओं का स्थानांक मालूम रहने पर, इन्हें मिलाकर विभिन्न ज्यामितिक चित्र पाये जाते हैं। फिर विभिन्न बीजगाणितीय दो चलराशि युक्त सरल समीकरणों को ज्यामितीय आकार के बारे मे सठीक घारणा बनायी जाती है।

इस प्रकार बीजगणित की सहायता से विभिन्न ज्यामितिक आकृतियों की घारणा बनाने को क्या कहा जाता है ? इसे स्थानांक ज्यामिति (Co-ordinate Geometry) कहा जाता है।

अर्थात्, स्थानांक ज्यामिति में बीजगणित की सहायता से ज्यामितिक आकृतियो के बारे में जाना जाता है। इसलिये स्थानांक ज्यामिति व्यापक रुप से विज्ञान की विभिन्न शाखाओं में व्यवहृत होती है।

हम नौवीं कक्षा के छात्र-छात्राओ ने निश्चय किया है कि विद्यालय में इस वर्ष विज्ञान-दिवस पालन करने का आयोजन करेंगे। इस कार्यक्रम में हम गणित के कुछ मजेदार खेल दिखायेंगे। इसलिये हम सभी मित्र समीरन के घर जायेंगे। समीरन का घर मेरे घर से 6 कि.मी. उत्तर की ओर और 4 कि०मी० पूर्व है।

2 ग्राफ - पेपर को छोड़ यूँ ही एक चित्र बनाकर देखें कि हम कितनी दूरी तय करेंगे ?

माना कि A बिन्दु पर मेरा घर है। 1 कि०मी० को इकाई मानकर A बिन्दु से 4 कि०मी० पूर्व और इसके बाद 6 कि.मी. उत्तर की ओर जाकर B बिन्दु पर पहुँचे।

∴ बिन्दु B पर समीरन का घर है।

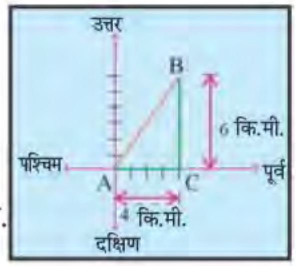
पाते है, AC = 4 कि.मी. और BC = 6 कि.मी.

∴ पाइथागोरस के प्रमेय से हम पाते हैं

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= (4^2 + 6^2)$ वर्ग कि.मी. = ☐ वर्ग कि.मी.

$AB = \sqrt{52}$ कि.मी. = 7.21 कि.मी.




```
         7.21
      52.0000
     -49
        300
142   - 284
         1600
1441    -1441
          159
```

∴ मेरे घर से समीरन के घर की दूरी 7.21 कि.मी. (प्राय)

3 हम वर्गांकित कागज के बिना ही XOX′ और YOY′ दो परस्पर लम्बवत अक्ष खींचकर किन्हीं दो बिन्दुओं [जिनके स्थानांक ज्ञात हैं] के बीच की दूरी मापने की चेष्टा करते है।

पहले x अक्ष पर कोई दो बिन्दु P और Q लिया।

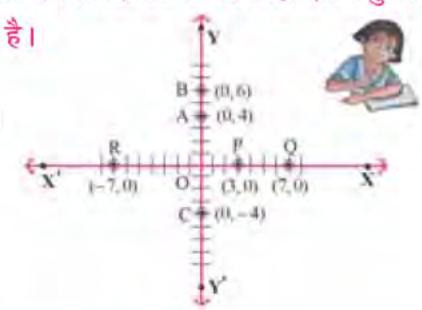
माना कि P और Q के स्थानांक क्रम से (3, 0) और (7, 0) है।

P और Q के बीच की दूरी मापते है।

P बिन्दु का स्थानांक (3, 0) और Q का स्थानांक (7, 0) है

∴ OP = 3 इकाई और OQ = 7 इकाई

∴ PQ = (7 – 3) इकाई = 4 इकाई



4 अब यदि R (– 7, 0) बिन्दु से P (3, 0) बिन्दु की दूरी मापें तो क्या पाते है - देखे।

OR = 7 इकाई

∴ चित्र से पाते है, PR = OP + OR = (3 + 7) इकाई = ☐ इकाई

5 y अक्ष पर कोई दो बिन्दु A और B लिया। A और B के नीच की दूरी मापें।

माना कि A बिन्दु का स्थानांक (0, 4) और B बिन्दु का स्थानांक (0, 6) है।

∴ A और B बिन्दुओं के बीच की दूरी AB = OB – OA = ☐ इकाई [स्वयं करें]

6 अब y अक्ष पर और एक बिन्दु C (0, – 4) लिया। इस बार A और C के बीच की दूरी मापते है।

A बिन्दु का स्थानांक (0, 4) और C बिन्दु का स्थानांक (0, – 4) है।

∴ OA = 4 इकाई और OC = 4 इकाई

∴ चित्र से पाते है : AC = OA + OC = (4 + 4) इकाई = ☐ इकाई

∴ A और C बिन्दुओ के बीच की दूरी ☐ इकाई।

7 रोहित ने xअक्ष पर एक बिन्दु M (6, 0) और yअक्ष पर एक बिन्दु N (0, 8) लिया। हम MN रेखा खण्ड की लम्बाई मापते है।

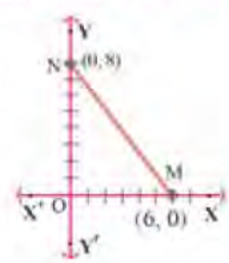
M बिन्दु का स्थानांक (6, 0) और N बिन्दु का स्थानांक (0, 8) है।

∴ OM = ☐ इकाई और ON = ☐ इकाई।

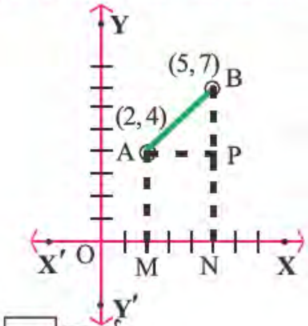
∴ पाइथागोरस के प्रमेय से हम पाते हैं

$MN^2 = OM^2 + ON^2 = (6^2 + 8^2)$ वर्ग इकाई = ☐ वर्ग इकाई

∴ MN = ☐ इकाई



8 अब हम ऐसे दो बिन्दु लेते है जो किसी अक्ष पर स्थिर नहीं है। इन दो बिन्दुओं A और B को मिलाने वाली रेखा खण्ड की लम्बाई मापने की चेष्टा करें।



माना कि A बिन्दु का स्थानांक (2, 4) और B बिन्दु का स्थानांक (5, 7) हैं।
A और B बिन्दु से x अक्ष पर क्रमश: AM और BN लम्ब खीचा जो x अक्ष से क्रमसे M तथा N बिन्दु पर मिलते हैं। A बिन्दु से BN पर लम्ब AP खींचा।

$\therefore$ OM = 2 इकाई और ON = 5 इकाई

फिर AM = 4 इकाई और BN = 7 इकाई

AP = MN = ON – OM ($\therefore$ AMNP एक आयत है) = (5 – 2) इकाई = ☐ इकाई

फिर BP = BN – PN = BN – AN = (7 – 4) इकाई = ☐ इकाई

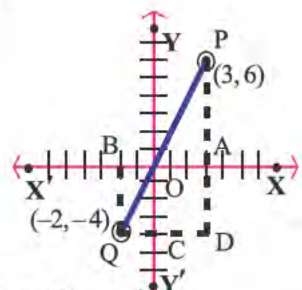
समकोण Δ APB में पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से पाते हैं

$AB^2 = AP^2 + PB^2$

$= (3^2 + 3^2)$ वर्ग इकाई = 18 वर्ग इकाई

$\therefore AB = \sqrt{18}$ इकाई $= 3\sqrt{2}$ इकाई

9 चित्र बनाकर P (3, 6) और Q (–2, – 4) बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात करें



P और Q बिन्दुओं के स्थानांक क्रमश: (3, 6) और (–2, – 4) है।

P और Q बिन्दुओ से x अक्ष पर कमसे PA और QB लम्ब खींचा जो x–अक्ष से क्रमसे A और B बिन्दु पर मिलते है।

OA = 3 इकाई और OB = 2 इकाई
PA = 6 इकाई और QB = 4 इकाई

बिन्दु Q से PA के बड़े हुए भाग पर लम्ब खीचा जो PA के बड़े हुये भाग के बिन्दु D पर मिलता है।

QD = AB = OA + OB = (3 + 2) इकाई = ☐ इकाई

फिर PD = PA + AD = PA + QB = (6 + 4) इकाई = ☐ इकाई

$\therefore$ समकोण Δ PQD से पाइथागोरस के प्रमेय की सहायता से हम पाते हैं

$PQ^2 = QD^2 + PD^2 =$ ☐ वर्ग इकाई

$\therefore$ PQ = ☐ इकाई [स्वयं लिखे]

स्वयं करें

निम्न बिन्दु युग्म को मिलाने से बनी रेखा खण्ड की लम्बाई ज्ञात करें।

(i) (18, 0); (8, 0) (ii) (0, 15); (0, 4) (iii) (– 7, 0); (– 2, 0) (iv) (0, – 10); (0, – 3)
(v) (6, 0); (– 2, 0) (vi) (0, – 5); (0, 9) (vii) (5, 0); (0, 10) (viii) (3, 0); (0, 4)
(ix) (4, 3); (2, 1) (x) (– 2, – 2); (2, 2)

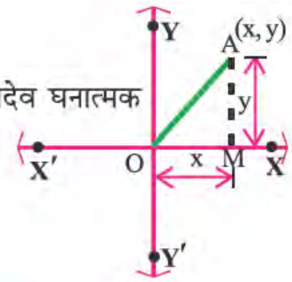
10 मूल बिन्दु और A (x, y) बिन्दु को मिलाने वाली रेखाखण्ड की लम्बाई ज्ञात करें।

A बिन्दु का स्थानांक (x, y) है। A बिन्दु से x-अक्ष पर AM लम्ब खींचा।

$\therefore$ OM = x और AM = y

समकोण त्रिभुज OAM से पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से पाते हैं

$OA^2 = OM^2 + AM^2 = x^2 + y^2$ $\quad \therefore OA = \sqrt{x^2 + y^2}$ [लम्बाई सदेव घनात्मक होती है]



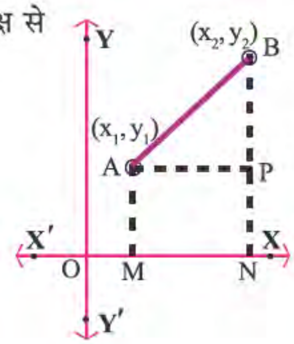
11 मूलबिन्दु से (3, 4) बिन्दु की दूरी ज्ञात करें।

मूल बिन्दु से (3, 4) बिन्दु की दूरी $= \sqrt{3^2 + 4^2}$ इकाई

$= \sqrt{25}$ इकाई $= 5$ इकाई

12 $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ बिन्दु द्वय को मिलानेवाली रेखा-खण्ड की लम्बाई करते है।

A और B बिन्दु से x अक्ष पर क्रमश: AM और BN लम्ब खींचा जो x-अक्ष से क्रमसे M तथा N बिन्दु पर मिलते हैं। बिन्दु A से BN पर AP लम्ब खींचा।



A और B बिन्दुओं के स्थानांक क्रम से (x_1, y_1) और (x_2, y_2) है।

$\therefore$ $OM = x_1$ और $ON = x_2$

$AM = y_1$ और $BN = y_2$

$AP = MN = ON - OM = x_2 - x_1$

और $BP = BN - PN = BN - AM = y_2 - y_1$

समकोण Δ APB से पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से पाते हैं

$AB^2 = AP^2 + BP^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .... (i)

($\because$ AB सदैव घनात्मक हैं)

पाते है (x_1, y_1) और (x_2, y_2) बिन्दुद्वय को मिलाने वाली रेखा खण्ड की $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ इकाई

$\because (x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$
और
$(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$

(i) न. को दूरी का सूत्र (Distance Formula) कहा जाता है।

13 हम (i) न. सूत्र की सहायता से (2, 4) और (5, 7) बिन्दुद्वय के बीच की दूरी ज्ञात करते हैं।

यहाँ $x_1 = 2, y_1 = 4$ और $x_2 = 5, y_2 = 7$ है।

$\therefore$ अभीष्ट दूरी $= \sqrt{(2-5)^2 + (4-7)^2}$ इकाई

$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$ इकाई $= \sqrt{18}$ इकाई $= 3\sqrt{2}$ इकाई

14 हम A (6, 6), B (2, 3) और C (4, 7) तीन बिन्दुओं को मिलाते है और भुजा के आधार पर किस प्रकार का त्रिभुज पाते है - गणना कर जानते है।

AB की ल० $= \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2}$ इकाई $= \sqrt{16+9}$ इकाई $=$ 5 इकाई

BC की ल० $= \sqrt{(2-4)^2 + (3-7)^2}$ इकाई $= \sqrt{20}$ इकाई $= 2\sqrt{5}$ इकाई

CA की ल० $= \sqrt{(4-6)^2 + (7-6)^2}$ इकाई $= \sqrt{5}$ इकाई

$\therefore \Delta$ ABC एक विषमबाहु त्रिभुज है।

हल करें – 4

1. **मूल बिन्दु से निम्न बिन्दुओं की दूरी ज्ञात करें :**
(i) (7, – 24) (ii) (3, – 4) (iii) (a + b, a – b)

2. **निम्न बिन्दुद्वय के बीच की दूरी ज्ञात करें ।**
(i) (5, 7) और (8, 3) (ii) (7, 0) और (2, – 12) (iii) $(-\frac{3}{2}, 0)$ और (0, –2)
(iv) (3, 6) और (– 2, – 6) (v) (1, – 3) और (8, 3) (vi) (5, 7) और (8, 3)

3. प्रमाणित करें कि (– 2, – 11) बिन्दु (–3, 7) और (4, 6) बिन्दुओं से समान-समान दूरी पर है।

4. गणना कर देखें कि (7, 9), (3, – 7) और (–3, 3) बिन्दु समकोण त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु है।

5. **प्रमाणित करे कि निम्न बिन्दु समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु हैं।**
(i) (1, 4), (4, 1) और (8, 8) (ii) (– 2, – 2), (2, 2) और (4, – 4)

6. प्रमाणित करें कि A (3, 3), B (8, – 2) और C (– 2, – 2) तीन बिन्दु एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु है। इस त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा (कर्ण) की लम्बाई बतायें।

7. गणना कर दिखायें कि (2, 1), (0, 0), (– 1, 2) और (1, 3) बिन्दु एक वर्ग क्षेत्र के चार शीर्ष बिन्दु हैं।

8. बताये कि y के किस मान के लिये (2, y) और (10, –9) बिन्दुओं के बीच की दूरी 10 इकाई होगी ?

9. x अक्ष पर एक सेष बिन्दु बताये जिसकी दूरी (3, 5) और (1, 3) बिन्दुओं से एक समान हो।

> संकेत : x अक्ष पर अभीष्ट बिन्दु (x, 0)
> $(x-3)^2 + (0-5)^2 = (x-1)^2 + (0-3)^2$

10. O (0, 0), A (4, 3) और B (8, 6) तीन बिन्दु समरेखीय है कि नहीं गणना करें।

> संकेत : OA + AB = OB होने पर समरेखीय होगे।

11. दिखायें कि (2, 2), (–2, –2) और $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ तीनो बिन्दु एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु है।

12. दिखायें कि (– 7, 2), (19, 18), (15, – 6) और (– 11, – 12) बिन्दुओं को मिलाने से एक समानान्तर चतुर्भुज बनता है।

13. दिखायें कि (2, – 2), (8, 4), (5, 7) और (– 1, 1) बिन्दु एक आयत के शीर्ष बिन्दु है।

14. दिखायें कि (2, 5) , (5, 9), (9, 12) और (6, 8) बिन्दुओं को मिलाने से रोम्बस बनता है।

15. **बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.) :**

(i) (a + b, c –d) और (a – b, c + d) बिन्दुओं के बीच की दूरी है
(a) $2\sqrt{a^2 + c^2}$ (b) $2\sqrt{b^2 + d^2}$ (c) $\sqrt{a^2 + c^2}$ (d) $\sqrt{b^2 + d^2}$

(ii) (x, –7) और (3, –3) बिन्दुओं के बीच की दूरी 5 इकाई हो तो x का मान है
(a) 0 अथवा 6 (b) 2 अथवा 3 (c) 5 या 1 (d) –6 या 0

(iii) यदि (x, 4) बिन्दु की मूल बिन्दु से दूरी 5 इकाई हो तो x का मान है

(a) ± 4 (b) ± 5 (c) ± 3 (d) कोई भी नहीं

(iv) (3, 0), (–3, 0) और (0, 3) बिन्दुओं को मिलाने से बना त्रिभुज है

(a) समबाहु (b) समद्विबाहु (c) विषमबाहु (d) समकोणीय समद्विबाहु

(v) एक वृत्त के केन्द्र का स्थानांक (0,0) है और वृत की परिधि पर स्थित एक बिन्दु का स्थानांक (3, 4) हो तो वृत के अर्द्धव्यास की लम्बाई है

(a) 5 इकाई (b) 4 इकाई (c) 3 इकाई (d) कोई भी नहीं

16. संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न :

(i) मूलबिन्दु से (– 4, y) बिन्दु की दूरी 5 इकाई हो तो y का मान क्या होगा ?

(ii) y अक्ष पर स्थित एक बिन्दु का स्थानांक लिखें जिससे (2,3) और (– 1, 2) दोनों बिन्दु समान - समान दूरी पर हो।

(iii) x अक्ष और y अक्ष पर दो बिन्दुओ के स्थानांक लिखे ताकि x अक्ष y अक्ष और इन दौ बिन्दुओ को मिलाने से बनी रेखा-खण्ड से बना त्रिभुज समकोणीय समद्विबाहु त्रिभुज हो।

(iv) x अक्ष की विपरीत दिशा में दो बिन्दुओ के स्थानांक लिखे जिनकी दूरी x अक्ष से समान-समान हो।

(v) y अक्ष के विपरीत दो बिन्दुओ के स्थानांक लिखें जिसकी दूरी y-अक्ष से समान-समान हो।

5 सरल युगपत समीकरण (दो चलराशि युक्त)
(LINEAR SIMULTANEOUS EQUATIONS)

हमारे गाँव में एक ग्रंथागार बनाया जा रहा है। प्रत्येक ग्रामवासी अपनी क्षमता के अनुसार धन अथवा श्रम देकर सहायता दे रहा है। हम और हमारे भाई ने 140 रु० इकट्ठा किया है। हमने इकट्ठा किया हुआ सारा पैसा ग्रंथागार के बनने के लिए दान दे दिया (भाई ने गणना करके देखा कि हमलोगों के दिये हुए दान में (140 रू० में) केवल 10 रू० और 5 रू० की 20 नोट थी।

1 गणना करके देखें कि हमारे दिये गये 140 रुपये में कितनी 10 रु० की नोट और कितनी 5 रु० की नोट थी।

पहले युगपत समीकरण बनाते हैं।

माना कि 140 रु० में 10 रु० की नोटों की संख्या x है और 5 रु० के नोटो की संख्या y है।

∴ नोटों की कुल संख्या $(x + y)$ है।

∴ कुल घन का मान $(10x + 5y)$ रू० है।

शर्तानुसार $x + y = 20$ .... (i)

और $10x + 5y = 140$ .... (ii)

(i) और (ii) न० समीकरण युगपत समीकरण है।

यहाँ दो दो चलराशियुत्क एक घातीय समीकरण अथवा सरल युगपत समीकरण पाते है।

इन समीकरणों का लेखाचित्र अंकन करते है।

$x + y = 20$

$\therefore y = 20 - x$

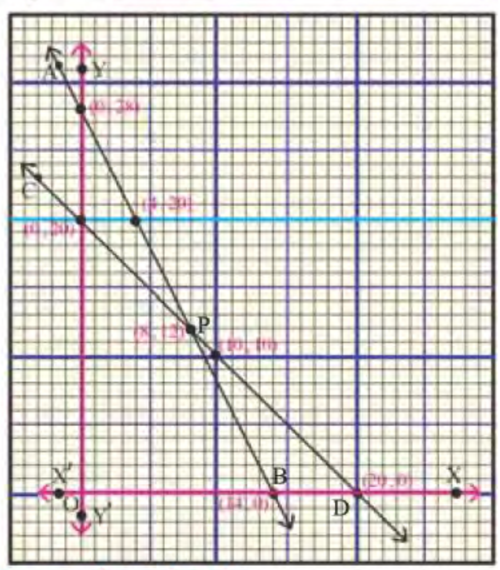
x	0	20	10
y = 20 – x	20		

$10x + 5y = 140$

वा, $5y = 140 - 10x$

$\therefore y = \frac{140 - 10x}{5}$

x	0	14	4
$y = \frac{140 - 10x}{5}$	28		20



समीकरण न० (i) $x + y = 20$ का लेखाचित्र $\overleftrightarrow{AB}$ सरलरेखा और समीकरण न० (ii) $10x + 5y = 140$ का लेखाचित्र $\overleftrightarrow{CD}$ सरलरेखा मिलीं। $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ एक दूसरे को बिन्दु P पर काटती है।

P बिन्दु का स्थानांक (8,12) है।

∴ लेखाचित्र से हम पाते है दो चलराशियुक्त एक घातीय समीकरणों स० (i) और स० (ii) का समाधान :

$x = 8$ और $y = 12$ है।

समीकरण संख्या (i) और (ii) में $x = 8$ और $y = 12$ रखकर जाँचने है।

$x + y = 8 + 12 = 20$

$10x + 5y = 10 \times 8 + 5 \times 12$

$= 80 + 60 = \square$

∴ हमलोगों द्वारा दिये गये 140 रु० में 10 रु० की 8 नोट और 5 रु० की 12 नोट थी।

इस दशा में समीकरण संख्या (i) तथा (ii) का एकमात्र समाधान मिला।

2 हमारे मित्र इरफान ने 28 रु० में 2 आलपिनों की पैकेट और 3 कलमें खरीदकर ग्रंथागार में दिया। सोफिया नेभी ग्रंथागार में 56 रु० में समान मूल्यवाली 4 पैकेट आलपिन और 6 कलम खरीद कर दिया।

देखें युगपत समीकरण बनाकर। आलपिनों री पैकेट और 1 और 1 कलम का मूल्य निकल सकते है कि नहीं।

माना कि आलपिनों की 1 पैकेट का मूल्य x रु० और 1 कलम का मूल्य y रु० है।

∴ अभीष्ट समीकरण है, $2x + 3y = 28$ .... (iii)

$4x + 6y = 56$ ....(iv)

(iii) और (iv) न० दो दो चलराशियुत्त्क एक घातीय सरल समीकरण मिले। अब इन समीकरणों के लेखाचित्र अंकित करके इनका कटान बिन्दु खोजें और समाधान करें।

$2x + 3y = 28$

$\therefore y = \frac{28 - 2x}{3}$

x	14	2	5
$y = \frac{28 - 2x}{3}$			6

$4x + 6y = 56$

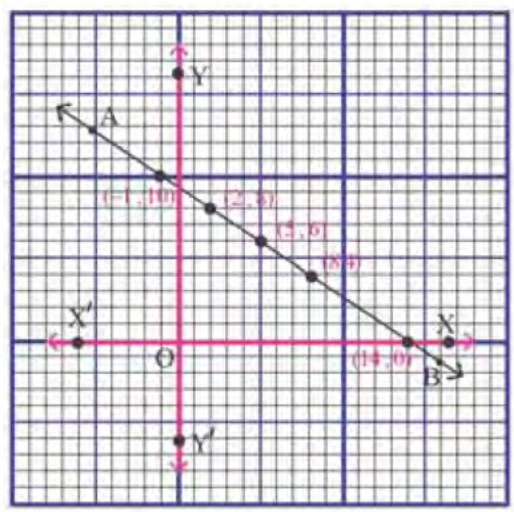
$\therefore y = \frac{56 - 4x}{6}$

x	14	8	−1
$y = \frac{56 - 4x}{6}$			10

देखते है (iii) नं० और (iv) नं० दो समीकरणों के लेखाचित्र दो सरलरेखायें $\overleftrightarrow{AB}$ पर ही पड़ती है।

∴ $\overleftrightarrow{AB}$ सरलरेखा पर का प्रत्येक विन्दु ही (iii) नं० और (iv) नं० समीकरणों के लेखाचित्र पर है।

अथर्ति (2,8), (5,6), (8,4), (14,0), ... $\overleftrightarrow{AB}$ सरलरेखा प्रत्येक विन्दु ही (iii) न० और (iv) न० समीकरणों के लेखाचित्र पर उपस्थित है।



अर्थात, $x = 2, y = 8$, $x = 5, y = 6$, $x = 8, y = 4$,
$x = 14, y=0$, ...

अत: प्रत्येक स्थानांक ही (iii) न० और (iv) न० समीकरण का समाधान है।

हम (iii) न० और (iv) न० समीकरणों में

$\boxed{x = 2, y = 8}$, $\boxed{x = 5, y = 6}$

रखकर देखते है।

$2x + 3y = 2 \times 2 + 3 \times 8 = 4 + 24 = 28$

$4x + 6y = 4\times2 + 6\times8 = 8 + 48 = \square$

समझे, 1 आलपिन के पैकेट का मूल्य 2 रु हो तो 1 कलम का मूल्य 8 रु० होगा। फिर 1 आलपिनके पैकेट का मूल्य 5 रु० हो तो 1 कलम का मूल्य 6 रु० होगा।

अत: इस दशा में हम (iii) न० और (iv) न० दोनों समीकरणों का ☐ (एकमात्र / असंख्य) समाधान पाते है।

दूसरे प्रकार से कया पाते है देखे

$4x + 6y = 56$

या, $2(2x + 3y) = 2 \times 28$

$\therefore 2x + 3y = 28$

(iv) न० समीकरण से (iii) न० समीकरण पाया। अर्थात् दोनों समीकरण एक ही समीकरण है।

3 इरफान ने 28 रु० में 2 पैकेट आलपिन और 3 कलमें खरीदा। सुजाता नें भी उसी दुकान से एक ही मूल्य में 2 पैकेट आलपिन और 3 कलमें खरीदा। किन्तु सुजाता ने 24 रु० दिया।

इस अवस्था में समीकरण बनाकर पाते है,

$2x + 3y = 24$ .... (v)

(v) नं० समीकरण से (iii) न० समीकरण पाया। अर्थात् दोनों समीकरण एक ही समीकरण है।

लेखाचित्र की सहायता से (iii) नं० और (v) नं० समीकरणों की हल करने का प्रयास करते है।

$2x + 3y = 28$ .... (iii)

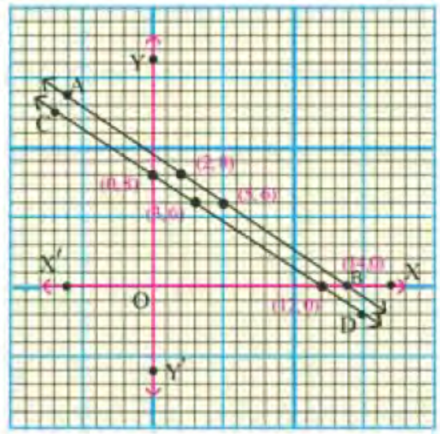
वा, $y = \dfrac{28 - 2x}{3}$

x	14	2	5
$y = \dfrac{28-2x}{3}$	0	8	6

$2x + 3y = 24$ .... (v)

वा, $y = \dfrac{24 - 2x}{3}$

x	0	12	3
$y = \dfrac{24-2x}{3}$			6



(iii) न० और (v) न० समीकरणों का लेखाचित्र क्रमश: दो सरलरेखाये $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ पाया जो ☐ [एक दूसरे को काटती है/समानान्तर] है। अर्थात $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ सरलरेखाओं का कोई कटान बिन्दु नहीं है। अत: ऐसा कोई बिन्दु नही है जो $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दोनो रेखाओं पर स्थित हो।

∴ (iii) नं० और (v) नं० दो चलराशियुक्त एक घातीय दोनो समीकरणों का कोई (उभयनिष्ट) साधारण समाधान नहीं अर्थात इस दशा में। पैकेट आलपिन और 1 कलम का मूल्य नहीं मिला।

हल करें — 5.1

निम्न कथनों से युगपत समीकरण का गठन कर इन्हे हल करने का प्रयास करें।

1. हमारी बहन और हमारे पिता की वर्तमान उम्रों का योग 55 वर्ष है। 16 वर्ष बाद हमारे पिता की उम्र बहन री उम्र की दो गुनी ही जायेगी।
   (a) युगपत समीकरण का गठन करके लेखाचित्र अंकित करें।
   (b) लेखाचित्र की सहायता से युगपत समीकरणों का हल मिलता है कि नहीं।
   (c) लेखाचित्र से हमारी बहन और पिता की उम्र लिखें।
2. मीता ने यादव काका की दुकान से 42 रु० में 3 कलम और 4 पैसिल खरीदा। मैनें भी मित्रों को उपहार देने के लिये यादव काका की दुकान से समान मूल्य की 9 कलम और 1 दर्जन पैसिल 126 रू० में खरीदा।
   (a) युगपत समीकरण का गठन कर लेखाचित्र अंकित करें।
   (b) लेखाचित्र की सहायता से इन दोनों समीकरणों का उभयनिष्ठ समाधान मिलनाई या नहीं।
   (c) 1 पेन और 1 पैसिल का अलग अलग मूल्य क्या होगा–लेखाचित्र से मिलता है या नहीं।
3. आज विद्यालय में अपने अनुसार चित्रकारी करनी है। इस लिये मैनें 2 आर्ट पेपर और 5 स्केचपेन 16 रू० में खरीदा। किन्तु दोला ने उसी दुकान से एक ही मूल्य 4 आर्ट पेपर और 10 स्केचपेन 28 रू० में खरीदा।
   (a) युगपत समीकरण का गठन कर लेखाचित्र अंकित करें।
   (b) लेखाचित्र से दोनो समीकरणों का उभयनिष्ठ समाधान मिला कि नहीं देखें।
   (c) 1 आर्ट पेपर और 1 स्केच पेन का मूल्य मिलता है कि नहीं देखें।

दो चलराशियुक्त एक घातीय दो समीकरणों को लेखाचित्र की सहायता से हल करने के लिये शर्त्तें क्या है — लिखते है।
दो चलराशियुक्त एक घातीय दो समीकरणों के हल के लिये निम्न शर्त्तें मिली है :

(i) जब दो सरलरेखायें एक दूसरे को एक बिन्दु पर काटती है तब दो समीकरणों का समाधान (हल) किया जाता है और मात्र एक हल पाया जाता है।
(ii) जब दो सरल रेखाये एक दूसरे पर संपातित होती है अर्थात मात्र एक सरल रेखा पाया जाती है तब समीकरणों के असंख्य हल होते है।
(iii) जब दो सरलरेखाये असंपातित हो किन्तु परस्पर समानान्तर हो तब दोनों समीकरणों का कोई हल नहीं पाया जाता है।

दो चलराशियुक्त एक घातीय दो समीकरणों साधारणत: समाधान योग्य कब कही जायेगे।
(i) न० और (ii) न० देशा में अर्थात् दो चलराशियुक्त एकधातीय दो समीकरणों को हल किया जाता है और उनका एकमात्र हल अथबा असंख्य साधारण हल पाये जाते है तब उन्हें समाधान योग्य कहा जाता है। फिर (iii) न० की दशा में अर्थात् दो चलराशियुक्त एकघातीय दो समीकरणों का उभयनिष्ठ हल नही मिलता तब बे समाधान योग्य नहीं होते हैं।

समझा है, $\left.\begin{aligned} x + y &= 20 \\ 10x + 5y &= 140 \end{aligned}\right\}$ ⟶ समाधान योग्य है और इनका एक हल ही मिलता है।

$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 28 \\ 4x + 6y &= 56 \end{aligned}\right\}$ ⟶ समाधान योग्य है और असंख्य हल मिलते है।

$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 28 \\ 2x + 3y &= 24 \end{aligned}\right\}$ ⟶ उभयनिष्ठ हल नहीं है (समाधान योग्य नहीं है)।

4 इन दो चलराशियुत्त्क एक घातीय सभी करणों के एक एक चलराशि के अंक गुणाकों से अनुपात कि कालते है और अंक संबंध देखते है।

$x + y = 20$..............(i)
$10x + 5y = 140$................(ii)

(i) न० और (ii) न० समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखते है जहाँ a,b,c वास्तविक संख्या।
[पहले समीकरण में a_1, b_1, c_1 और दूसरे समीकरण में a_2, b_2, c_2 का व्यवहार करते है।]

$x + y = 20$
$\therefore x + y - 20 = 0$
या, $1 \times x + 1 \times y + (-20) = 0$ —— (i)

$10x + 5y = 140$
या, $10 \times x + 5 \times y - 140 = 0$ —— (ii)

(i) न० $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ समीकरण और (ii) न० $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ समीकरण के $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ के मानों की तुलना करके पाते है —

$a_1 = \boxed{1}$, $b_1 = \boxed{1}$, $c_1 = \boxed{-20}$ $\qquad$ $a_2 = \boxed{}$, $b_2 = \boxed{}$, $c_2 = \boxed{}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{10}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{5},$ $\qquad$ $\boxed{\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$

हमने जिन दो चलराशियों युक्त एक घातीय युगपत समीकरणों का लेखाचित्र खीचा है उनकी $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ के जानो की तुलना करते है।

पहले समीकरण का रूप $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, दूसरे समीकरण का रूप $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

	दो चलराशियुत्त्क एकघातीय समीकरण	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपाती की तुलना	लेखचित्र से पाया	बीजगाणितीय सिद्धान्त
1.	$x + y = 20$ $10x + 5y = 140$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-20}{-140}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	परस्पर एक दूसरे को काटने वाली रेखायें	एकमात्र निश्चित हल
2.	$2x + 3y = 28$ $4x + 6y = 56$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{28}{56}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	एक सरलरेखा	असंख्य साधारण हल
3.	$2x + 3y = 28$ $2x + 3y = 24$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	दो परस्पर समानान्तर सरल रेखा में	कोई उभयनिष्ठ हल नहीं
4.	$4x + 3y = 20$ $\frac{3x}{4} - \frac{y}{8} = 1$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{a_1}{a_2} \square \frac{b_1}{b_2} \square \frac{c_1}{c_2}$		
5.	$2x - 3y = 8$ $6x - 9y = 24$				स्वयं लिखें		
6.	$3x + 4y = 12$ $3x + 4y = 24$				स्वयं लिखें		

5 निम्न दो चलराशियुक्त एक धातीय समीकरणद्वय के गुणांक के अनुपात देखकर बनायें कि इनका उभयनिष्ठ हल है या नहीं और बाद में लेखाचित्र खींच कर इसे जाँचे।

a) $4x + 5y = 9$, $8x + 10y = 86$

b) $x + y = 2$, $15x + 15y = 30$

c) $4x - y = 5$, $7x - 4y = 2$

d) $5x - 2y = -4$, $-11x + 7y = 1$

e) $x + 2y = 3$, $7x + 14y = 28$

f) $8x + 5y - 11 = 0$, $40x + 25y - 55 = 0$

a) $4x + 5y = 9$ और $8x + 10y = 86$ समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखकर एक चलराशि के गुणाकों और स्थिरांकों के बीच सम्बन्ध देखते है (a,b,c स्थिरांक है a और b और एक साथ शून्य नही है) और प्रत्येक जो हे हल योग्य है कि नही देखते है।

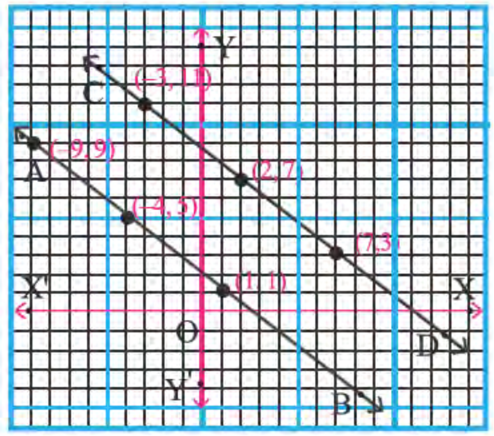
$$4x + 5y - 9 = 0 \text{ —— (i)}$$

$$8x + 10y - 86 = 0 \text{ —— (ii)}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{5}{10} \neq \frac{-9}{-86}$$

(i) न० और (ii) न० समीकरणद्वय सामान्य समाधान योग्य नहीं है।

अब हम (i) न० और (ii) न० समीकरणों के लेखाचित्र खीचते है।



$4x + 5y = 9$ —— (i)

या, $y = \frac{9-4x}{5}$

x	1	-4	-9
$y = \frac{9-4x}{5}$	☐	☐	9

$8x + 10y = 86$ —— (ii)

या, $y = \frac{86-8x}{10}$

x	2	-3	7
$y = \frac{86-8x}{10}$	☐	☐	3

देखते है (i) न० और (ii) न० समीकरणों के लेखाचित्र क्रमशः $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ परस्पर समानान्तर सरल रेखाई है।

∴ लेखाचित्र से पाते है,

(i) न० और (ii) न० समीकरणों का लेखाचित्र अंकित करते है।

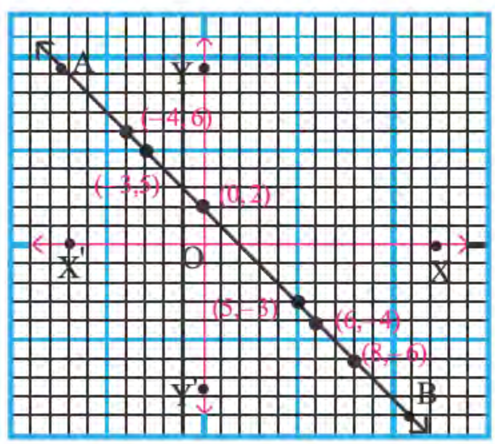
(b) $x + y - 2 = 0$ —— (i)

$15x + 15y - 30 = 0$ —— (ii)

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{15} = \frac{-2}{-30}$$

∴ उपर के गुणांको के अनुपातीं से पाते है कि (i) न० और (ii) न० समीकरणद्वय उभयनिष्ठ हल है किन्तु असंख्य हल है।

हम (i) न० और (ii) न० समीकरणों का लेखाचित्र अंकित करते है।



$x + y = 2$

∴ $y = 2 - x$

x	0	5	–3
$y = 2 - x$	☐	☐	5

$15x + 15y = 30$

∴ $y = \frac{30-15x}{15}$

x	6	-4	8
$y = \frac{30-15x}{15}$	☐	6	☐

देखते है कि (i) न० और (ii) न० समीकरणों के लेखाचित्र को दो सरलरेखायें एक दूसरे पर संपातित होकर एक सरलरेखा $\overleftrightarrow{AB}$ बन गयी है।

∴ लेखाचित्र से मिलता है कि (i) न० और (ii) न० समीकरणद्वय समाधानयोग्य है और इनके असंख्य हल है।

(c) $4x - y - 5 = 0$ —— (i) $\qquad \frac{4}{7} \neq \frac{-1}{-4}$

$7x - 4y - 2 = 0$ —— (ii)

∴ (i) न० और (ii) न० समीकरण द्वय समाधान योग्य है और इनका केवल एक हल है।

हम (i) न० और (ii) न० समीकरणों के लेखाचित्र अंकित करके देखते है।

$4x - y - 5 = 0$ —— (i)

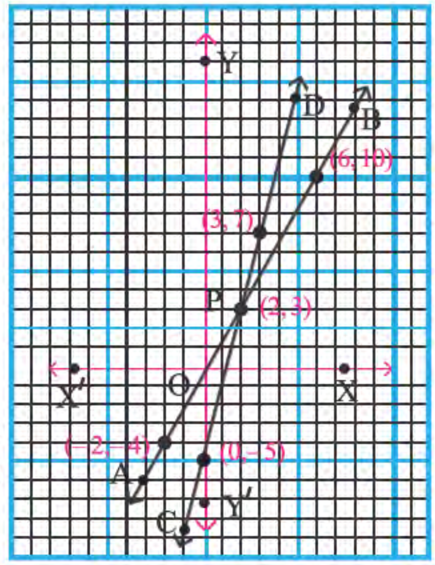
$\therefore x = \frac{y+5}{4}$

$x = \frac{y+5}{4}$			0
y	3	7	–5

$7x - 4y - 2 = 0$ —— (ii)

$\therefore x = \frac{4y+2}{7}$

$x = \frac{4y+2}{7}$		–2	
y	3	–4	10



लेखाचित्र से पाते है कि (i) न० और (ii) न० समीकरणद्वय उभयनिष्ठ समाधान योग्य है और एकदूसरे को मात्र एक विन्दु P पर काटते है जिसका स्थानांक (2,3) है।

∴ (i) न० और (ii) न० समीकरणों का एकमात्र हल $x = 2, y = 3$ है।

(d), (e), (f) की समाधान योग्यता की जाँच स्वयं करें।

6 निम्न समीकरणों का विना लेखाचित्र अंकित किये केवल एक एक चलराशियों के गुणांकों और स्थिरांकों के अनुपात जात करें और तब बतायें कि इनके लेखाचित्र समानान्तर, परस्पर काटने वाले या एक दूसरे पर संपाती है।

(a) $3x + 9y + 12 = 0$
$x + 3y + 4 = 0$

(b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 23$
$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 22$

(c) $4x + 3y = 20$
$16x + 12y = 10$

(a) $3x + 9y + 12 = 0$ —— (i)
$x + 3y + 4 = 0$ —— (ii)

$$\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}$$

∴ (i) न० और (ii) दो चलराशियुक्त एकघातीय समीकरणों के लेखाचित्र एक दूसरे पर संपातित होगे और एक ही सरल रेखा मे होंगे।

(c) -এর ক্ষেত্রেএকইভাবে আমি নিজে করি।

(b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 23$ —— (i)
$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 22$ —— (ii)

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} \neq \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}$$

∴ (i) न० और (ii) न० समीकरणद्वय के लेखाचित्र एक दूसरे की परस्पर काटते है।

7 p के किस मान के लिये $3x - 4y = 1$ और $9x + py = 2$ का एकमात्र हल होगा ?

$$3x - 4y = 1 \text{ ———— } (i)$$
$$9x + py = 2 \text{ ———— } (ii)$$

(i) न० $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ समीकरण और (ii) न० $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ समीकरण में $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ व $\frac{c_1}{c_2}$ के मानों की तूलना करके पाते है।

$$a_1 = 3, b_1 = -4 \text{ और } c_1 = -1$$
$$a_2 = 9, b_2 = p \text{ और } c_2 = -2$$

(i) न० और (ii) न० समीकरणों का समाधान नही होगा यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ हो।

$$\therefore \frac{3}{9} = \frac{-4}{p} \quad \text{या, } 3p = -12 \quad \therefore p = -4$$

∴ p के मान — 12 को छोड़कर सभी मानों के लिये (i) न० और (ii) न० समीकरणों का एकमात्र हल मिलेगा।

8 r के किस मान के लिये $rx + 2y = 5$ और $(r + 1)x + 3y = 2$ समीकरणद्वय का कोई हल नहीं पाया जा सकता — देखें।

$$rx + 2y = 5 \text{ ———— } (i)$$
$$(r+1)x + 3y = 2 \text{ ———— } (ii)$$

(i) न० और (ii) न० समीकरणों का कोई हल नहीं होगा यदि $\frac{r}{r+1} = \frac{2}{3}$ न० और $3r = 2r + 2 \quad \therefore r = 2$

∴ $r = 2$ होने पर (i) न० और (ii) न० समीकरणों का कोई हल नहीं होगा।

9 p के किस मान के लिये $px + 6y - p = 0$ और $(p - 1)x + 4y + (p - 5) = 0$ समीकरणों के एक से अधिक हल होगे — देखे।

$$px + 6y - p = 0 \text{ ———— } (i)$$
$$(p - 1)x + 4y + (p - 5) = 0 \text{ ———— } (ii)$$

(i) न० $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ समीकरण और (ii) न० $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ समीकरण के $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ मानों की तुलना करके पाते है।

$$a_1 = p, b_1 = 6, c_1 = -p \text{ और } a_2 = p - 1, b_2 = 4, \text{ और } c_2 = p - 1$$

(i) न० और (ii) न० समीकरणों के हल एक से अधिक होगे यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ होणा।

$$\therefore \frac{p}{p-1} = \frac{6}{4} = \frac{-p}{p-5}$$

$$\therefore \frac{p}{p-1} = \frac{3}{2}$$

या, $3p - 3 = 2p$

$\therefore p = 3$

फिर $\frac{3}{2} = \frac{-p}{p-5}$

या, $3p - 15 = -2p$

या, $5p = 15$

$\therefore p = 3$

पाते है, $p = 3$ हो तो (i) और (ii) न० समीकरणों के असंख्य हल होगे।

10 तीर्थ ने एक दो चलराशियुक्त एकघातीय समीकरण $2x + y = 6$ लिखा। हम भी एक दो चलराशियुत्त्क एकघातीय सरल समीकरण लिखें ताकि दोनों समीकरणों के लेखाचित्र (a) समानान्तर हो (b) परस्पर काटने वाले हो तथा (c) परस्पर संपाती हो।

(a) $2x + y = 6$ —— (i)

(i) न० समीकरण के लेखाचित्र के समानान्तर लेखाचित्र वाले एक समीकरण है,

$4x + 2y = 10$ [जैसा कि, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{6}{10}$]

(b) $2x + y = 6$ समीकरण के लेखाचित्र को परस्पर काटने वाली सरलरेखा का समीकरण है,

$3x + 2y = 6$ [जैसा कि, $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$]

(c) $2x + y = 6$ समीकरण के लेखाचित्र को संपातित करनेवाली सरलरेखा का समीकरण है,

$12x + 6y = 36$ [जैसा कि, $\frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$]

हल करें - 5.2

1. निम्न समीकरणों के लेखाचित्र अंकित करके देखें कि ये समाधान योग्य है कि नहीं। समाधान योग्य हो तो समाधान (हल) अथवा असंख्य समाधान वाले हो तो तीन समाधान लिखें।

(a) $2x + 3y - 7 = 0$, $3x + 2y - 8 = 0$ (b) $4x - y = 11$, $-8x + 2y = -22$ (c) $7x + 3y = 42$, $21x + 9y = 42$ (d) $5x + y = 13$, $5x + 5y = 12$

2. निम्न युगल समीकरणों के एक-एक सहश चलराशियों के गुणांकों तथा स्थिरांकों के अनुपाती के बीच सम्बन्ध ज्ञात करें और बनायें कि ये समीकरण समाधानयोग्य है कि नहीं लिखें और इनके लेखाचित्र अंकित कर जाँये।

(a) $x + 5y = 7$, $x + 5y = 20$ (b) $2x + y = 8$, $2y - 3x = -5$ (c) $5x + 8y = 14$, $15x + 24y = 42$ (d) $3x + 2y = 6$, $12x + 8y = 24$

3. निम्न युगल समीकरणों के सदृश्य चलराशियों के गुणांकों और स्थिरांको के अनुपात ज्ञात कर बनायें कि इनके लेखाचित्र परस्पर समानान्तर या परस्पर काटने वाले या संपाती है।

a) $5x + 3y = 11$, $2x - 7y = -12$ (b) $6x - 8y = 2$, $3x - 4y = 1$ (c) $8x - 7y = 0$, $8x - 7y = 56$ (d) $4x - 3y = 6$, $4y - 5x = -7$

4. निम्न युगल समीकरणों में से जो समाधानयोग्य है उनके लेखाचित्र अंकित कर समाधान करें और असंख्य समाधान मिलने की दशा में तीन समाधान लिखें।

a) $4x + 3y = 20$, $8x + 6y = 40$ (b) $4x + 3y = 20$, $12x + 9y = 20$ (c) $4x + 3y = 20$, $\frac{3x}{4} - \frac{y}{8} = 1$

d) $p - q = 3$, $\frac{p}{3} + \frac{q}{2} = 6$ (e) $p - q = 3$, $\frac{p}{5} - \frac{q}{5} = 3$ (f) $p - q = 3$, $8p - 8q = 5$

5. तथागत ने एक दो चलराशियुक्त एकघातीय समीकरण $x + y = 5$ लिखा। हम एक दो चलराशियुक्त एकघातीय समीकरण लिखें ता कि दोनों समीकरणों के लेखाचित्र।

(a) परस्पर समानान्तर हो। (b) परस्पर एक दूसरे को काटने वाले हो। (c) परस्पर संपाती हों।

प्रत्येक बर्ष आषाढ़ महीने में हमारे विद्यालय के सामने स्थित मैंदान में एक मेला लगता है। तीन दिनों तक यह मेला रहता है। इस वर्ष इस्से मित्रों के साथ छुट्टी के बाद मेले में जाकर कुछ पौधों के चारा (बीज) खरीदे।

11 सायन ने 42 रुपये में 6 बेली का फूल का चारा खरीदा। 1 बेली के फूल के चारे का दाम निकालते है।

माना कि 1 बेली के फूल के चारे का मूल्य x रु० है।

शर्तानुसार, $6x = 42$ —— (i)

$\therefore x = \square$

$\therefore$ 1 बेली के फूल के चारे का मूल्य 7 रु० है।

(i) न० और समीकरणटि एक चलराशियुक्त एकघातीय समीकरण है।

12 मैंने19 रु० में 1 चंद्रमल्लिका फूल का चारा और 2 गेंदो फूल का चारा खरीदा। किन्तु बुलू ने 24 रु० में एक ही दर से 1 चंद्रमल्लिका फूल का चारा और 3 गेंदा फूल का चारा खरीदा। अब युगपत समीकरण की रचना कर 1 चंद्रमल्लिका फूल के चारे और 1 गेदा फूल के चारे का मूल्य ज्ञात कर लिखते हैं।

माना कि 1 चंद्रमल्लिका फूल के चारे का मूल्य x रु० और

1 गेंदा फूल के चारे का मूल्य y रू० है।

$\therefore$ युगपत समीकरण है, $x + 2y = 19$ —— (ii)

$x + 3y = 24$ —— (iii)

पाता है (ii) न० और (iii) न० समीकरण दो चलराशियुक्त एकघातीय समीकरण है।

(i) न० एक चलराशियुक्त एकघातीय समीकरण का वहुत ही सहजता से उत्तर मिल जाता है किन्तु (ii) न० और (iii) न० समीकरणद्वय के लेखाचित्र अंकित किये बिना किस तरह हल निकाले जाते है — देखे।

(ii) न० —(iii) न० से पाते है

$(x + 2y) - (x + 3y) = 19 - 24$

या, $\cancel{x} + 2y - \cancel{x} - 3y = -5$

या, $-y = -5$

$\therefore y = 5$

दूसरे प्रकार से,
$$\begin{array}{r} \cancel{x} + 2y = 19 \\ \cancel{x} + 3y = 24 \\ - \quad - \quad\;\; - \\ \hline \end{array}$$

घटाने पर पाते है, $-y = -5$

$\therefore y = 5$

(ii) न० समीकरण से पाते है $x + 2y = 19$

या, $x + 2 \times 5 = 19$

या, $x = 19 - 10 = 9$

$\therefore x = 9$

अभीष्ठ हल, $x = 9$

$y = 5$

(i) न० समीकरण और (ii) न० समीकरण के लेखाचित्र अंकित कर पाते है कि $x = 9$ और $y = 5$ मिलता है [स्वंय करें]

$\therefore$ 1 चंद्रमल्लिका फूल के चारे का मूल्य 9 रु० और 1 गेंदा-फूल के चारे का मूल्य 5 रु० है।

(i) न० और (ii) न० समीकरणों में $x = 9$ और $y = 5$ रखकर पाते है

$9 + 2 \times 5 = 19$ और $9 + 3 \times 5 = \square$

$x = 9$ और $y = 5$ मान समीकरण सं० (ii) और (iii) को संयुक्त करते है।

दो चलराशियुक्त एकघातीय दो समीकरणों के एक चलराशि को विलुप्त करके दूसरे चलराशियुत्त्क एकघातीय समीकरण में बदलकर हल करने की पद्धति का क्या नाम है।

दो चलराशियुत्त्क एकघातीय दो समीकरणों को हल करने की इस पद्धति नाम विलोयन विद्यि है।

13 $3x + 4y = 17$ और $4x - 3y = 6$ की विलीयन विद्यि से हल करते है और लेखा चित्र की सहायता से समाधान कर पुष्टि करते है।

$$3x + 4y = 17 \text{ —— (i)}$$
$$4x - 3y = 6 \text{ —— (ii)}$$

पहले (i) न० और (ii) न० समीकरण से x की विलुप्त करते है।

$\therefore$ (i) न० $\times 4$ – (ii) न० $\times 3$ से हम पाते है

$$\begin{array}{r} 12x + 16y = 68 \\ \underset{-}{12x} \underset{+}{-} 9y = \underset{-}{18} \\ \hline \end{array}$$

घटानेपर पाते है, $25y = 50$

$\therefore y = 2$

(i) न० से पाते है, $3x + 4 \times 2 = 17$

या, $3x = 17 - 8 = 9$

$\therefore x = \square$

$\therefore$ विलोयन विद्यि से हल करके (i) न० और (ii) न० समीकरणों का हल मिलता है $x = 3$ और $y = 2$.

अव (i) न० और (ii) न० समीकरणों के लेखाचित्र अंकित करके समाधान करने पर मिलता है $x = 3$ और $y = 2$ [स्वंय करें]

(i) न० और (ii) न० समीकरणों में $x = 3$ और $y = 2$ रखकर पाते है

$3 \times 3 + 4 \times 2 = \square$ और $4 \times 3 - 3 \times 2 = \square$

$\therefore$ $x = 3$ और $y = 2$ (i) न० और (ii) न० समीकरण को संतुष्ट करते है।

14 निम्न दो चलराशि युक्त समीकरणों का निलोपन विधि से हल करें और-प्राप्त चलराशियों को मान समीकरणों में रखकर जाँचे कि थे समीकरण को संतुष्ट करते हैं या नहीं।

(a) $3x - \frac{2}{y} = 5$
$x + \frac{4}{y} = 4$

(b) $(2x + 3y - 5)^2 + (3x + 2y - 5)^2 = 0$

(c) $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 1$
$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$

(d) $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

(a) $3x - \frac{2}{y} = 5$ ______ (i)
$x + \frac{4}{y} = 4$ ______ (ii)

चलराशि y को विलुप्त करने के लिये (i) न० समीकरण में २ से और (ii) न० समीकरण में से गुप्त करते हैं।

$6x - \frac{4}{y} = 10$
$x + \frac{4}{y} = 4$

जोड़ने पर पाते हैं। $7x = 14$
$\therefore x = \square$

(i) न० समीकरण में x =2 रखने पर पाते हैं

$3\times2 - \frac{2}{y} = 5$

या, $-\frac{2}{y} = 5 - 6 = -1$

या, $\frac{2}{y} = 1$

$\therefore$ y = 2 अभीष्ट हल x = 2
y = 2

$3x - \frac{2}{y}$ $= 3 \times 2 - \frac{2}{2}$ $= \square$	$x + \frac{4}{y}$ $= 2 + \frac{4}{2}$ $= \square$

$\therefore$ x =2 और y = 2 (i)न० और (ii) न० समीकरणों को संतुष्ट करते हैं।

(b) $(2x + 3y - 5)^2 + (3x + 2y - 5)^2 = 0$

किसी वास्तविक संख्या का वर्ग हमेशा घनात्मक होता है। दो धनात्मक वास्तविक संरण्या उतें के वर्गो का योग शून्य हो तो उनका मान अलग-अलग भी शून्य होता है।

$\therefore$ $2x + 3y - 5 = 0$ ______ (i)
$3x + 2y - 5 = 0$ ______ (ii)

(i) न० × 3 – (ii) न० × 2 से हम पाते हैं

$6x + 9y - 15 = 0$
$6x + 4y - 10 = 0$
$- \quad - \quad +$

धयने पर ह्रपाते हैं। $5y - 5 = 0$

या, $5y = 5 \therefore y = 1$

y प्रकामान (i) न० समीकरण मे रखने पर पाते हैं।

$2x + 3 \times 1 - 5 = 0$

या, $2x = 2 \therefore x = 1$
अत; अभीष्ट हल ; x = 1, y = 1

(c) $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=1$

या, $2\times(\frac{1}{x})+5\times(\frac{1}{y})=1$

माना कि $(\frac{1}{x})=p$ और $(\frac{1}{y})=q$

$\therefore\ x=\frac{1}{p}$ और $y=\frac{1}{q}$

$\therefore\ 2p+5q=1$ ——— (i)

फिर, $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}$

या, $3\times(\frac{1}{x})+2\times(\frac{1}{y})=\frac{19}{20}$

$\therefore\ 3p+2q=\frac{19}{20}$ ——— (ii)

चलराशि p को विलुप्त करने के लिये
3 × (1) न॰ – 2 × (ii) न॰ से पाते हैं

$$6p+15q=3$$
$$6p+4q=\frac{19}{10}$$
$$-\quad -\quad -$$
$$11q=3-\frac{19}{10}=\frac{11}{10}$$
$$\therefore\ q=\frac{1}{10}$$

समीकरण न॰ (i) $q=\frac{1}{10}$ रखने पर पाते हैं,

$2p+5q=1$

$\therefore\ 2\times p+5\times\frac{1}{10}=1$

या, $2p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ p=\frac{1}{4}$

$\therefore$ अभीष्ट डल, $x=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$ और $y=\frac{1}{q}=10$

एंव,

$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{2}{4}+\frac{5}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{4}+\frac{2}{10}=\square$

$\therefore$ x = 4, y = 10 (i) न॰ और (ii) न॰ समीकरणों को संतुष्ट करते हैं।

(d) $ax+by=c$ ——— (i)

$bx+ay=1+c$ ——— (ii)

(i) न॰ × b – (ii) न॰ × a से पाते हैं,

$$abx+b^2y=bc$$
$$abx+a^2y=a+ac$$
$$-\quad -\quad -\quad -$$

धटानेपर पाते हैं, $b^2y-a^2y=bc-a-ac$

या, $y(b^2-a^2)=bc-ac-a$

$\therefore\ y=\frac{bc-ac-a}{b^2-a^2}$

(i) न॰ समीकरण में प्रकामान रखनेपर पाते हैं

$$ax+\frac{b^2c-abc-ab}{b^2-a^2}=c$$

या, $ax=c-\frac{b^2c-abc-ab}{b^2-a^2}$

या, $ax=\frac{b^2c-a^2c-b^2c+abc+ab}{b^2-a^2}$

या, $x=\frac{a(bc-ac+b)}{a(b^2-a^2)}$

$\therefore\ x=\frac{bc-ac+b}{b^2-a^2}$

$\therefore$ अभीष्ट ढल $x=\frac{bc-ac+b}{b^2-a^2}$

$y=\frac{bc-ac-a}{b^2-a^2}$

हल करें - 5.3

1. निम्न दो चलराशियुक्त एक घातीय समकिरणो कां विलोपनविधि से से डलजात करें और लेखा चित्र की सहायता से इनका सत्यापन जाँचे:

   (a) $8x + 5y - 11 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$ (b) $2x + 3y - 7 = 0$, $3x + 2y - 8 = 0$

2. $7x - 5y + 2 = 0$ समीकरण में कितने से गुणा कर के $2x + 15y + 3 = 0$ समीकरण के साथ जोड़कर y कोविलुप्त किया जा सकता है ?

3. $4x - 3y = 16$ और $6x + 5y = 62$ दोनों समीकरणो में सबसे छोटी किस किस संख्या से गुणा करने परदोनों समीकरणों में x के गुणाक मान ओक समान किया जा सकता हैं ?

4. निम्न दो चलराशियुक्त समीकरणों का विलोपन विधि से हल करें।

(i) $3x + 2y = 6$, $2x - 3y = 17$ (ii) $2x + 3y = 32$, $11y - 9x = 3$ (iii) $x + y = 48$, $x + 4 = \frac{5}{2}(y + 4)$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 8$, $\frac{5x}{4} - 3y = -3$ (v) $3x - \frac{2}{y} = 5$, $x + \frac{4}{y} = 4$ (vi) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

(vii) $\frac{x+y}{2} + \frac{3x-5y}{4} = 2$, $\frac{x}{14} + \frac{y}{18} = 1$ (viii) $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5}$, $\frac{xy}{x-y} = \frac{1}{9}$ (ix) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 3$, $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 5$

(x) $\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$, $\frac{21}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 2$ (xi) $\frac{x+y}{5} - \frac{x-y}{4} = \frac{7}{20}$, $\frac{x+y}{3} - \frac{x-y}{2} + \frac{5}{6} = 0$ (xii) $x + y = a + b$, $ax - by = a^2 - b^2$

(xiii) $\frac{x+a}{a} = \frac{y+b}{b}$, $ax - by = a^2 - b^2$ (xiv) $ax + by = c$, $a^2x + b^2y = c^2$ (xv) $ax + by = 1$, $bx + ay = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} - 1$

(xvi) $(7x - y - 6)^2 + (14x + 2y - 16)^2 = 0$

15 सुमिताने बोर्ड पर $x + 2y = 19$ और $x + 3y = 24$ दो समीकरण लिखा।

$x + 2y = 19$ ———— (i)

$x + 3y = 24$ ———— (ii)

अब एक चलराशि को दूसरी चलराशि के रूप में प्रकट करते हैं।

$x + 2y = 19$ फिर $x + 3y = 24$

$x = 19 - 2y$ —— (iii) $x = 24 - 3y$ —— (iv)

पाते हैं कि (iii) नं और (iv) न० समीकरणों का बायों पक्ष एक समान हैं।

(iii) न० और (iv) न० समीकरण की तुलना करके पाते है।

$19 - 2y = 24 - 3y$

या, $-2y + 3y = 24 - 19$ $\therefore y = 5$

(iii) न० समीकरण में $y = 5$ रखने पर पाते हैं $x = 19 - 2 \times 5 = 9$

$\therefore$ अत अभीष्ट हल, $x = 9, y = 5$

इसप्रकार दो चलराशियुक्त एक घातीय दो समीकरणो में एक चलराशि के रूप में प्रकट कर तुलना करके हल करने की विधि (या पहति) को क्या कहा जाता है?

हल करने की इस पद्धति (या विधि) को तुलनात्मक पहात(विधि) कहते हैं।

16 $4x - 3y = 16$ और $6x + 5y = 62$ समीकरण द्वय को तुलनात्मक पद्धति द्वारा हल करें और लेखाचित्र की सहायता से इसली सत्यता जाँचे।

$4x - 3y = 16$ ——— (i) $\qquad$ $6x + 5y = 62$ ——— (ii)

या, $4x = 16 + 3y$ $\qquad$ या, $6x = 62 - 5y$

$\therefore x = \frac{16 + 3y}{4}$ ——— (iii) $\qquad$ $\therefore x = \frac{\square}{\square}$ ——— (iv)

हम (iii) और (iv) न० समीकरणों की तुलना से पाते हैं

$$\frac{16 + 3y}{4} = \frac{62 - 5y}{6}$$

या, $96 + 18y = 248 - 20y$

या, $38y = 248 - 96 = \square$ $\quad \therefore y = \square$

(iii)न० समीकरण से पाते हैं, $x = \frac{16 + 3y}{4} = \frac{16 + 3 \times 4}{4} = 7$

तुलनात्यक पद्धति से हल करके पाते हैं, $x = 7$ এবং $y = 4$

अब लेखाचित्र की सहायता से हल करके पाते हैं, $x = 7$ और $y = 4$ [स्वयं करें]

हल करें - 5.4

1. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8$ इस समीकरण के x को y के रूप में प्रकट करें।
2. $\frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 1$ इस समीकरण के y को x चलराशि के रूप में प्रकट करें।
3. निम्न समीकरणों को तुलनात्मक पद्धति से हल करें और देखें कि ये हल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं कि नहीं।

   (a) $2(x - y) = 3$, $5x + 8y = 14$ $\qquad$ (b) $2x + \frac{3}{y} = 5$, $5x - \frac{2}{y} = 3$ $\qquad$ (c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ $\qquad$ (d) $4x - 3y = 18$, $4y - 5x = -7$

4. $2x + y = 8$ और $2y - 3x = -5$ को तुलनात्मक पद्धति द्वारा हल करें और लेखाचित्र की सहायता से जाँचें।
5. निम्न दो चलराशि युक्त समीकरणों का तुलनात्यक पद्धति द्वारा हल करें।

   (i) $3x - 2y = 2$, $7x + 3y = 43$

   (ii) $2x - 3y = 8$, $\frac{x + y}{x - y} = \frac{7}{3}$

   (iii) $\frac{1}{3}(x - y) = \frac{1}{4}(y - 1)$, $\frac{1}{7}(4x - 5y) = x - 7$

   (iv) $\frac{x + 1}{y + 1} = \frac{4}{5}$, $\frac{x - 5}{y - 5} = \frac{1}{2}$

   (v) $x + y = 11$, $y + 2 = \frac{1}{8}(10y + x)$

   (vi) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, $2x + 4y = 11$

(vii) $x + \frac{2}{y} = 7$
$2x - \frac{6}{y} = 9$

(viii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

(ix) $\frac{x+y}{xy} = 2$
$\frac{x-y}{xy} = 1$

(x) $\frac{x+y}{5} + \frac{x-y}{4} = 5$
$\frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{5} = 5\frac{4}{5}$

(xi) $\frac{4}{x} - \frac{y}{2} = -1$
$\frac{8}{x} + 2y = 10$

(xii) $2 - 2(3x - y) = 10(4 - y) - 5x$
$= 4(y - x)$

17 सिराज सुमिता द्वारा बोर्ड पर लिखे दोचलराशि युक्त धातीय दो समीकरणों का हल अन्यपद्धति द्वारा करने का प्रयास करता हैं। $x + 2y = 19$ —— (i) $x + 3y = 24$ —— (ii)

अब यदि (i) न० समीकरण से x चलराशि को y चलराशी के रूप में प्रकट करे और (ii) न० समीकरण में x चलराशि के स्थान पर रखें तो क्या पाते हैं, देखें।

$x + 2y = 19$
$x = 19 - 2y$ ——— (iii)

(ii) न० समीकरण में $x = 19 - 2y$ रखने पर पाते हैं,
$x + 3y = 24$
या, $19 - 2y + 3y = 24$
या, $19 + y = 24$
या, $y = 24 - 19$ $\therefore y = 5$

(iii) न० समीकरण में $y = 5$ रखने पर पाते हैं
$x = 19 - 2y$
या, $x = 19 - 2 \times 5$
$\therefore$ $x = \square$

इस पद्धति से हल करने पर पाते हैं, $x = 9$ एवं $y = 5$

इस प्रकार दो चलराशियुक्त एक धातीय समीकरण के एक चलराशि को दुसरी चलराशि के रूप में प्रकट कर दूसरी दो चलराशियुक्त एकधातीय समीकरण में अभी चलराशि के स्थआन पर रखकर हल करने की पद्धति का नाम क्या है? इस पद्धति का नाम स्थानापथ विधि है। (या विक्षेपन पद्धति है)

18 निम्न दो चलराशि युक्त एक धातीय समीकरणों का समाधान (हल) विस्थापन पद्धति से करते हैं कि नहीं।

(a) $5x+3y=11$, $2x-7y=-12$ (b) $2x + \frac{3}{y} = 5$, $5x - \frac{2}{y} = 3$

(a) $5x + 3y = 11$ —— (i) $2x - 7y = -12$ —— (ii)
या, $3y = 11 - 5x$

$\therefore y = \frac{11 - 5x}{3}$ ———— (iii)

(ii) न० समीकरण में y के स्थान पर $\frac{11 - 5x}{3}$ रखनेपर पाते हैं

$2x - 7 \times (\frac{11 - 5x}{3}) = -12$
या, $2x - \frac{77 - 35x}{3} = -12$
या, $\frac{6x - 77 + 35x}{3} = -12$
या, $41x - 77 = -36$
या, $41x = 41$ $\therefore x = \square$

(iii) न० समीकरण में $x = 1$ रखने पर पाते हैं
$y = \frac{11 - 5 \times 1}{3}$
$\therefore$ $y = \square$
$\therefore$ अभीष्ट हल $x = 1, y = 2$

जाँचते हैं, $5 \times 1 + 3 \times 2 = \square$ और $2 \times 1 - 7 \times 2 = \square$
$\therefore$ $x = 1$ और $y = 2$ मान (i)न० और (ii) न० समीकरणों को संतुष्ट करते हैं।

(b) $2x + \frac{3}{y} = 5$ ——— (i) $5x - \frac{2}{y} = 3$ ——— (ii)

या, $2x = 5 - \frac{3}{y}$

या, $x = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{3}{y}\right)$ ——— (iii)

(ii) न० समीकरण में x के स्थान पर $\frac{1}{2}\left(5 - \frac{3}{y}\right)$ रखनेपर पाते हैं,

$5x - \frac{2}{y} = 3$

या, $5 \times \frac{1}{2}\left(5 - \frac{3}{y}\right) - \frac{2}{y} = 3$

या, $\frac{25}{2} - \frac{15}{2y} - \frac{2}{y} = 3$

या, $-\frac{15}{2y} - \frac{2}{y} = 3 - \frac{25}{2}$

या, $\frac{-15-4}{2y} = \frac{6-25}{2}$

या, $\frac{-19}{2y} = \frac{-19}{2}$

या, $-38y = -38$

$\therefore$ $y = \square$

y का मान (iii) न० समीकरण में रखने पर पाते हैं

$x = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{3}{1}\right)$ $\therefore x = \square$

अभीष्ट चल, $x = 1$ और $y = 1$

जाँचते हैं,

$2 \times 1 + \frac{3}{1} = \square$ और $5 \times 1 - \frac{2}{1} = \square$ $\therefore$ x=1 और y=1 मान (i) न० और (ii) न० समीकरणों को संतुष्ट करते हैं।

हल करें - 5.5

1. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1$ — समीकरण के x-को y के रूप में प्रकट करें।
2. $2x + 3y = 9$ समीकर से y के स्थान पर $\frac{7-4x}{-5}$ रखनेपर x का मान क्या होगा ?
3. निम्न दो चलराशि युक्त समीकरणों को पहले स्थान पर विधि से हल करें और लेखा चित्रकी सहायतासे सत्यता जाँचें।

   (a) $3x - y = 7$
   $2x + 4y = 0$

   (b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 = \frac{x}{4} + \frac{y}{2}$

4. निम्न दो चलराशि युक्त समीकरणों को स्थानापन पद्धति द्वारा चल करें और चल में प्रायमाने को समीकरणों मे रखकर सत्यता जाँचे।

   (a) $2x + \frac{3}{y} = 1$
   $5x - \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$

   (b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$
   $\frac{5}{x} + \frac{10}{y} = 5\frac{5}{6}$

   (c) $\frac{x+y}{xy} = 3$
   $\frac{x-y}{xy} = 1$

   (d) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{3}$
   $x + y = \frac{7}{10}$

5. निम्न दो चलराशि युक्त समीकरणो का चल स्थानापर पद्धति ये जान करें।

   (i) $2(x - y) = 3$
   $5x + 8y = 14$

   (ii) $2x + \frac{3}{y} = 5$
   $5x - \frac{2}{y} = 3$

   (iii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
   $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

   (iv) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$
   $7x - 5y = 2$

   (v) $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 1$
   $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$

   (vi) $\frac{1}{3}(x - y) = \frac{1}{4}(y - 1)$
   $\frac{1}{7}(4x - 5y) = x - 7$

   (vii) $\frac{x}{14} + \frac{x}{18} = 1$
   $\frac{x+y}{2} + \frac{3x-5y}{4} = 2$

   (viii) $p(x + y) = q(x - y) = 2pq$

19 राबिया और शुभ ने उसी मेले से अमरुद पेढ़ के चारे और नीवू -पेड़ के चारे खरीदा राविया ने 62 रू० में 4 अमरूद-पेढ़ के चारे और 5 और 36 रू० में 3 अमरूद पेड़ के चारे और 2 नीबू पेड़ के चारे खरीदा। एक अमरूद पेड़ के चारे और नीबूपेड़ के चारे का मुल्य ज्ञात कर देखें।

पहले युगपत समीकरण का गठन करते हैं।

माना कि 1 अमरूद पेड़ के चारे का मूल्य x रूप और 1 नींबू पेड़ के चारे का मूल्य y रू० है।

शर्त्तानुसार, $4x + 5y = 62$ ———— (i)

$3x + 2y = 36$ ———— (ii)

अब विलोपन पद्धति द्वारा (i) न० और (ii) समीकरणों का समाधान करने का प्रयास करते हैं।

x को विलुप्त करने के लिये $3 \times (i) - 4 \times (ii)$ करके पाते हैं

$$3 \times 4x + 3 \times 5y = 3 \times 62$$
$$4 \times 3x + 4 \times 2y = 4 \times 36$$

या, $y(3 \times 5 - 4 \times 2) = 3 \times 62 - 4 \times 36$

$\therefore y = \dfrac{36 \times 4 - 3 \times 62}{4 \times 2 - 3 \times 5} = \square$

इसी प्रकार y को विलुप्त करने के लिये $2 \times (i) - 5 \times (ii)$ से पाते हैं

$x = \dfrac{2 \times 62 - 5 \times 36}{4 \times 2 - 3 \times 5} = \square$

अब इसी प्रकार दो चलराशि युक्त एक धातीय दो समीकरणों को विलोपन पद्धति से x और y का मानज्ञात करें।

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ———— (iii)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ———— (iv)

$a_2 \times (iii) - a_1 \times (iv)$ से पाते हैं

$$a_1a_2x + b_1a_2y + c_1a_2 = 0$$
$$\underline{-a_1a_2x \pm b_2a_1y \pm c_2a_1 = 0}$$

या, $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - b_2a_1} = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ [यहाँ पर $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$]

$\therefore \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ———— (v)

इसी प्रकार $b_2 \times (iii) - b_1 \times (iv)$ से पाते हैं

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0$$
$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0$$
$$- \quad - \quad -$$
$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = b_1c_2 - b_2c_1$$

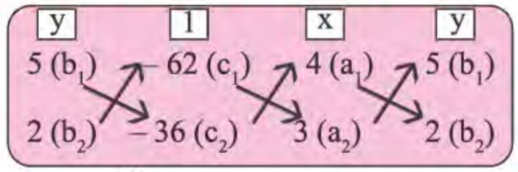
या, $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ [$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$]

$\therefore \dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ———— (vi)

$\therefore$ (v) न० और (vi) से पाते हैं

$\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ———— (vii) [जहाँ, $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$]

20 हम यदि (iii) न० और (iv) न० से चलराशियुक्त एक धातीय समीक रणों को विलोपन पद्धति से हल करते समय बीच में ही (vii) न० सूत्र का प्रयोग करें तो (i) न० और (ii) न० युगपत समीकरण का क्या चल होगा देखें।



$4x + 5y - 62 = 0$ __________ (i)

$3x + 2y - 36 = 0$ __________ (ii)

$$\frac{x}{5\times(-36) - 2\times(-62)} = \frac{y}{(-62)\times 3 - (-36)\times 4} = \frac{1}{4\times 2 - 3\times 5}$$

या, $\frac{x}{-56} = \frac{y}{-42} = \frac{1}{-7}$

$\therefore \quad \frac{x}{-56} = \frac{1}{-7}$ फिर, $\frac{y}{-42} = \frac{1}{-7}$

या, $-7x = -56$ या, $-7y = -42$

$\therefore \quad x = 8$ $\therefore \quad y = 6$

इस पद्धति द्वारा समाधान (चल) मिला $x = 8, y = 6$

$\therefore$ 1अमरूद पेज के चारे का मूल्य 8 रू०,

1नीबू पेड़ के चारे का मूल्य 6 रू० हैं।

जाँचते हैं,

4अमरूद पेड़ के चारे और ५ नींबू पेड़ के चारो का कूल मूल्य 4×8 रू० + 5×6 रू० = ☐ रू०। फिर ३ अमरूद पेड़ के चारे और २ नीबूपेड़ के चारो का कूल मूल्य 3×8 रू० + 2×6 रू० = ☐ रू०

इस प्रकार (vii) न० सूत्र के मीधे प्रयोग द्वारा दो चल राशियुक्त एक धातीय समीकरणो को चल करने की पद्धति का नाम क्या है?

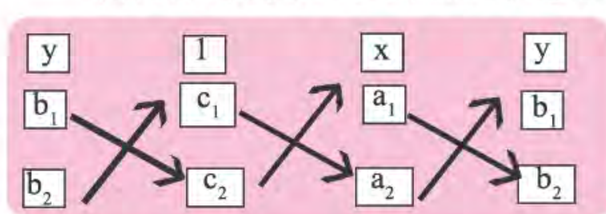
इस पद्धति का नाम वग्रगुणन पद्धति है।

समझा है, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

$$\therefore \quad \frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad [\text{जहाँ } a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0]$$

इस नियम को सहज ढंग से याद रखने की चेष्टा करते हैं।



21 सोफी ने किसी परीक्षा के सारे प्रश्नों के उत्तर देकर ३२ अंक पाया। प्रत्येक सही उत्तर के लिये 5 अंक पाया और प्रत्येक गलन उत्तर के लिये 2 अंक घटा दिये गये। यदि प्रत्येक सडी उत्तर के लिये 4 अंक दिये जाते और प्रत्येक गलन उत्तर के लिये। 1 अंक काटे जाते तब सोफी के (?) 24 होते।

युगपत समीकरण गठन कर बज्रगुणन पद्धति द्वारा पाना कर बतायें कि कुल कितने प्रश्नों के उत्तर दिये थे।

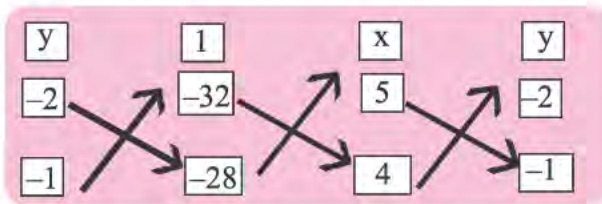
$\therefore$ शर्तानुसार, $5x - 2y = 32$
$4x - y = 28$

$\therefore$ $5x - 2y - 32 = 0$
$4x - y - 28 = 0$

$$\therefore \frac{x}{(-2)\times(-28)-(-1)\times(-32)} = \frac{y}{(-32)\times 4 - 5\times(-28)} = \frac{1}{5\times(-1) - 4\times(-2)}$$

$$\therefore \frac{x}{\square} = \frac{y}{\square} = \frac{1}{\square}$$

या $\frac{x}{24} = \frac{1}{3}$ और, $\frac{y}{12} = \frac{1}{3}$



या, $3x = 24$

$\therefore x = \square$

या, $3y = 12$

$\therefore$ $y = \square$

समझा है, सोफी ने परीक्षा में कुल 8 + 4 = 12 प्रश्नो के उत्तर दिये।

जैच कर देखते हैं कि 4सही और ४ गलत उत्तरोंके लिये कुल प्राणकि $= 8 \times 5 - 4 \times 2 = \square$

फिर दूसरी बार 8सि और 4 गलत उत्तरो के लियो कुल प्रसांक $= 8 \times 4 - 4 \times 1 = \square$

हल करें — 5.6

निम्न दो चलराशियुक्त एकधातीय समीकरणों को बज्रगुणन पद्धति द्वारा हल करें.।

1. $8x + 5y = 11$
   $3x - 4y = 10$

2. $3x - 4y = 1$
   $4x = 3y + 6$

3. $5x + 3y = 11$
   $2x - 7y = -12$

4. $7x - 3y - 31 = 0$
   $9x - 5y - 41 = 0$

5. $\frac{x}{6} - \frac{y}{3} = \frac{x}{12} - \frac{2y}{3} = 4$

6. $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = \frac{x}{4} - \frac{y}{3} - \frac{3}{20} = 0$

7. $\frac{x+2}{7} + \frac{y-x}{4} = 2x - 8$
   $\frac{2y-3x}{3} + 2y = 3x + 4$

8. $x + 5y = 36$
   $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3}$

9. $13x - 12y + 15 = 0$
   $8x - 7y = 0$

10. $x + y = 2b$
    $x - y = 2a$

11. $x - y = 2a$
    $ax + by = a^2 + b^2$

12. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
    $ax - by = a^2 - b^2$

13. $ax + by = 1$
    $bx + ay = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$

आज हमलोगों ने पूरादिन नाव से घूमना तय किया है। हमलेग संख्या मे कुल 42 लेग हैं। नजीरगंज से हमारी दोनों नाबे एक ही साथ और एक समान वेग से रवाना हुई। एक नाव पर घरके छोटी उम्र के लोग और दुसरी नाव पर बड़ी उम्र सदस्य बैठे।

हमारी नाव 10 घण्टे में धाराके अनुकूल 44 कि०मी० और प्रतिकू 30 कि०मी० गयी। किन्तु दूसरी नाव 13 घण्टे में धाराके अनुकूल 55 कि०मी० और प्रतिकूल 40 कि०मी० गयी।

22 हम युगपत समीकरण का गठन कर और इन्हे हल करके वानायें कि स्थिर जल में हमारी नावों का वेग और धारा का वेग क्या हैं।

माना कि स्थिर जल में नाव का वेग x कि०मी० घण्टा तथा धारा का वेग y कि०मी० घण्टा हैं।

$\therefore$ धारा के अनुकूल 1 घण्टा में नाव जाती है $(x+y)$ कि०मी०

धार के अनुकूल नाव $(x+y)$ कि०मी० जाती है 1 घण्टा में

1 कि०मी० जाती हैं $\frac{1}{x+y}$ घण्टा में

44 कि०मी० जाती हैं $\frac{44}{x+y}$ घण्टा में

फिर धारा के प्रतिकुल 1 घण्टा में नाव जाती हैं $(x-y)$ कि०मी०

धारा के प्रतिकुल नाव $(x-y)$ कि०मी० जाती हैं 1घण्टा में

1 कि०मी० जाती हैं $\frac{1}{x-y}$ घण्टा में

30 कि०मी० जाती हैं $\frac{30}{x-y}$ घण्टा में

शर्तानुसार, $\frac{44}{x+y}+\frac{30}{x-y}=10$ —— (i) एकी प्रकार पाते है $\frac{55}{x+y}+\frac{40}{x-y}=13$ —— (ii)

23 अब (i) न० और (ii) - न० युगपत समीकरणो को विलोपन विधि द्वारा हल करके x तथा y -के मान ज्ञात करते हैं।

माना कि $x+y=p$ और $x-y=q$

$\frac{44}{p}+\frac{30}{q}=10$ ———— (i) $\qquad \frac{55}{p}+\frac{40}{q}=13$ ———— (ii)

$4\times$(i) न० $-\ 3\times$(ii) न० से पाते हैं

$$\frac{176}{p}+\frac{120}{q}=40$$
$$\frac{165}{p}+\frac{120}{q}=39$$
$$\underline{-\qquad -\qquad -}$$
$$\frac{11}{p}=1 \quad \therefore \quad p=11$$

$\therefore$ पाते हैं $x+y=11$ ———— (iii)

$x-y=5$ ———— (iv)

जोड़ने पर $2x=16$

$\therefore x=8$ (iii) से पाते हैं $y=11-8=3$

(i) न० समीकरण से पाते हैं $\frac{55}{11}+\frac{40}{q}=13$

या, $5+\frac{40}{q}=13$

या, $\frac{40}{q}=8$

या, $8q=40 \ \therefore q=$ ☐

$\therefore$ स्थिर जल मे हमारी नाव का वेग 8 कि०मी० प्रति घण्टा और धारा का वेग 3 कि०मी० प्रति घण्टे।

24 मेरी बहन ने अपनी अभ्यास पुस्तिका में एक भिन्न लिखा जिसके अंश और हर के साथ 2 जोड़ने पर भिन्न का मान $\frac{7}{9}$ होता हैं। फिर उसी भिन्न के अंश और हर से 3 घटा देने पर भिन्न का मान $\frac{1}{2}$ हो जाता हैं। लिखे हुये भिन्न को बिना देखे बनायें कि भिन्न क्या हैं ?

माना कि भिन्न के अंश और हर क्रम से x और y हैं $\therefore$ भिन्न $\frac{x}{y}$

$\therefore$ शर्तानुसार, $\frac{x+2}{y+2} = \frac{7}{9}$ ———— (i)

$\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{2}$ ———— (ii)

(i) न० से पाते हैं $9x + 18 = 7y + 14$

$\therefore$ $9x - 7y = -4$ ———— (iii)

(ii) न० से पाते हैं, $2x - 6 = y - 3$

$\therefore$ $2x - y = 3$ ———— (iv)

विलोपन पद्धति सो (iii) न० और (iv) न० समीकरण को हल करके पाते हैं

$x = 5$ और $y = 7$ [स्वयं करे] $\therefore$ भिन्न $\frac{5}{7}$

जांच कर देखा जाय कि सही मिला हैं कि नहीं।

भिन्न के अंश और हर के साथ 2 जोड़ने पर पाते हैं → $\frac{5+2}{7+2} = \frac{7}{9}$

भिन्न के अंश और हर को 3 घटाने पर पाते हैं → $\frac{5-3}{7-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

25 मेरे मित्र जफर ने अपनी अभ्यास पुस्तिका में दो अ०कों की एक संख्या लिखा। जफर द्वारा लिखी गयी संख्या के अंकों का वोग 8 हैं; फिर स०ख्या के साथ 18 जोड़ने पर संख्या के अंकों का स्थान परस्पर बदल जाता हैं। जफर द्वारा लिखी गयी स०ख्या को ज्ञात करें।

माना कि जफर द्वारा लिखी दो अंकों की संख्या के इकाई का अंक x और दहाई स्थान का अंक y हैं।

$\therefore$ स०ख्या $10y + x$

शर्तानुसार, $x + y = 8$ ———— (i)

दहाई	इकाई
y	x

अंकों के स्थान बदलमे से $10y + x$ संख्या $10x + y$ हो जाती हैं।

$\therefore$ शर्तानुसार, $10y + x + 18 = 10x + y$

या, $10y - y + x - 10x + 18 = 0$

या, $9y - 9x + 18 = 0$

$\therefore$ $y - x + 2 = 0$ ———— (ii)

दहाई	इकाई
y	x

(i) न० और (ii) न० समीकरणों को विलोपन पद्धति द्वारा हल करने पर पाते हैं, $x = 5$ और $y = 3$ [स्व्यं करे]

संख्या $10 \times 3 + 5 = 35$

जांच कर देखे, $3 + 5 = \square$ এবং $35 + 18 = \square$

26 मुराद दो अंको की एक संख्या लिखेगा जिसके अंको का योगफल।। और संख्या के साथ ( ) जोड़ने पर अंक अपना स्थान बदल लेते हैं। युगपत समीकरण का गठन करें और अभीष्ट दो अंकों की संख्या निर्णय करें। [स्वयं करें]

हल करे- 5.7

1. अपने विधालय के निकट किताबो की दुकान से मेरी मित्र रीता ने 34 रू० में 5 कलम और ३ पे सिल खरीदा। किन्तु सुमित ने उसी दुकान से समान मुल्य बाले 7 कलम और 6 पेंसिल 53 रू० में खरीदा। युगपत समीकरण बनाकर प्रतिकलम और प्रति पेंसिल का मूल्य बतायें।

2. मेरे मित्र आय्शा और रफीक का एक साथ बजन 85 कि०ग्रा० है। आय्शा के वजन का आछा रफीक के वजन का $\frac{4}{9}$ भाग के समान हो तो समीकरण गठन कर उनका वजन अलग-अलग बतायें।

3. मेरे चाचा की वर्तमान उम्र मेरी बहन की वर्तमान उम्र से दो गुर्ना है। 10 वर्ष पहले चाचा की उम्र बहन की उम्र की तीन गुनी थी। सर्माकरण बनाकर उनकी वर्तमान उम्र बतायें।

4. अपने गवं के देवकुमार चाचा ने 590 रु० का एक चेक भुनाया। यदि बैंक से उन्हें पाँच रूपये और दस रूपये के कुल 70 नोट मिले हों तो उन्हें पाँच रूपये और दस रूपये के कितने-कितने लोट मिले?

5. बोर्ड पर एक एसी मिल लिखी जाती है जिसका हर अंश की अपेक्षा 5 अधिक है और अंश और डर के साथ ३ जोड़ने पर मिल का मान $\frac{3}{4}$ हो जाता है। युगपत समीकरण बनाकर हल करें और शुद्ध मिकर का मान बतायें।

6. मारिया ने अपनी अभ्यासपुस्तिका में एएसी दोसंख्यायें लिखा हैं कि पहली संख्या के साथ 21 जोड़ने पर दूसरी संख्या का दो गुना हो जाता है। फिर दूसरी संख्या के साथ 12 जोड़ने पर वह पहली संख्या का दो गुना हो जाता है। मारियाद्वारा लिखी दोनों संख्याये बतायें।

7. लालिमा और रमेन दोनो ने धर के बागोंकी सफाई की। लालिमा 4 दिन और रमेन 3 दिन एक साथ सफाई करते तो $\frac{2}{3}$ भाग काम पूरा हो जाता। फिर लालिमा 3 दिन और रमेन ६ दिन एक साथ सफाई करते तो $\frac{11}{12}$ भाग काम पूरा हैता। युगपत समीकरण गठन कर हल करके लालिमा और रमेन अलग-अलग करें तो अकेले-अकेले काम कितने दिनों मेंपूरा करेगें-वतातें।

8. मेरी माता जी ने दो किस्म के शर्बत बनाये हैं। पहले के 100 लिटर र्शबत में 5 कि०ग्रा० चीनी और दूसरे किस्म के 100 लिटर में 8 कि०ग्रा० चीनी है। मुझे दोनोंकिस्म के सर्बतें को मिलाकर 150 लिटर शर्वत बनाया है जिसमें चीनी $\frac{2}{3}$ कि०ग्राम हो। समीकरण गठन कर हल करके लालिमा और रमेन अलग अलग करें तो अकेले-अकेले काम कितने दिनों में पूरा करेंगे - बतायें।

9. विगत वर्ष वकुलतला ग्रामपंचायत के निर्वाचन में अखिल बापू और छंदा देवी प्रत्याशी थे। अरिवल बाबूने छंदा देवी को 75 से डराया था। अखिल बाबू को जितने लोगो नें वोट दिया था उसके 20% लोगों ने छंदा ने छंदा देवी को देते तो छंदा देवी 19 से जीत जातीं। युगपत समीकरण गठन कर चल करें और बतायें कि किसे कितने मत मिले।

10. रफीक के आयताकारफर्श की लम्बाई 2 मीटर और चौड़ाई 3 मीटर बढ़ा देने पर क्षेत्रफल 75 वर्ग मीटर अधिक ही जाता है। किन्तु लम्बाई 2 मीटर धटाने और चौड़ाई ३ मीटर बढ़ा देने पर क्षेत्रफल 15 वर्गमीटर बढ़ता है। युगपत समीक रण गठन कर और हल करके फर्श की लम्बाई और चौडाई बतायें।।

11. मेरो मित्र मेरी ने ईशान से कहा अपने पैसे का $\frac{1}{3}$भाग मुझे, दो तो मेरे पास 200 रु० हों जायेंगे। ईशान ने मेरी से कहा ''तुम अपने पैसे का आधा मुझें दे देते तो मेरे पास भी 200 रू०हो जायेंगे। युगपत सभी करण गठन कर, हल करे और बतायें कि किसके पास कितमे रुपये हैं ?

12. आज भैया और उनके कुछ मित्र मेले में जायेंगे (इस लिये दादाजी ने उलके बीच कुछ रूपये बाटा पाया जाता है कि दो मित्र कम होते तो प्रत्येक को 18 रू० मिलते। फिर यदि 3 मित्र अधिक रहे होते तो प्रत्येक को 12 रू० मिलते। कितने लोग मेले गये थे और दादा जी ने कितने रूपये बैटे थे।

13. मेरे भैया कीथैली में 1 रू० के और 50 पैके सिक्कों को कुल 350 रू० थे। मेरी बहन ने उस थैली से 50 पैसे के सिक्को की संख्या का$\frac{1}{3}$ भाग निकाल लिया और उतने ही 1 रू० के सिक्के उस थैली में रख दिये और अब उस थैली में 400 रूपये हो गये। पहले भैया की थैली में और 50 पै० के कितने कितने सिक्के थे ?

14. मामा के घर जाने के लिये एक मोटरगाड़ी समवेग से रवाना हुई। यदि गाड़ी का वेग 9 कि०ग्रा० प्रति धू अधिक रहा होता तब उस दूरी को तय करने ३ घण्टा कम समय लगता। फिर यदि गाड़ी का वेग 6 कि०मी० प्रतिघा कम होता तब उस दूरी को तय करने में 3 घण्टा समय अधिक लगता। हमलोगों के घर से मामा के घर की दूरी अैर गाड़ी का वेग गणना करक के बताये।

15. मोहित दो अंको की एक ऐसां संख्या लिखता है जो अपने अंको के योगफल के 4 गुने से ३ अधिक है और इस संख्या के अंको का स्थान विनियग करने पर प्रास संख्या के अंकों का स्थान विनिमय करने पर प्राप्त संख्या मूल संख्या से 18 अधिक है। गणना करके देखें कि मोहन ने कौन सी संख्या लिखा है।

16. मै दो अंकों की एक ऐसी संख्या लिखूंगा जिसके अंकों का योगफल 14 है और संख्या से 29 घटा देने पर अंक समान हो जाते हैं। युगपत समीकरण बनाकर हल करें और दो अंको की संख्या बतातें।

17. रहमत चाचा अपनी नाव लेकर धाराके अनुकूल 6 घ०में 30 मील जाकर फिर इतनी ही दूरी तय करके 10 घण्टे मे वापस आ जाते हैं। स्थिर जल में रहमत चाचा की नाव का वेग और धारा का वेग बतायें।

18. हाबड़ा स्टेशन से धूटने के। घण्टा बाद किसी विशेष कारण से। घण्टा देर करती है और उसके बाद पहले बाते वेग के$\frac{3}{5}$वे भाग के बराबर वेग से गतंव्य स्थल पर 3 घण्टा देरी से पहुचती है। यदि वह विशेष कारण पूर्व स्थान से 50 कि०र्भा० और दूर रहा होता तब ट्रेन पहले की अपेक्षा 1 घ० 20 मिनट पहले गंतव्यस्थल पर पहुँच जाती। ट्रेन द्वारा तय की गयी दूरी और वेगज्ञात करें।

19. मैसूमी दो अंको की एक संख्या मे अंको के योगफल से भाग देकर भाक फल 6 और भागशेष 6 पाती है। यदि मैसमी अंको का स्थान बदल कर प्राप्त संख्या में अंको के योगफल से भाग देथी थे भागफल 4 और भागशेष 4 पाती। मैसमी द्वारा लिखी दो अंको की संख्या बताथें।

20. फरीदा बीबी कई बक्सो में कमला नीबू रखते समय पाती हैं कि यदि प्रत्येक बाक्स में 20 नीबू अधिक रखे जाये तब 3 बक्स कम लगेगें। फिर यदि प्रति बक्से में 5 नीबू कम रखें ते ? बाक्स अधिक लगता है। युगपत समीकरण गठन करके बतायें फरीदा बीबी के पास कितने नीबू और कितने बाक्स हैं ?

21. संक्षीप्त उत्तर वाले प्रश्न

(i) यदि $x = 3t$ और $y = \frac{2t}{3} - 1$ हो तो t-के किसमान के लिये $x = 3y$ होगा?

(ii) kके किस मान के लिये $2x + 5y = 8$ एवं $2x - ky = 3$ समीकरणद्वय का कोई हल नहीं होगा?

(iii) x, y वास्तविक संख्याये हो और $(x - 5)^2 + (x - y)^2 = 0$ होतो x और y के मान क्या हैं?

(iv) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -5$ हो तो x और y के मान क्या हैं?

(v) r के किसमान के लिये $rx - 3y - 1 = 0$ और $(4 - r)x - y + 1 = 0$:समीकरणो काहल नहीं होगा?

(vi) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ समीकरण को $y = mx + c$ के रूप मे लिखें, जहाँ m और c स्थिरांक हैं।

(vii) k के किस मान के लिये $kx - 21y + 15 = 0$ और $8x - 7y = 0$ समीकरणों का एकमात्र हल होगा?

(viii) a और b के किस मान के लिये $5x + 8y = 7$ और $(a+b)x + (a-b)y = (2a + b + 1)$ समीकरणो के असंख्य हल होगे?

22. बहु विकल्पीय प्रश्नः (M.C.Q.) :

(i) **$4x + 3y = 7$ और $7x - 3y = 4$ समीकरणों का**

(a) एक निश्चित हल है। (b) असंख्य हल है।
(c) कोई हल नही हैं। (d) कोई भी नहीं।

(ii) **$3x + 6y = 15$ और $6x + 12y = 30$ समीकरण द्वय का**

(a) **एक निश्चित हल है।** (b) असंख्य हल है।
(c) कोई हल नही है। (d) कोई भी नहीं।

(iii) $4x + 4y = 20$ और $5x + 5y = 30$ समीकरणद्वय का

(a) एक निश्चित हल है। (b) असंख्य हल हैं।
(c) कोई हल नहीं है। (d) कोई भी नहीं।

(iv) निम्न समीकरणों मे से किसका हल (1, 1) हैं

(a) $2x + 3y = 9$ (b) $6x + 2y = 9$
(c) $3x + 2y = 5$ (d) $4x + 6y = 8$

(v) $4x + 3y = 25$ और $5x - 2y = 14$ समीकरणों का हल है

(a) $x = 4, y = 3$ (b) $x = 3, y = 4$
(c) $x = 3, y = 3$ (d) $x = 4, y = -3$

(vi) $x + y = 7$ समीकरण के हल हैं

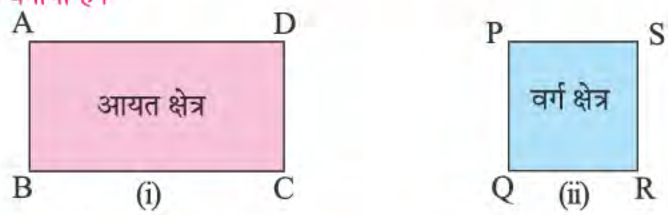
(a) (1, 6), (3, –4) (b) (1, –6), (4, 3)
(c) (1, 6), (4, 3) (d) (–1, 6), (–4, 3)

6 समानान्तर चतुर्भुज के गुण
PROPERTIES OF PARALLELOGRAM

आगामी बुधवार को हम नौवीं कक्षा के छात्र-छात्रायें अपनी इच्छा से कुछ अपने द्वारा तैयार किये कार्य दिखाने वाले है। इसलिए हम सभी छः मित्र सयन्तन के घर की छत पर रविवार को एकत्रित हुये है।

हम सभी ने पुरानी दफ्तियों से बने बॉक्स में एकत्रित किया है। इनकी सहायता से हममे से कोई घर बनायेगा, कोई पुल बनायेगा और कोई अनेक प्रकार के चित्र-मॉडल बनायेगा।

मैंने कार्डबोर्ड के किनारों को जो बॉक्स के रूप में थे खोलकर फैला दिया। ये किस ज्यामितिक आकृति के है नीचे चित्र बनाया है।



दो चतुर्भुजाकार क्षेत्र ABCD और PQRS पाया।

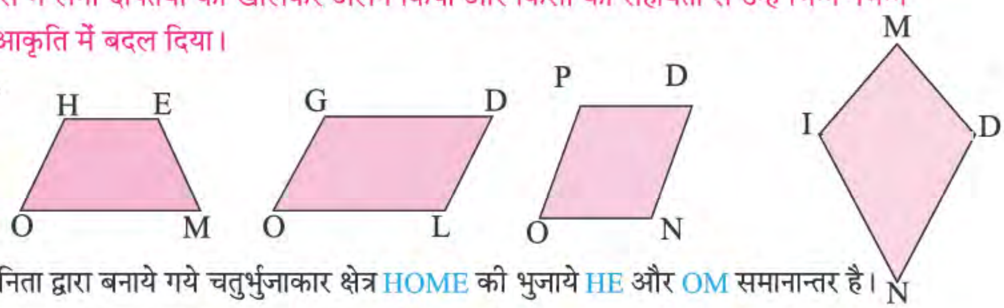
चतुर्भुजाकार क्षेत्र ABCD को □ शीर्ष बिन्दु A, B, C और D; □ भुजाये AB, BC, CD और DA और □ चार कोण ∠ABC , □, □, □ ABCD चतुर्भुज के दो विकर्ण हैं □ और □

चतुर्भुजाकार क्षेत्र PQRS के □ शीर्ष बिन्दु P,Q,R,S; □ भुजाये PQ,QR,RS,SP;

चतुर्भुजाकार PQRS के किसी और विकर्णो को लिखे।

रनिता ने बक्से में लगी दफ्तियों को खोलकर अलग किया और किसी की सहायता से उन्हे भिन्न-भिन्न ज्यामितिक आकृति में बदल दिया।

उसने बनाया,



पाते है कि रनिता द्वारा बनाये गये चतुर्भुजाकार क्षेत्र HOME की भुजाये HE और OM समानान्तर है।

∴ HOME चतुर्भुज के आकार का क्षेत्र एक ट्रपिजियम क्षेत्र है।

जिस चतुर्भुज को सामने-सामने की एक जोड़ी भुजाये परस्पर समानान्तर होती है, उसे ट्रपिजियम कहते है।

किन्तु रनिता द्वारा तैयार किया गया GOLD चतुर्भुज में GO||DL और GD||OL.

∴ GOLD चतुर्भुज एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।

जिस चतुर्भुज की आमने-सामने की विपरीत भुजायें परस्पर समानान्तर हो उसे समानान्तर चतुर्भुज कहते है।

फिर POND चतुर्भुज में PO || DN, PD || ON और PO = ON

POND चतुर्भुजाकार क्षेत्र □ आकार का क्षेत्र है।

∴ जिस समानान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाये परस्पर समान होती हैं, उसे रोम्बस कहते हैं।

(i) न॰ और (ii) न॰ ABCD और PQRS चतुर्भुज की विपरीत भुजायें परस्पर समानान्तर हैं। तो क्या ये भी समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र है ?

आयत ABCD और वर्ग PQRS भी समानान्तर चतुर्भुज के आकार के क्षेत्र हैं।

समझते है, समानान्तर चतुर्भुज का एक शीर्ष कोण समकोण हो तो यह एक आयत हैं।

जिस आयाताकार क्षेत्र की आसन्न भुजायें समान हो उसे वर्ग कहते हैं।

अथवा रॉम्बस का एक शीर्षकोण समकोण हो तो यह वर्ग होता है।

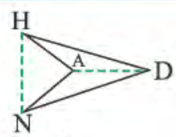
पाते हैं,
(i) प्रत्येक वर्गाकार चित्र आयत और रोम्बस है।
(ii) प्रत्येक आयताकार चित्र वर्गाकार और रोम्बस समानान्तर चतुर्भुज हैं।
(iii) प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज ही ☐ (आयताकार/ट्रपिजियम) है। [स्वयं करे]

मापकर देखे, MIND चतुर्भुजाकार क्षेत्र में MI=MD और NI=ND

∴ MIND चतुर्भुज पतंग के आकार का है।

पाते है, जिस चतुर्भुज की एक जोड़ी आसल भुजायें परस्पर समान हो और शेष दोनो भुजाओं की लम्बाई भी समान हो उसे पतंग कहा जाता है।

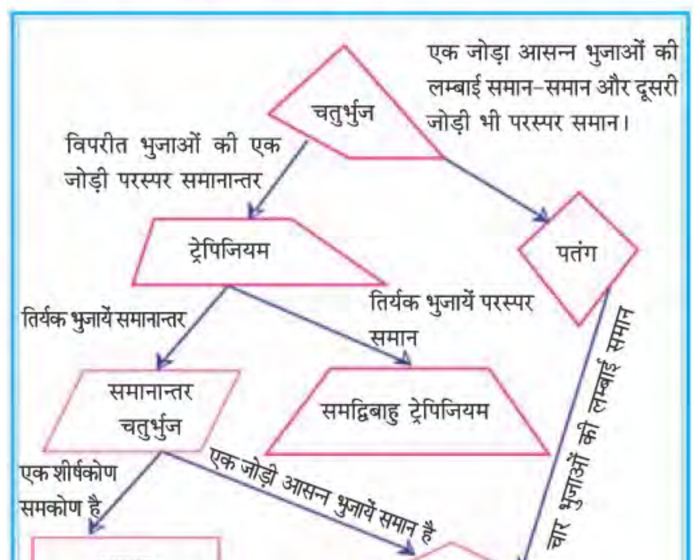
मिहीर ने एक बॉक्स काटकर दूसरे प्रकार का एक आकार तैयार किया।



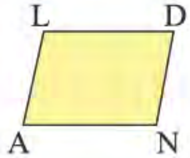
देखते हैं, HAND चतुर्भुजाकार क्षेत्र का एक विकर्ण चतुर्भुज के अन्दर नहीं है। इन्हें अवतल चतुर्भुज **(Concave)** कहा जाता है।

(इस प्रकार के चतुर्भुज की यहाँ कोई चर्चा नहीं है)

हमने जो सीखा उसे एक चित्र रुप में प्रकट करने का प्रयास करें।



सायन्तन ने अपने पिचबोंड के टुकड़ा को कैंची से काटकर भिन्न-भिन्न प्रकार के रंगीन समानान्तर चतुर्भुज आकार के क्षेत्र बनाया।



मैंने पीले रंग के समानान्तर चतुर्भुज LAND की भुजाओं को मापकर देखा, LA = DN, LD = AN
फिर चांदा की सहायता से मापकर देखा, $\angle LAN = \angle LDN$ और $\angle ALD = \angle AND$

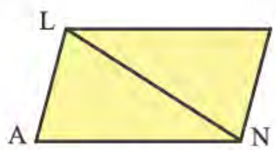
पाते हैं, LAND समानान्तर चतुर्भुज के आकार की विपरीत भुजाओं की लम्ब और विपरीत के मान परस्पर समान हैं।

फिर हरे रंग के समानान्तर चतुर्भुज COMB के आकार के क्षेत्र की विपरीत भुजाओं और विपरीत कोणों को मापने पर मान समान मिलता है। (स्वयं करे)

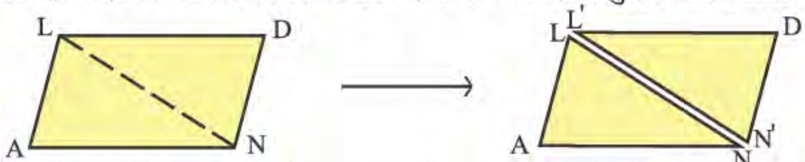
अपने प्रयास समानान्तर चतुर्भुज के आकार के क्षेत्र का प्रत्येक विकर्ण इसे दो सर्वसम त्रिभुजों में विभक्त करता है और समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र की विपरीत भुजायें समान होती हैं।

(i) पहले पीले रंग के LAND सामानान्तर चतुर्भुज के आकार के दो समानान्तर चतुर्भुज बनाकर काट लिया।

(ii) अब LAND समानान्तर चतुर्भुज के आकार के L और N बिन्दु को सीधा में मोड़कर LN विकर्ण अंकन कर लिया।



(iii) अब नीचे दिखाये गये चित्र की तरह LN देखा काटकर दो त्रिभुजाकार क्षेत्र ΔLAN और $\Delta N'DL'$ पाया।

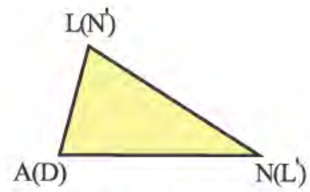


(iv) अब LAN त्रिभुजाकार क्षेत्र को दूसरे त्रिभुजाकार क्षेत्र N'DL'पर इस प्रकार रखते है कि दोनों नीचे के चित्र की तरह हो जाँय।

ΔLAN का बिन्दु A $\Delta N'DL'$के बिन्दु D पर

ΔLAN का बिन्दु L $\Delta N'DL'$के बिन्दु N' पर और

ΔLAN का बिन्दु N $\Delta N'DL'$के बिन्दु L' पर पड़े।



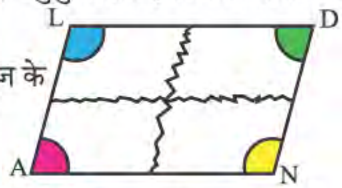
देखते है, ΔLAN और $\Delta N'DL'$ सम्पूर्ण रूप में एक दूसरे को ढंक लेते है और एकाकार हो जाते हैं।

$\therefore$ पाते हैं, $\Delta LAN \cong \Delta N'DL'$ और LA = N'D और AN = DL'

$\therefore$ हमने जाँच कर देखा कि समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का प्रत्येक विकर्ण इसे दो सर्वासम त्रिभुजों में बाँटता है और विपरीत भुजाये समान-समान होती हैं।

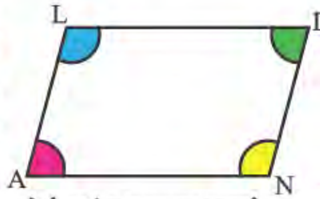
1 आयशा ने यह जाँचने के लिये कि LAND समानान्तर चतुर्भुज क्षेत्र के विपरीत कोण परस्पर समान होते है समानान्तर चतुर्भुज LAND के आकार और माप के दो और समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र बनाकार काटा।

अपने प्रयास से

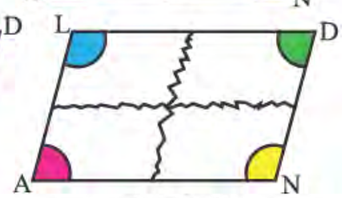


(i) इस बार बगल में दिये गये चित्र की तरह एक LAND समानान्तर चतुर्भुज के आकार के क्षेत्र के चारों कोणों को रंगकर चार टुकड़े काट लिया।

(ii) इसके बाद दूसरे LAND समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र को रंग दिया और काटे गये चारों कोणों के बोर्ड का रंग समानान्तर चतुर्भुज के कोणों पर रखकर जो मिला, लिखते हैं।



बोर्ड पर रंगा समानान्तर चतुर्भुज



चार टुकड़े किये गये समानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्र

पाते है $\angle A = \angle D$ और $\angle L = \angle N$

$\therefore$ स्वयं जाँच कर पाया कि समानान्तर चतुर्भुज के विपरीत कोण मान में परस्पर समान होते हैं

2 ऊपर की विधि के अनुसार एक समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र बनाकर और कहकर स्वयं यह जाँचें कि समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण इसे दो सर्वासम त्रिभुजों में विभक्त करते है और समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजाये और विपरीत कोण परस्पर समान होते हैं। (स्वयं करे)

प्रमेय - 14 तर्क देते हुए प्रमाणित करे कि किसी समानान्तर चतुर्भुज

(i) प्रत्येक विकर्ण समानान्तर चतुर्भुज की दो सर्वांसम त्रिभुजो में विभक्त करता है,

(ii) विपरीत भुजाओं की लम्बाई परस्पर समान होती है, (iii) विपरीत कोण परस्पर समान होते हैं।

दिया गया है (प्रदत्त) : माना कि ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है। अर्थात् $AB \parallel DC$ और $AD \parallel BC$;

AC विकर्ण समानान्तर चतुर्भुज को दो त्रिभुजों $\triangle ABC$ और $\triangle CDA$ में बाँटना है।

प्रमाणित करना है कि (i) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ii) $AB = DC$; $BC = AD$

और (iii) $\angle ABC = \angle ADC$; $\angle BAD = \angle BCD$

प्रमाण : $\triangle ABC$ और $\triangle CDA$ एकान्तर $\angle ACB$ = एकान्तर $\angle CAD$ [$\because AD \parallel BC$ एवं AC इनसे मिलती है] .... (i)

AC [समयनिक भुजायें]

और $\angle BAC$ = एकान्तर $\angle ACD$ [$\because AB \parallel DC$ एवं AC इनसे मिलती है] .... (ii)

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ [सर्वांगसमता की A-S-A शर्त से] [(i) प्रमाणित]

$\therefore$ $AB = DC$ और $BC = AD$ [सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाये] [(ii) प्रमाणित]

फिर से $\angle ABC = \angle ADC$ [सर्वांसम त्रिभुजों के संगत कोण]

$\angle BAC + \angle CAD = \angle ACB + \angle ACD$ [(i) और (ii) से पाया है]

$\therefore$ $\angle BAD = \angle BCD$ [(iii) प्रमाणित]

3. एक सामानान्तर चतुर्भुज PQRS बनाकर PR विकर्ण खींचा गया है। प्रमाणित करे कि $\triangle PQR \cong \triangle RSP$; $PQ = SR$, $PS = QR$ और $\angle PQR = \angle PSR$, $\angle QPS = \angle QRS$ **[स्वयं करे]**

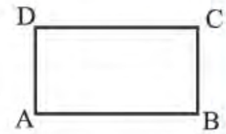
प्रयोग : 1. प्रमाणित करे कि आयताकार चित्र की विपरीत भुजायें परस्पर समान होती है और प्रत्येक कोण एक समकोण होता है।

संकेत : किसी समानान्तर चतुर्भुज का एक कोण समकोण होते, वह आयत होता है। माना कि $\angle BAD = 90°$ फिर $\angle BAD + \angle ABC = 180°$ [$\because AD \parallel BC$ और AB इनसे मिलती है]

$\therefore \angle ABC = 90°$

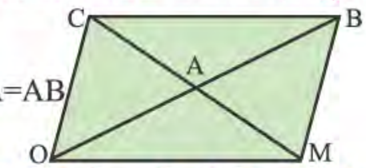
समानान्तर चतुर्भुज के विपरीत कोण परस्पर होते है।

$\therefore \angle BAD = \angle BCD = 90°, \angle ABC = \angle ADC = 90°$



रनिता ने सयन्तन द्वारा बनाये गये इसे रंग के समानान्तर COMB के दो विकर्ण CM और OB खीचा जो एक दूसरे को A बिन्दु पर काटते हैं।

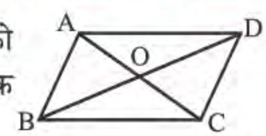
पैमाने और कांटा कम्पास की सहायता से देखते है कि CA=AM और OA=AB



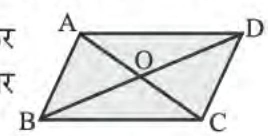
सयन्तन ने एक और किसी आकार का समानान्तर चतुर्भुज बनाता है और उसके दोनों विकर्णों को मापकर देखता है कि समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अपने प्रयास से अब में स्वयं जाँच करता हूँ कि समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे के समद्विभाजित करते हैं।

(i) मैंने सफेद आर्ट पेपर पर एक समानान्तर चतुर्भुज ABCD बनाया। कागज को मोड़कर इस समानान्तर चतुर्भुज के दोनों विकर्णे AC और BD को खींचा जो एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

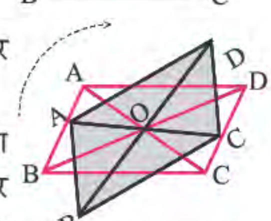


(ii) अब एक ट्रेसिंग पेपर पर समान माप का समानान्त चतुर्भुज ABCD बनाया। मोड़कर इस समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण AC और BD खीचा जो एक दूसरे बिन्दु O पर काटते हैं।



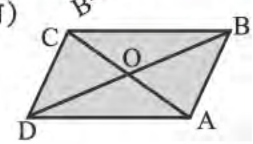
(iii) अब तक बोर्ड पर आर्ट पेपर पर बनाये गये समानान्तर को लटका दिया। और उसके ऊपर ट्रेसिंग पेपर पर बनाये गये समानान्तर चतुर्भुज को पिन की सहायता से अटका दिया।

(iv) O बिन्दु पर पिन लगाकर ट्रेसिंग पेपर की घड़ी की सूई की घूमने की दिशा विपरीत दिशा में एकबार 180° घुमाया ताकि नीचे के चित्र की तरह ट्रेसिंग पेपर पर बना समानान्तर आर्ट पेपर के समानान्तर चतुर्भुज के ढंक ले (संपाती की जाय)



(v) पाते है, $AO = OC$ और $BO = OD$

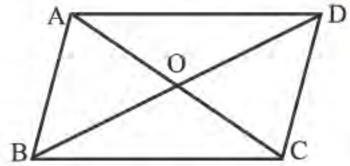
अपने प्रयास से पाते है समानान्तर चतुर्भुज के विकर्णद्वय परस्पर को समद्विभाजित करते हैं।



4. शाबा PQRS समानान्तर चतुर्भुज बनाता है और समानान्तर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण PQ और RS खींचता है जो एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

अपने प्रयास से प्रमाणित करे कि $PO = OR$, $QO = OS$ [स्वयं करे]

प्रमेय : **15** समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तर्क देते हुये प्रमाणित करें



दिया गया (प्रदत्त) : समानान्तर चतुर्भुज ABCD के दो विकर्ण AC और BD एक दूसरे बिन्दु O पर काटते हैं प्रमाणित करता है कि AO = OC और BO = OD.

प्रमाण : Δ AOD और Δ BOC में

∠CAD = एकान्तर ∠ACB [∵ AD ∥ BC और AC इनसे मिलती हैं]

अर्थात् ∠OAD = ∠OCB

AD = BC [समानान्तर चतुर्भुज की सामने-सामने की भुजायें है]

और ∠AOD = सम्मुख ∠BOC [∵ AC और BD कर्ण द्वय परस्पर की बिन्दु O पर काटते हैं]

∴ ΔAOD ≅ ΔBOC [सर्वांगसमता की A-S-A शर्त से]

∴ AO = OC और BO = OD [सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजायें है] प्रमाणित

5 PQRS समानान्तर चतुर्भुज के दो विकर्ण PR और QS एक दूसरे के बिन्दु O पर काटते हैं। PO = OR और QO = OS। **[स्वयं करे]**

प्रयोग : **2** तर्क सहित प्रमाणित करे कि रोम्बस के विकर्णद्वय एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं

दिया गया है : PQRS रोम्बस के PR और QS कर्णद्वय एक दूसरे को O बिन्दु पर काटते हैं।

प्रमाणित करना है कि PO = OR और QO = OS और ∠POS = 90°

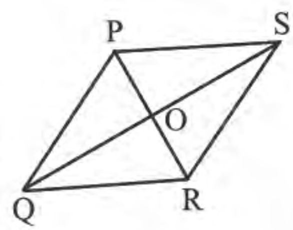
प्रमाण : PQRS रोम्बस में PO = OR और QO = OS [∵ समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित]

ΔPOQ और ΔPOS में

QO = SO

PQ = PS [रोम्बस की भुजायें हैं]

और PO उभयनिष्ट हुआ हैं।



∴ ΔPOQ ≅ ΔPOS [सर्वांगसमता की S-S-S सिद्धान्त से]

∴ ∠POQ = ∠POS [सर्वांगसम त्रिभुज के संगत कोण]

किन्तु ∠POQ + ∠POS = 180° [∵ सरल कोण]

या, 2 ∠POS = 180°

या, ∠POS = 90°

रोम्बस के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। [प्रमाणित]

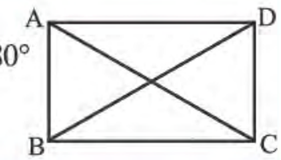
प्रयोग : 3 तर्क सहित प्रमाणित करें कि आयत के विकर्ण परस्पर समान होते हैं।

संकेत : ABCD आयत में $\angle ABC = 90^\circ$

$AB \parallel DC$ और BC इनसे मिलती है $\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$

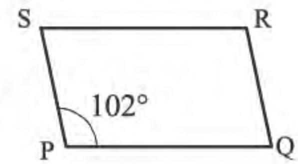
$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$

$\Delta ABC \cong \Delta DBC$ [प्रमाण स्वयं दे] $\therefore AC = BD$



प्रयोग : 4 तर्क सहित प्रमाणित करे कि वर्गाकार चित्र के दोनो विकर्ण परस्पर समान होते हैं और एक दूसरे को ये लम्बवत् समद्विभाजित करते हैं। (स्वयं करे)

प्रयोग : 5 शाबा ने एक समानान्तर चतुर्भुज PQRS बनाया जिसमें $\angle P = 102^\circ$ इस समानान्तर चतुर्भुज के अन्य कोणों के माप।



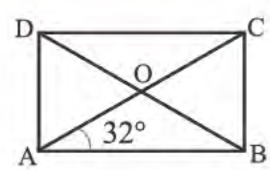
$\angle SPQ = 102^\circ = \angle SRQ$ [समानान्तर चतुर्भुज के विपरीत कोण]

$\angle SPQ + \angle PSR = \square$ [$\because PQ \parallel SR$ और PS इनसे मिलती है]

$\therefore \angle PSR = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ = \angle PQR$

प्रयोग : 6 शाबा के द्वारा बनाये गये समानान्तर चतुर्भुज PQRS में यदि $\angle PQR = 75^\circ$ होते $\angle QRS$ का मान क्या होता – लिखें (स्वयं करे)

प्रयोग : 7 सयन्तन ने एक आयताकार चित्र ABCD बनाया जिसके दो विकर्ण AC और BD एक दूसरे को O बिन्दु पर समद्विभाजित करते है। $\angle OAB = 32^\circ$ हो तो $\angle OBC$ का मान ज्ञात करें।



ABCD आयताकार चित्र में दोनो विकर्णों की लम्बाई समान है और वे एक दूसरे को बिन्दु O पर समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore OA = OC = OB = OD$

$\therefore \Delta AOB$ एक समद्विबाहु Δ है। $\angle OAB = \angle OBA$

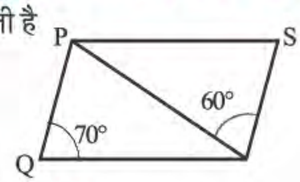
$\because \angle OAB = 32^\circ = \angle OBA$, $\therefore \angle OBC = 90^\circ - 32^\circ = \square$ [$\because$ ABCD एक आयताकार चित्र है]

प्रयोग : 8 दिय गये PQRS समानान्तर चतुर्भुज में $\angle QPR$, $\angle SPR$ और $\angle PRQ$ के मान लिखें।

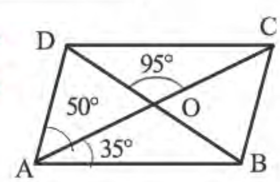
PQRS समानान्तर चतुर्भुज में $PQ \parallel SR$ एवं PR इनसे मिलती है

$\therefore \angle QPR = \angle PRS = 60^\circ$ [एकान्तर कोण]

इसी प्रकार $\angle SPR = \square$, $\angle PRQ = \square$ [स्वयं करे]

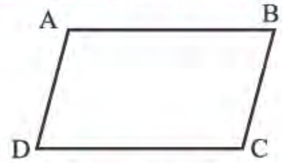


प्रयोग : 9 दिये गये चित्र में समानान्तर चतुर्भुज ABCD में $\angle BAO = 35^\circ$, $\angle DAO = 50^\circ$ और $\angle COD = 95^\circ$; है तो $\angle ABO$, $\angle ODC$, $\angle ACB$ और $\angle CBD$ के मान लिखे (स्वयं करे)



R

प्रयोग : 10 समानान्तर चतुर्भुज ABCD की परिसीमा 40 से० मी० है और AB=12cm दोनो समानान्तर चतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कर लिखें।

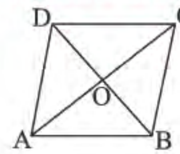


AB = DC =12cm और AD + BC = (40–2×12) cm = 16 cm

$\therefore$ AD = BC = $\frac{16}{2}$ cm = 8 cm

प्रयोग : 11 ABCD समानान्तर चतुर्भुज की परिसीमा 35cm और AB = 9.5 cm हो तो AD भुजा की लम्बाई ज्ञात कर लिखें। [स्वयं करें]

प्रयोग : 12 साथी ने एक रोम्बस बनाया है जिसके विकर्ण क्रमश: 24cm और 18 cm हैं। रोम्बस के प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कर लिखें।



माना कि रोम्बस ABCD में AC = 24 cm. और BD = 18 cm.

रॉम्बस के दोनों विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते है

$\therefore$ AO = $\frac{24}{2}$ cm. = 12 cm. और BO = $\frac{18}{2}$ cm. = 9 cm. और $\angle AOB = 90^\circ$

$\therefore$ समकोण त्रिभुज AOB में $AB^2 = OA^2 + OB^2 = (12^2 + 9^2)$ cm.^{2} = (144 + 81) cm.^{2} = 225 cm.^{2}

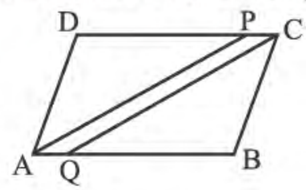
$\therefore$ AB = $\sqrt{225 \text{ cm.}^2}$ = 15 cm.

रोम्बस ABCD की प्रत्येक भुजा की लम्बाईं 15 cm.

प्रयोग : 13 यदि रोम्बस ABCD के दोनों विकर्णों की लम्बाई क्रमश: 8 cm. और 6 cm. हो तो रोम्बस ABCD की प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कर लिखें। [स्वयं करें]

प्रयोग : 14 मैंने समानान्तर चर्तुभुज ABCD में $\angle BAD$ और $\angle BCD$ के समद्विभाजक खींचा है जो DC और AB भुजाओं से क्रमश: P और Q बिन्दु पर मिलते हैं। तर्क समद्विभाजित करें कि PAQC एक समानान्तर चर्तुभुज है।

दिया गया है (प्रदत्त): समानान्तर चतुर्भुज ABCD में $\angle BAD$ और $\angle BCD$ के समद्विभाजक AP और CQ क्रमश: DC और AB को P और Q बिन्दु पर मिलते हैं।



प्रमाणित करना है कि APCQ एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।

प्रमाण : समानान्तर चतुर्भुज ABCD में DC || AB और AP इनसे मिलती हैं।

$\therefore \angle DPA$ = एकान्तर $\angle PAQ$

फिर $\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle DAB$ [$\because$ AP, $\angle A$ का समद्विभाजक हैं]

$= \frac{1}{2} \angle DCB$ [$\because$ समानान्तर चतुर्भुज के विपरीत कोण परस्पर समान होते हैं]

$= \angle PCQ$ [$\because$ CQ, $\angle C$ का समद्विभाजक हैं]

$\therefore \angle DPA = \angle PCQ$

किन्तु PA और CQ को DC रखा और संगत कोण समान हैं

$\therefore$ PA || CQ

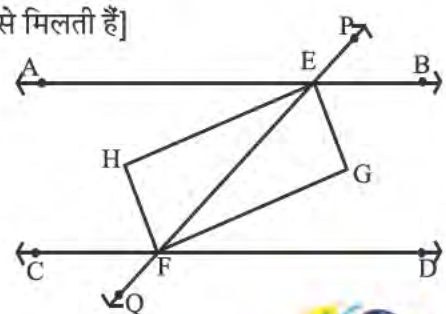
फिर AQ || PC [$\because$ समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजायें AB तथा CB समानान्तर हैं]

$\therefore$ APCQ चतुर्भुज में AP || QC और AQ || PC $\therefore$ APCQ एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।

प्रयोग : **15** तर्क सहित प्रमाणित करे कि दो समानान्तर सरल रेखायें और उन्हें काटने वाली तिर्यक रेखा के बीच बने अन्तकोणों के समद्विभाजक एक आयताकार चित्र बनाते हैं।

दिया गया है (प्रदत्त) : AB और CD दो समानान्तर सरल रेखाओ को PQ तिर्यक रेखा क्रमश: E और F बिन्दु पर काटती हैं। EG और EH क्रमश: $\angle BEF$ और $\angle AEF$ के समद्विभाजक और FG और FH क्रमश: $\angle DFE$ और $\angle CFE$ को समद्विभाजक हैं।

प्रमाणित करता हैं कि EHFG एक आयताकार चित्र हैं।



प्रमाण : $\angle AEF$ = एकान्तर $\angle EFD$ [$\because$ AB $\parallel$ CD और EF इनसे मिलती हैं]

$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle AEF = \frac{1}{2}\angle EFD$

$\therefore \angle HEF = \angle EFG$ किन्तु ये एकांतर कोण हैं।

$\therefore$ HE $\parallel$ FG

इसी प्रकार HF $\parallel$ GE

$\therefore$ EHFG एक समानान्तर चतुर्भुज है।

फिर $\angle HEG = \frac{1}{2}(\angle AEF + \angle BEF) = \frac{1}{2} \times 2$ समकोण

$\therefore \angle HEG = 1$ समकोण; $\therefore$ EHFG एक आयताकार चित्र हैं।

प्रयोग : **16** शाबा ने अपनी अभ्यास पुस्तिका में ABCD पतंग बनाकर AC और BD विकर्ण खीचा जो एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं। अब तर्क सहित प्रमाणित करे कि AC, BD पर लम्ब है और BO = OD

दिया गया है कि ABCD पतंग के विकर्ण AC और BD एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

प्रमाणित करना हैं कि AC, BD पर लम्ब है और BO = OD

प्रमाण : ABCD एक पतंग है जिसमें AB = AD और BC = CD

Δ ABC और Δ ADC में AB = AD; BC = CD और AC उभयनिष्ठ हैं

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta ADC$ [सर्वांगसमता की S-S-S शर्त से]

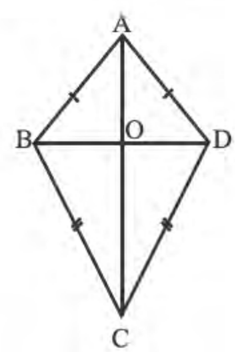
$\therefore \quad \angle BAC = \angle DAC$ [सर्वांगसम त्रिभुजों का संगत कोण]

$\therefore \angle BAO = \angle DAO$ ———— (i)

Δ ABO और Δ ADO — में

AB = AD; $\angle BAO = \angle DAO$ [(i) से]

और AO उभयनिष्ठ भुजा है।



$\therefore \quad \Delta ABO \cong \Delta ADO$ (सर्वांगसमता की S-A-S सिद्धांत से)

BO = DO (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजायें)

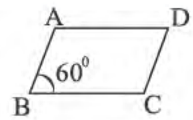
फिर $\angle AOB = \angle AOD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण)

और $\angle AOB + \angle AOD = 180°$; $\therefore \angle AOB = \angle AOD = 90°$

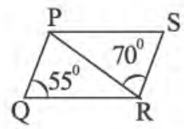
$\therefore$ AO, BD पर लम्ब हैं। अर्थात् AC, BD पर लम्ब हैं। (प्रमाणित)

हल करें - 6.1

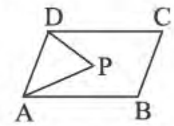
1. ABCD समानान्तर चतुर्भुज के कोणो के माप ज्ञात कर लिखे जबकि $\angle B = 60°$



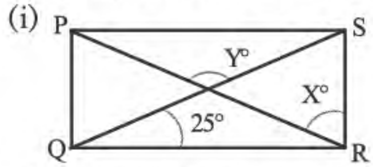
2. दिये गये चित्र में PQRS समानान्तर चतुर्भुज के $\angle PRQ$ का मान ज्ञात कर लिखें

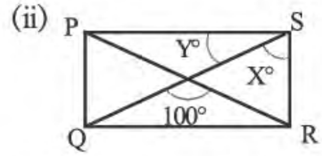


3. दिये गये चित्र में समानान्तर चतुर्भुज ABCD में AP और DP क्रमश: $\angle BAD$ और $\angle ADC$ के समद्विभाजक हो तो $\angle APD$ का मान क्या होगा ज्ञात कर लिखें।

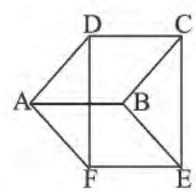


4. निम्न आयताकार PQRS चित्रों में X° और Y° के मान ज्ञात कर लिखें।





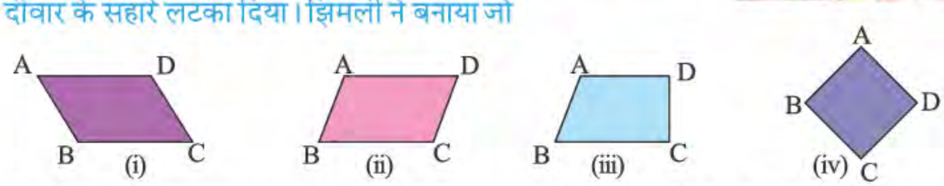
5. दिये गये चित्र में ABCD और ABEF दो समानान्तर चतुर्भुज हैं। तर्क देकर प्रमाणित करें कि CDFE भी एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।



6. समानान्तर चतुर्भुज ABCD में $AB > AD$ हो तो तर्क देकर प्रमाणित करे कि $\angle BAC < \angle DAC$।

हमलोगो ने छोटे-बड़े अनेक मापो के समानान्तर चतुर्भुज के आकार के चित्र पिचबोर्ड को काट-छाट कर बनाये और उनके भुजाओं कोणो और विकर्णों के बीच सम्बन्ध जाना। किन्तु सयन्तन की बहन झिमली ने ढेर सारे छोटे-बड़े अनेक प्रकार की माप के रंगीन चतुर्भुजाकार चित्र बनाया और कैंची की सहायता से काटकर अलग-अलग रखा हैं।

मैंने झिमली द्वारा बनाये गये चतुर्भुजाकार क्षेत्रों को सफेद बड़े आर्ट पेपर पर सटाकर दीवार के सहारे लटका दिया। झिमली ने बनाया जो



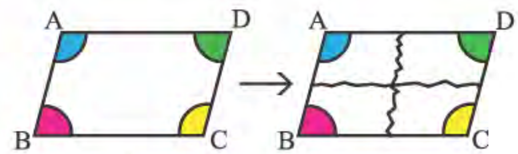
सयन्तन ने झिमली द्वारा बनाये गये चतुर्भुजाकार क्षेत्रो की भुजाओं की लम्बाईयों को मापकर देखा (i), (ii) और (iv) चतुर्भुजाकार क्षेत्रों की विपरीत भुजायें परस्पर समान हैं किन्तु (iii) न० चतुर्भुजाकार क्षेत्र की विपरीत भुजाओं की लम्बाई परस्पर समान नहीं हैं।

हमने अपने प्रयासों को जाँच कर देखा कि समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजाओं की लम्बाई परस्पर समान होती हैं। किन्तु ऐसे सभी चतुर्भुज जिनकी विपरीत भुजायें परस्पर समान होती हैं, क्या ये समानान्तर चतुर्भुज होते हैं ? अपने प्रयास से जाँच कर देखें।

6 हम अपने प्रयास से बैगनी रंग कर (i) न० चतुर्भुजाकार क्षेत्र समानान्तर चतुर्भुज है कि नहीं जाँचते है (i) न० ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र में AB=DC और AD=BC

(i) न० ABCD चतुर्भुज की विपरीत भुजायें परस्पर समानान्तर है कि नहीं जैंसे।

स्वप्रयास



(I) पहले (i) न० ABCD चतुर्भुज के चारों कोणों की रंगीन कर काट लिया।

(II) जब $\angle A$ और $\angle B$ को आस पास रखकर पाया देखते हैं $\angle A + \angle B = 180°$

(III) अब $\angle B$ और $\angle C$ को आसपास रखा और पाया देखते हैं, $\angle B + \angle C = 180°$

निष्कर्ष : (II) न० से पाते हैं AD और BC सरल रेखाओं AB मिलती है जिससे बने अन्न कोणों का योगफल 180° हैं। $\therefore AD \parallel BC$

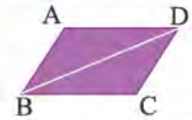
इसी प्रकार (III) न० पाते हैं $AB \parallel DC$

$\therefore$ स्वप्रयास से पाया कि ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र है।

इसी प्रकार झिमली द्वारा बनाये गये (ii), (iii) और (iv) न० चतुर्भुजाकार क्षेत्रों की विपरीत भुजायें परस्पर समानान्तर हैं कि नहीं, स्वप्रयास से कोणो की सहायता से जाँचे।

चतुर्भुजाकार क्षेत्र	विपरीत भुजाओं की लम्बाई	$\angle A + \angle B$	AD और BC भुजाओं में सम्बंध	$\angle B + \angle C$	AB और DC का सम्बंध	निष्कर्ष
(ii) न० गुलाबी चतुर्भुजाकार क्षेत्र ABCD	AB = DC = ☐ AD = BC = ☐	$\angle A + \angle B =$ ☐	$AD \parallel BC$	$\angle B + \angle C = 180°$	$AB \parallel DC$	ABCD समानान्तर चतुर्भुजाकार से
(iii) न० आसमानी चतुर्भुजाकार क्षेत्र ABCD	$AB \neq DC$ $AD \neq BC$	$\angle A + \angle B = 180°$	$AD \parallel BC$	$\angle B + \angle C \neq 180°$	AB और DC परस्पर समानान्तर नहीं	समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र नहीं
(iv) न० नीला चतुर्भुजाकार क्षेत्र ABCD	☐	☐	☐	☐	☐	☐

(स्वयं करे)



शाबा ने (i) न० ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र का एक विकर्ण BD खींचा और जाँच की सहायता से एकान्तर कोणों को माप कर लिखा। जाँच से मापकर पाया, $\angle ADB = \angle DBC$

किन्तु AD और BC सरल रेखाओं से BD के मिलने के कारण बने एकान्तर कोणद्वय $\angle ADB$ और $\angle DBC$ के मान समान हैं। AD ॥ BC

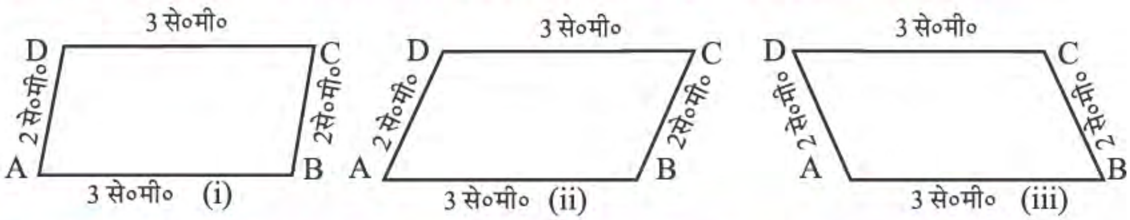
फिर जाँच से मापकर पाते हैं। $\angle ABD = \angle CDB$

अर्थात् AB और DC सरल रेखाओं की BD के मिलने से बने एकान्तर कोणद्वय $\angle ABD$ और $\angle CDB$ के मान समान हैं। ∴ AB ॥ DC

ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र के विकर्ण खींचकर और एकान्तर कोणों को मापकर पाया कि AB ॥ DC और AD ॥ BC ∴ ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज के आकार का क्षेत्र हैं।

इसी प्रकार हम (ii), (iii) और (iv) न० चतुर्भुजाकार क्षेत्रों के विकर्ण खींचकर और एकान्तर कोणो को मापकर देखते हैं कि (ii) न० और (iv) न० चतुर्भुजाकार क्षेत्र समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र हैं किन्तु (iii) न० चतुर्भुजाकार से० समानान्तर चतुर्भुजाकार नहीं हैं।

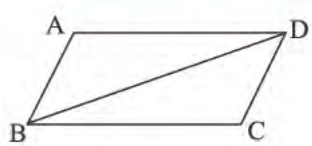
हमने झिमली की तरह अनेक चतुर्भुज ABCD बनाया जिनकी AB=DC=3 cm एवं AD=BC=2 cm



उसी प्रकार (i), (ii) और (iii) न० चतुर्भुजों के कोणो को चांदा से मापकर देखते हैं, प्रत्येक चतुर्भुज ☐ [स्वयं जाँचकर लिखे]

स्वप्रयास से पाया— चतुर्भुज की विपरीत भुजायें परस्पर समान होने पर चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हैं।

प्रमेय : **16** तर्क सहित प्रमाणित करे कि यदि किसी चतुर्भुज की विपरीत भुजाओं की लम्बाई समान हो तो यह चतुर्भुज एक समानान्तर चतुर्भुज होगा।



दिया गया है : ABCD चतुर्भुज में AB=DC और AD=BC

प्रमाणित करता है कि : ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

रचना : BD विकर्ण खींचा।

प्रमाण : ΔABD और ΔCDB में, AB=DC; AD=BC और BD उभयनिष्ठ भुजा है।

∴ $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ (सर्वांगसमता की S-S-S शर्त्त से)

$\angle ADB = \angle CBD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण)

किन्तु AD और BC से BD के मिलने से $\angle ADB$ = एकान्तर $\angle CBD$

∴ AD ॥ BC

फिर, $\angle ABD = \angle CDB$ (सर्वांगसम त्रिभुजों संगत कोण); किन्तु ये एकान्तर कोण है

∴ AB ॥ DC

ABCD चतुर्भुज में AD ॥ BC और AB ॥ DC

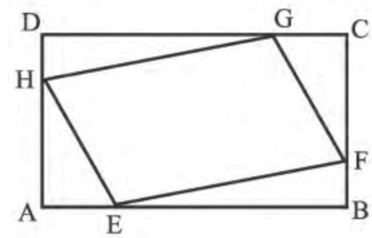
∴ ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है **(प्रमाणित)**

समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजायें परस्पर समान होती हैं — इसे प्रमेय के विलोम रूप में पाया ''चतुर्भुज की विपरीत भुजायें परस्पर समान हो तो यह चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज होगा'' प्रमेय। इसीलिये द्वितीय प्रमेय को पहले **प्रमेय का विलोम प्रमेय** कहा जाता है।

प्रयोग : 17 आयताकार चित्र ABCD में AB, BC, CD, DA भुजाओं पर क्रमशः E, F, G, H बिन्दु इस प्रकार स्थित है कि AE = CG और BF = DH; तर्क सहित प्रमाणित करें कि EFGH एक समानान्तर चतुर्भुज है।

प्रदत्त : ABCD आयताकार चित्र में AE = CG और BF = DH

प्रमाण : EFGH चतुर्भुज एक समानान्तर चतुर्भुज है।



प्रमाण : AB = DC, AE = CG

$\therefore$ AB – AE = DC – CG

$\therefore$ BE = DG

ΔDHG और ΔBEF में

DG = EB,

$\angle$GDH = $\angle$EBF = 1 समकोण

DH = FB

$\therefore$ $\Delta DHG \cong \Delta BEF$ [सर्वांगसमता की S-A-S शर्त्त से]

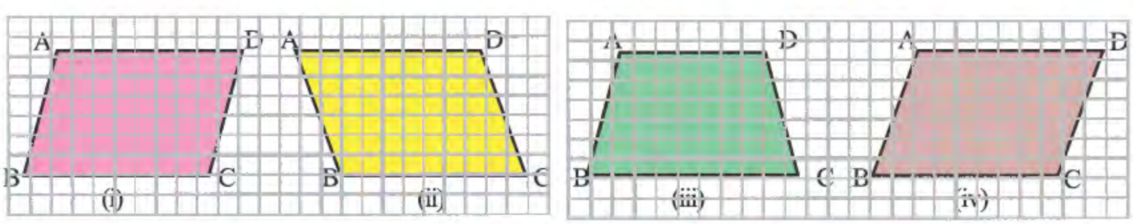
$\therefore$ HG = EF .... (i)

इसी प्रकार प्रमाणित किया जा सकता है कि HE = GF .... (ii)

$\therefore$ (i) और (ii) से पाते हैं, EFGH एक समानान्तर चतुर्भुज है।

मेरे मित्र रहमत ने निश्चित किया है कि हाथ से बनायी हुई चीजों को दिखाने के कार्यक्रम में वह पिचबोर्ड से कुछ ऐसे नये प्रकार के चतुर्भुज बनायेगा जिनके विपरीत कोण परस्पर समान होगें।

इसलिए उसने अपने पुराने बनाये पिचबोर्ड पर ढ़ेर सारे छोटे बड़े रंगीन ऐसे चतुर्भुजाकार क्षेत्र बनाया। जिनके विपरीत कोण परस्पर समान थे।



चाँदे की सहायता से मापकर देखें कि ऊपर के (i) न० चतुर्भुजाकार क्षेत्र के विपरीत कोण परस्पर समान हैं।

चाँदे की सहायता से मापकर देखते हैं, $\angle A = \angle C =$ ☐ और $\angle B = \angle D =$ ☐ अर्थात् (i) न० ABCD न० चतुर्भुजाकार क्षेत्र के विपरीत कोण परस्पर समान है।

विभिन्न तरह से लिये गये जाँचों और स्वप्रयासों से जाँच करके पाया है कि समानान्तर चतुर्भुज के विपरीत कोण समान होते हैं। किन्तु किसी चतुर्भुज के विपरीत कोण बराबर होने पर वह समानान्तर चतुर्भुज होगा कि नहीं जाँचें।

स्वप्रयास

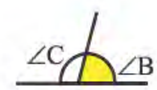
पहले हम देखते हैं कि गुलाबी रंग का (i) न० ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र है कि नहीं अर्थात् ABCD चतुर्भुज क्षेत्र की विपरीत भुजायें परस्पर समानान्तर हैं क्या ?

(i) अब ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र के कोणों को रंग कर चारों कोणों को काट लेगें।

(ii) अब $\angle A$ और $\angle B$ को सटाकर पास-पास रखने पर पार्श्व के चित्र की तरह पाया। अर्थात् $\angle A + \angle B = 180°$ पाया, AD और BC सरल रेखा खण्डों से AB के मिलने से बने एक ही ओर के अन्त: कोणों का योग 180° हैं।

$\therefore AD \parallel BC$

(iii) फिर $\angle B$ और $\angle C$ को आस-पास बगल के चित्र की भाँति रखने पर पाया $\angle B + \angle C = 180°$



$\therefore$ पाया कि, AB और DC सरलरेखा खण्डों से BC के मिलने से एक ही ओर बने अन्त:कोणों का योग 180° हैं।

$\therefore AB \parallel DC$

$\therefore$ स्वप्रयास से पाया कि, ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र विपरीत कोणों के समान होने पर समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र होगा।

इसी प्रकार रहमत द्वारा बनायें गयें (ii), (iii) और (iv) न० चतुर्भुत क्षेत्रों के कोणों को काटकर जाँच करके क्या मिलता हैं। देखें

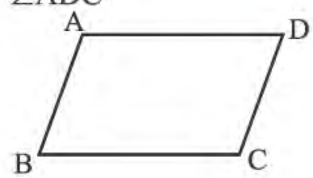
चतुर्भुजाकार क्षेत्र	विपरीतकोणों का परिमाप	$\angle A + \angle B$	AD और BC भुजाओं का संबंध	$\angle B + \angle C$	AB और DC भुजाओं का संबंध	निष्कर्ष
(ii) न० पीले रंग ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र	$\angle A = \angle C = \square$ $\angle B = \angle D = \square$	180°	$AD \parallel BC$	180°	$AB \parallel DC$	चतुर्भुकार क्षेत्र समानान्तर चतुर्भुज के आकार का हैं।
(iii) न० हरे रंग का ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र	$\angle A \neq \angle C$ $\angle B \neq \angle D$	180°	$AD \parallel BC$	$\angle B + \angle C \neq 180°$	AB और DC परस्पर समानान्तर नहीं	चतुर्भुकार क्षेत्र समानान्तर चतुर्भुज के आकार का नहीं हैं।
(iv) न० बादामी रंग का ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र						(स्वयं करे)

स्वप्रयास से देखते हैं, चतुर्भुजाकार क्षेत्र के विपरीत कोणों के परस्पर समान होने पर चतुर्भुजाकार क्षेत्र समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र होगा।

हमने और दो चतुर्भुज बनाये जिनके विपरीत कोण परपस्पर समान है। इस बार स्वप्रयास से जाँच कर देखते है कि चतुर्भुजाकार दोनों क्षेत्र समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र है कि नहीं। [स्वयं करें]

प्रमेय : 17 तर्क सहित प्रमाणित करे कि किसी चतुर्भुज विपरीत कोण परस्पर समान होने पर यह चतुर्भुज एक समानान्तर चतुर्भुज होगा।

दिया गया है (प्रदत्त): ABCD चतुर्भुज में $\angle BAD = \angle BCD$ और $\angle ABC = \angle ADC$



प्रामाणित करना है : ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

प्रमाण : एक चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 4 समकोण होता है।

$\therefore \angle BAD + \angle ABC + \angle BCD + \angle ADC = 4$ समकोण

या, $\angle BAD + \angle ABC + \angle BAD + \angle ABC = 4$ समकोण

या, $2(\angle BAD + \angle ABC) = 4$ समकोण

$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 2$ समकोण

$\because$ AD और BC सरल रेखा खण्डों से AB सरल रेखा खण्ड के मिलने से बने एक ही और के अन्त कोणों का योग 2 समकोण है, $\because AD \parallel BC$

इसी प्रकार प्रमाणित किया जा सकता है, $AB \parallel DC$

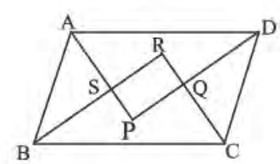
$\therefore$ ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है। [प्रमाणित]

प्रयोग : 18 प्रमाणित करे कि किसी समानान्तर चतुर्भुज के चारों कोणों के समद्विभाजक परस्पर मिलकर आयताकार चित्र बनाते है।

दिया गया है (प्रदत्त): ABCD समानान्तर चतुर्भुज के $\angle BAD, \angle ABC, \angle BCD$ और $\angle ADC$ के समद्विभाजक क्रम से AP, BR, CR और DP परस्पर मिलकर PQRS चतुर्भुज बनाते है।

प्रामाणित करना है : PQRS एक आयताकार चित्र (आयत) है।

प्रमाण : ABCD समानान्तर चतुर्भुज में $AB \parallel DC$ और AD इनसे मिलती है।



$\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$

या, $\frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ADC = 90^\circ$

$\therefore \angle PAD + \angle PDA = 90^\circ$

$\therefore$, Δ APD -में $\angle APD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

इसी प्रकार प्रमाणित किया जा सकता है कि $\angle BRC=90^\circ$, $\angle ASB=90^\circ=\angle RSP$, $\angle CQD=90^\circ=\angle RQP$

$\therefore$ PQRS में $\angle PSR = \angle PQR = 90^\circ$ और $\angle SRQ = \angle SPQ = 90^\circ$

$\because$ PQRS चतुर्भुज के विपरीत कोण परस्पर समान है, $\therefore$ PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज है।

फिर PQRS समानान्तर चतुर्भुज के प्रत्येक कोण का मान 90° है, $\therefore$ PQRS एक आयताकार क्षेत्र (आयत) है।

प्रमाणित करें कि किसी चतुर्भुज के दो विपरीत कोण परस्पर समान हो और विपरीत भुजाओ की एक जोड़ी समानान्तर हो तो यह चतुर्भुज एक समानान्तर चतुर्भुज है। [स्वयं करें]

समानान्तर चतुर्भुज के विपरीत कोण परस्पर समान होते हैं, इस प्रमेय का विलोम प्रमेय क्या मिला —लिखें।

हमने स्वप्रयास से पाया कि कोई चतुर्भुज निम्नलिखित शर्तों पर एक समानान्तर चतुर्भुज होगा—

(i) यदि चतुर्भुज के विपरीत भुजाओं की लम्बाई परस्पर समान हैं।

(ii) यदि चतुर्भुज के विपरीत कोण परस्पर समान हैं।

किन्तु यदि चतुर्भुज की एक जोड़ी विपरीत भुजायें परस्पर समान और समानान्तर हों तब क्या चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज होगा?

हमलोगों के विद्यालय में नौवीं और दशवी कक्षा के छात्र–छात्राओं में वाद–विवाद सभा होगी। प्रधानाध्यापक महोदय ने हमारी कक्षा की सहेली को यह दायित्व दिया कि वह वाद–विवाद सभा में पक्ष में और विपक्ष में बोलने वालों के नामों की तालिका आर्ट पेपर पर लिखकर नोटिस बोर्ड पर लटका दे। देखा कि सहेली ने समान लम्बाई के 2 नीला धागे लेकर आर्ट पेपर के ऊपर और नीचे किनारो के बराबर गोंद से सटा दिया। इसके बाद एक ही ओर के नीला धागे के दोनों किनारों पर और एक नीला धागा रखकर गोंद से सटाया और दूसरे किनारों पर भी इसी प्रकार नीला धागा लगा दिया।

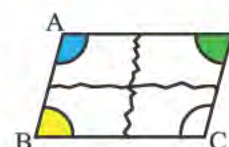
चारो ओर नीला धागे का बोर्डर बनाकर उसने आर्ट पेपर के चारों किनारे पर बोर्डर के बराबर आर्ट पेपर कैंची से काटकर ऊपर दिये गयें चित्र की तरह बना लिया। इसके बाद वाद–विवाद के पक्ष और विपक्ष में भाग लेने वालों का नाम लिखा

देखते हैं कि आर्ट पेपर के ऊपर नीचे के किनारे के बराबर आर्ट पेपर की लम्बाई समान और समानान्तर हैं।

इस प्रकार के चतुर्भुज क्षेत्र को क्या कहते हैं?

मैनें भी इसी प्रकार चतुर्भुजाकार क्षेत्र बनाया जिसकी एक जोड़ी विपरीत भुजायें समान और समानान्तर हैं।

स्वप्रयास से जाँचे कि चतुर्भुजाकार क्षेत्र किस प्रकार का चतुर्भुज हैं?

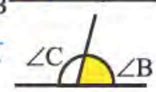


पहले की तरह ∠B और ∠C को काटकर आस–पास रखके देखते हैं।

$\angle B + \angle C = 180^\circ$ अर्थात् दूसरी जोड़ी विपरीत भुजायें परस्पर समानान्तर हैं।

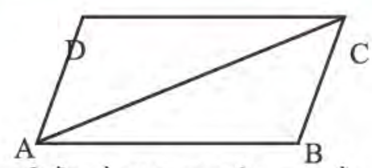
$\therefore AB \parallel DC$

∴ पाते हैं, ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।



∴ स्वप्रयास से पाते हैं कि चतुर्भुज का विपरीत भुजाओं की एक जोड़ी के समान और समानान्तर होने पर चतुर्भुज एक समानान्तर चतुर्भुज होगा।

प्रमेय : 18 तर्क सहित प्रमाणित करें कि किसी चतुर्भुज के विपरीत भुजाओं की एक जोड़ी परस्पर समान और समानान्तर हो तो यह एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।



दिया गया हैं : ABCD चतुर्भुज में $AB = DC$ और $AB \parallel DC$

प्रमाणित करना हैं : ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।

रचना : और AC उभयनिष्ट भुजा हैं।

प्रमाण : ΔABC और ΔCDA में $AB = DC$ [प्रदत्त]

$\angle BAC =$ एकान्तर $\angle ACD$ [$\because AB \parallel DC$ और AC मिलती हैं] और AC उभयनिष्ट भुजा हैं।

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (S-A-S सर्वागसमता की शर्त से)

$\therefore \angle ACB = \angle DAC$ [सर्वागसमता त्रिभुजों के संगत कोण]

किन्तु BC और AD सरल रेखा खण्डों से AC के मिलने से बने ये एकान्तर कोण हैं।

$\therefore BC \parallel AD$

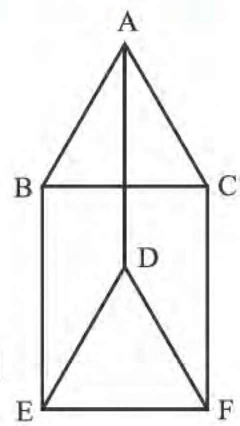
∴ ABCD चतुर्भुज में $AB \parallel DC$ और $BC \parallel AD$

∴ ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज हैं। **(प्रमाणित)**

स्वयं हल करें - 6.2

1. फिरोज ने PQRS एक चतुर्भुज बनाया है जिसमें PQ = SR और PQ || SR; तर्क सहित प्रमाणित करें कि PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।
2. शबा ने दो सरल रेखा खण्ड AD और BC ऐसी बनायी है कि AD || BC और AD = BC;है तर्क सहित प्रमाणित करें कि AB = DC और AB || DC.

प्रयोग : 20 नीचे दिये गये चित्र के ΔABC और ΔDEF में AB = DE ओर AB || DE, BC = EF और BC || EF है। ΔABC के शीर्ष बिन्दुओं A,B और C को ΔDEF के शीर्ष बिन्दुओं D,E और F को मिलाया। प्रमाणित करें कि (a) चर्तुभुज ABED एक सामानान्तर चतुर्भुज है।(b) चतुर्भुज BEFC एक समानान्तर चतुर्भुज है।(c) चतुर्भुज ACFD एक समानान्तर चतुर्भुज है। और (d) ΔABC ≅ ΔDEF



प्रमाण : (a) चतुर्भुज ABED में AB = DE और AB || DE [प्रदत्त]

∴ चतुर्भुज ABED एक समानान्तर चतुर्भुज है।

(b) BEFC चतुर्भुज में BC = ☐ और BC || ☐ [प्रदत्त]

∴ चतुर्भुज BEFC एक समानान्तर चतुर्भुज है।

(c) ∵ ABED एक समानान्तर चतुर्भुज है।

∴ BE = AD और BE || AD ———(i)

फिर BEFC एक समानान्तर चतुर्भुज है

∴ BE = CF और BE || CF ———(ii)

(i) और (ii) से पाते हैं, AD || CF और AD = CF; ∴ ADFC एक ☐

(d) ΔABC और ΔDEF में, AB = DE, BC = EF [प्रदत्त]

और AC = DF [∵ ADFC एक समानान्तर चतुर्भुज है]

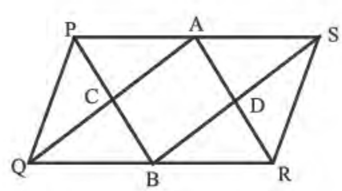
∴ ΔABC ≅ ΔDEF (सर्वांगसमता की S-S-S शीर्ष से)

प्रयोग : 21 PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज है। A और B क्रमश: PS और QR के मध्य P, B; Q, A; R, A और B, S को मिलाया। PB और QA एक दूसरे को C बिन्दु पर RA और BS एक दूसरे को D बिन्दु पर काटते हैं। प्रमाणित करें कि (a) चतुर्भुज AQBS एक समानान्तर चतुर्भुज है। (b) चतुर्भुज PBRA एक समानान्तर चतुर्भुज है। (c) चतुर्भुज ACBD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

प्रमाण : (a) PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज है।

जैसा कि PS || QR और PS = QR

$\therefore \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2}QR$



इसलिए, PA = BR और AS = QB

∴ AQBS चतुर्भुज में AS || QB [∵ PS || QR]

और AS = QB

∴ AQBS एक समानान्तर चतुर्भुज है।

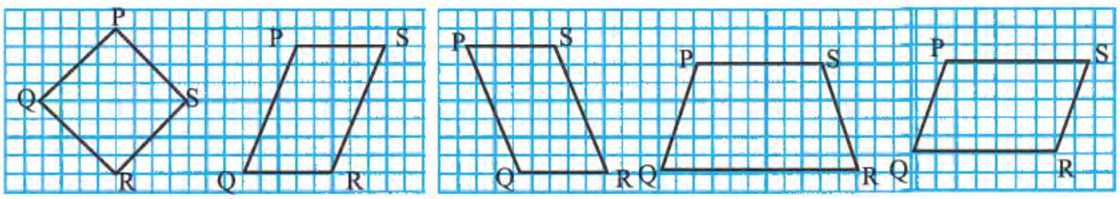
(b) इसी प्रकार प्रमाणित कर पाते हैं कि PBRA एक समानान्तर चतुर्भुज है। [स्वयं करें]

(c) ACBD चतुर्भुज में AC || DB [∵ AQBS एक समानान्तर चतुर्भुज है।]

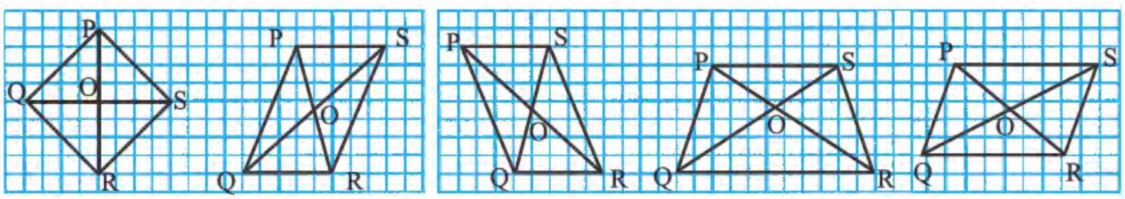
BC || DA [∵ PBRA समानान्तर चतुर्भुज है।]

∴ ACBD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

प्रमाण :



मैंने सलेम द्वारा बनाये गये PQRS चतुर्भुज का विकर्ण देखा है। PR और QS खींचा। अब इसे मापकर देखें कि किस चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।



वर्गांकित कागज पर वर्ग घरों की गणना करके पाते है (i) न० PQRS चतुर्भुज के विर्कण PR और QS एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते है और PO = OR = ☐, QO = OS = ☐ अर्थात् (i) न० चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

PQRS चतुर्भुज के चार कोणों (∠P, ∠Q, ∠R और ∠S) को अलग-अलग काटकर, सटाकर और रखकर देखा कि $\angle P + \angle Q = 180^o$ और $\angle Q + \angle R = 180^o$

अत: पाते हैं PS || QR और PQ || SR; अर्थात् PQRS चतुर्भुज एक समानान्तर चतुर्भुज है।

अब (ii), (iii), और (v) न० चतुर्भुजों के चार कोणों (∠P, ∠Q, ∠R और ∠S) के टुकड़े करके आस-पास रखकर देखते हैं, $\angle P + \angle Q = 180^o$ और $\angle Q + \angle R = 180^o$

अत: पाते हैं PS || QR और PQ || SR; अर्थात् PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज है।

(iv) न० चतुर्भुज के लिये स्वयं PO, OR, QO, और OS की लम्बाई मापें और चारों कोणों को काटकर आस पास रखें और देखे कि समानान्तर चतुर्भुज है कि नहीं [स्वयं करें]

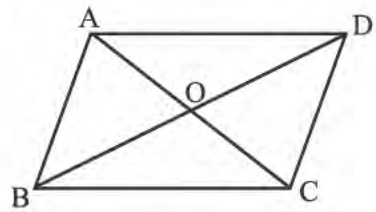
हम वर्गांकित कागज पर कोई चतुर्भुज बनाकर इसी प्रकार जाँच कर पाते हैं ।

चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें तो यह एक समानान्तर चतुर्भुज होता है।

प्रमेय : **19** तर्क सहित प्रमाणित करें कि किसी चतुर्भुज के दोनों विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें तो चतुर्भुज एक समानान्तर चतुर्भुज होगा।

दिया गया है : ABCD चतुर्भुज के AC और BD दो विकर्ण एक दूसरे को बिन्दु O पर समद्विभाजित करते हैं अर्थात् AO = OC और BO = OD

प्रमाणित करना है: ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है।



प्रमाण : ΔAOD और ΔBOC में, AO = OC

$\angle AOD = \angle BOC$ [सम्मुखाभिमुख कोण]

BO = OD

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOC$ [सर्वांगसमता की S-A-S शर्त से]

और AD = BC [सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजायें]

और $\angle OAD = \angle OCB$ [सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण]

किन्तु AD और BC सरल रेखा खण्डो से AC रेखा खण्ड के मिलने से बने एकान्तर कोण हैं

इसलिए, $AD \parallel BC$

चूँकि, ABCD चतुर्भुज में $AD \parallel BC$ और AD = BC

$\therefore$ ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है। [प्रमाणित करें]

ऊपर का प्रमेय अर्थात् चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें तो यह समानान्तर चतुर्भुज होगा — किस प्रमेय का विलोम प्रमेय है। [स्वयं लिखें]

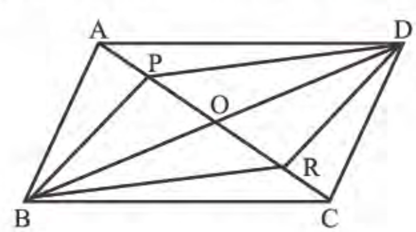
प्रयोग : 22 ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है। इस समानान्तर चतुर्भुज में AC और BD दो विकर्ण O बिन्दु पर मिलते है। AC विकर्ण पर P और R दो बिन्दु ऐसे हैं कि AP = CR है। तो प्रमाणित करें कि PBRD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

दिया गया है : (i) ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

(ii) AC विकर्ण पर P और R दो बिन्दु ऐसे है कि AP = CR है।

प्रमाणित करना है: चतुर्भुज PBRD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

प्रमाण : ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है, इसलिए इसके विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।



$\therefore$ AO = CO और BO = DO.

दिया गया है AP = CR

चूँकि, AO – AP = CO – CR

$\therefore$ OP = OR

फिर, BO = OD

चतुर्भुज PBRD के विकर्ण द्वारा एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं

$\therefore$ PBRD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

प्रयोग : 23 किसी वृत्त में AB और CD दो व्यास हैं। प्रमाणित करें कि ACBD एक आयताकार क्षेत्र है।

दिया गया है : O केन्द्र वाले वृत्त के AB और CD दो व्यास है।

प्रमाणित करना है: ACBD एक आयताकार क्षेत्र है।

प्रमाण : ACBD चतुर्भुज में OA=OB और OC=OD; [एक ही वृत्त के अर्द्धव्यास OA , OB, OC, तथा OD है]।

चूँकि, ACBD के दोनों विकर्ण AB और CD एक दूसरे को बिन्दु O पर समद्विभाजित करते हैं।

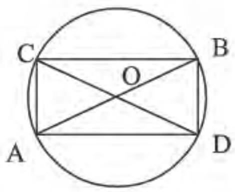
इसलिए, ACBD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

Δ ADB और Δ CBD में AB = CD [एक ही वृत्त के व्यास है],

AD = CB [इसलिए, ACBD समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजायें हैं] BD उभयनिष्ठ है।

$\therefore \Delta ADB \cong \Delta CBD$ [सर्वांगसमता की S-S-S शर्त्त से]

$\therefore \angle ADB = \angle CBD$ [सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण]



फिर $\angle ADB + \angle CBD = 180^\circ$ [AD||CB एवं DB इनसे मिलती है]

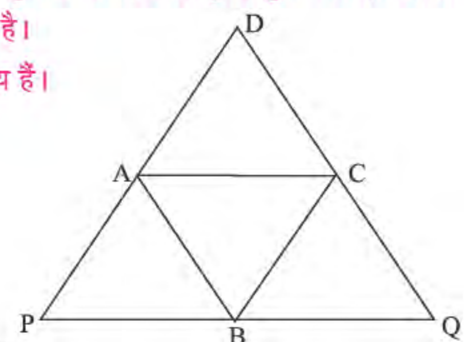
या, $\angle ADB + \angle ADB = 180^\circ$

या, $2\angle ADB = 180^\circ \therefore \angle ADB = 90^\circ$

समानान्तर चतुर्भुज ACBD का एक कोण समकोण है

$\therefore$ आयताकार चित्र की परिभाषा से पाते हैं ACBD एक आयताकार चित्र (क्षेत्र) है। **(प्रमाणित)**

प्रयोग : 24 BCD एक समानान्तर चतुर्भुज है। DA और DC भुजाओं को P और Q बिन्दुओं तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि AP = DA और CQ = DC है। प्रमाणित करें कि P, B और Q तीनों बिन्दु एक रेखीय हैं।



दिया गया है : (i) ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

(ii) AP = DA और CQ = DC

प्रमाणित करना है: P, B और Q एक रेखीय बिन्दु हैं।

रचना : P, B; B, Q और A, C को मिलाया।

प्रमाण : चूँकि, ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

इसलिए, DA = CB और DA || CB; दिया गया है कि AP = DA

$\therefore$ AP = CB और AP || CB

APBC चतुर्भुज की एक जोड़ी विपरीत भुजायें परस्पर समान और समानान्तर हैं।

इसलिए, APBC एक समानान्तर चतुर्भुज है। $\therefore$ PB || AC,

इसी प्रकार पाते हैं चूँकि, ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ DC = AB और DC || AB; दिया गया है कि CQ = DC,

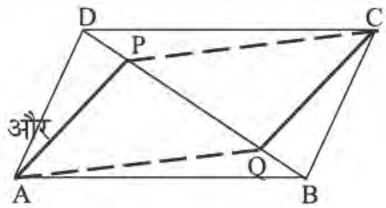
$\therefore$ CQ = AB और CQ || AB; $\therefore$ CABQ एक समानान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ BQ || AC

चूँकि, PB || AC और BQ || AC $\therefore$ PB || BQ

फिर, B बिन्दु PB और BQ दो सरल रेखा खण्डों में है $\therefore$ PB और BQ एक ही सरल रेखा में हैं। अत: P, B और Q बिन्दु एक रेखीय बिन्दु हैं। **(प्रमाणित)**

प्रयोग : **25** ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है। AP और CQ क्रमश: शीर्ष बिन्दु A और C से विकर्ण BD पर लम्ब हैं। प्रमाणित करें कि (i) Δ APB $\cong$ ΔCQD (ii) AP = CQ और (iii) AQCP एक समानान्तर चतुर्भुज है।



दिया गया है : (i) ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है।
(ii) AP $\perp$ BD और CQ $\perp$ BD

प्रमाणित करना है: (i) Δ APB $\cong$ ΔCQD, (ii) AP = CQ और
(iii) AQCP एक समानान्तर चतुर्भुज है।

प्रमाण : Δ APB और ΔCQD में

$\angle$BPA = $\angle$ CQD = 90° [चूँकि, AP $\perp$ BD और CQ $\perp$ BD]

$\angle$ABP = एकान्तर $\angle$CDQ [$\because$ ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है और BD विकर्ण $\therefore$ DC || AB और DB इनसे मिलती है]

AB = DC [ABCD समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजायें हैं]

$\therefore$ Δ APB $\cong$ ΔCQD [A-A-S सर्वांगसमता की शर्त्तानुसार] **[प्रमाणित]**

AP = CQ [समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजायें हैं।] **[प्रमाणित]**

फिर, AP || CQ [$\because$ AP और CQ दोनों सरलरेखा खण्ड BD पर लम्ब है]

$\therefore$ AQCP चतुर्भुज में विपरीत भुजाओं की एक जोड़ी समान और समानान्तर है।

$\therefore$ AQCP एक समानान्तर चतुर्भुज है **[प्रमाणित]**

हल करें — 6

1. प्रमाणित करें कि किसी समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण द्वारा की लम्बाई समान हो तो यह एक आयत क्षेत्र हैं।
2. प्रमाणित करें कि किसी समानान्तर चतुर्भुज के विकर्णों की लम्बाई समान हो और दोनों विकर्ण एक दूसरे को लम्ब रूप में काटे तो यह समानान्तर चतुर्भुज एक वर्ग है।
3. प्रमाणित करें कि किसी समानान्तर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण एक दूसरे को लम्बवत् काटे तो यह एक रोम्बस होगा।
4. ABCD समानान्तर चतुर्भुज में AC और BD विकर्ण एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं। O बिन्दु से गुजरने वाली कोई रेखा AB और DC भुजाओं से क्रम से P और Q बिन्दु पर मिलती है। प्रमाणित करें कि OP = OQ होते हैं।
5. प्रमाणित करें कि समद्विबाहु ट्रेपिजियम को समानान्तर भुजाओं में से किसी एक भुजा के संलग्न कोण समान होते हैं।
6. ABCD वर्गाकार चित्र में BC भुजा पर P कोई बिन्दु है। बिन्दु B से AP पर खींचा गया लम्ब DC भुजा को Q बिन्दु पर काटता है। प्रमाणित करें कि AP = BQ
7. प्रमाणित करें कि एक चतुर्भुज की दो विपरीत कोण समान हो और दो विपरीत भुजायें परस्पर समानान्तर हो तो यह चर्तुभुज एक समानान्तर चतुर्भुज है।
8. ΔABC की BP और CQ मध्यिकाओं को क्रमश: R और S बिन्दु तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि BP = PR और CQ = QS है। प्रमाणित करें कि S, A, R बिन्दु एक रेखीय हैं।
9. समानान्तर चर्तुभुज PQRS के विकर्ण SQ को K और L बिन्दुओं से तीन समान भागों में बाँटा गया है PK, SQ को M बिन्दु पर और RL, PQ को N बिन्दु पर काटते हैं। प्रमाणित करें कि PMRN एक समानान्तर चतुर्भुज है।
10. ABCD और AECF दोनों समानान्तर चतुर्भुज का AC एक विकर्ण है, B, E, D, F बिन्दु एक रेखीय न हों तो प्रमाणित करें कि BEDF एक समानान्तर चतुर्भुज है।

11. ABCD एक चतुर्भुज है। ABCE और BADF दो समानान्तर चतुर्भुज बनाये गये है तो प्रमाणित करें कि CD और EF एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं

12. ABCD समानान्तर चतुर्भुज में AB = 2 AD; प्रमाणित करें कि $\angle$ BAD और $\angle$ ABC के समद्विभाजक द्वारा DC भुजा के मध्य बिन्दु पर लम्बवत् मिलते हैं।

13. ABCD समानान्तर चतुर्भुज की AB और AD भुजा पर ABPQ और ADRS वर्गाकार चित्र बनाये गये जो समानान्तर चतुर्भुज के बाहर हैं। प्रमाणित करें कि PRC समद्विबाहु त्रिभुज है।

14. ABCD समानान्तर चतुर्भुज में $\angle$BAD एक न्यूनकोण है। AB और AD भुजाओं पर दो समबाहु त्रिभुज ABP और ADQ बनाये गये वो समानान्तर चतुर्भुज के बाहर स्थित है। प्रमाणित करें कि CPQ एक समबाहु त्रिभुज है।

15. OP, OQ और OR तीन रेखाखण्ड हैं। OPAQ, OQBR और ORCP तीन समानान्तर चतुर्भुज बनायें गये। प्रमाणित करें कि AR , BP और CQ एक दूसरे को समद्विभाजित हैं।

16. बहुविकल्पीय प्रश्न (M. C. Q.):

(i) ABCD समानान्तर चतुर्भुज में $\angle BAD = 75^\circ$ और $\angle CBD = 60^\circ$ हो तो $\angle$BDC का मान है

(a) 60° (b) 75° (c) 45° (d) 50°

(ii) निम्न ज्यामितीय चित्रों में से किसके विकर्ण परस्पर समान होते हैं।

(a) समानान्तर चतुर्भुज (b) रॉम्बस (c) ट्रेपिजियम (d) आयताकार चित्र

(iii) ABCD समानान्तर चतुर्भुज में $\angle BAD = \angle ABC$ हो तो ABCD समानान्तर चतुर्भुज है

(a) रोम्बस (b) ट्रेपिजियम (c) आयताकार चित्र (d) कोई नहीं

(iv) ABCD समानान्तर चतुर्भुज के BD विकर्ण का मध्य बिन्दु M; है BM, $\angle$ABC को समद्विभाजित करे तो $\angle$AMB का मान है।

(a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 75°

(v) ABCD रोम्बस में $\angle ACB=40^\circ$ हो तो $\angle$ADB का मान है।

(a) 50° (b) 110° (c) 90° (d) 120°

17. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न:

(i) ABCD समानान्तर चतुर्भुज में $\angle A : \angle B = 3:2$ हो तो इसके कोणों के मान लिखें।

(ii) ABCD समानान्तर चतुर्भुज में $\angle$A और $\angle$B के समद्विभाजक CD भुजा के E बिन्दु पर मिलते है। BC भुजा की माप 2 सें०मी० हो तो AB भुजा की लम्बाई लिखें।

(iii) ABCD वर्गाकार चित्र के अन्दर समबाहु त्रिभुज AOB स्थित है। $\angle$COD का मान लिखें।

(iv) ABCD वर्गाकार चित्र की AD भुजा पर M एक बिन्दु है जिससे कि $\angle CMD = 30^\circ$ हो। विकर्ण BD, CM को बिन्दु P पर काटता है तो $\angle$ DPC का मान लिखें।

(v) ABCD रोम्बस की AB भुजा की लम्बाई 4 सें०मी० $\angle BCD = 60^\circ$ हो तो BD विकर्ण की लम्बाई ज्ञात करें।

7 बहुपदीय व्यंजक (POLYNOMIAL)

हमारे विद्यालय में वृक्षारोपण महोत्सव मनाया जायेगा। हमलोगों ने निश्चय किया है कि हम स्वयं कार्ड बनाकर उस दिन के लिये अतिथियों को आमन्त्रण देंगे।

इसीलिये आर्ट पेपर, रंगीन पेंसिल, गोंद, रंगीन कागज इत्यादि खरीदने के लिये हम प्रत्येक छात्र 5 रुपये करके देंगे। हम 18 लोगों में से प्रत्येक ने 5 रुपये दिये तो कुल 18×5 रुपये = ☐ रुपये जुटेंगे।

1 किन्तु हमारे इस काम में कुछ और लोग साथ आयेंगे। उस दशा में कितने रुपये एकत्रित होंगे गणना करते हैं।

यदि इस कार्य में x लोग सहयोग करते है और प्रति व्यक्ति 5 रु० की दर से योगदान करते हैं तब कुल $5 \times x$ रु० = $5x$ रु० इकट्ठा होगा।

5x में 5 स्थिरांक है और x चलराशि है

हमलोगों ने अनेक छोटे-बड़े भिन्न-भिन्न रंगो के वर्गाकार और आयताकार कार्ड बनाये हैं। रिया ने मापकर देखा कि नीले रंग वर्गाकार कार्ड की एक ऊषा की लम्बाई 8 से०मी० है।

∴ उस नीले रंग के वर्गाकार कार्ड की परिसीमा = 4×8 से०मी०।

फिर फिरोज ने एक दूसरे हरे रंग के वर्गाकार कार्ड को मापकर देखा कि प्रत्येक भुजा की लम्बाई 6 से०मी० है।

∴ उस हरे रंग के वर्गाकार की परिसीमा 4×6 से०मी० है।

अर्थात्, यदि वर्गाकार कार्ड की एक भुजा की लम्बाई x से०मी० हो तो उस वर्गाकार कार्ड की परिसीमा 4x से०मी० होगा।

4x में 4 स्थिरांक है और x चलराशि है

जेनिफर ने भी कुछ कार्ड्स बनाये हैं जो त्रिभुजाकार हैं। मापकर देखते हैं कि जेनिफर द्वारा बनाये गये त्रिभुजाकार कार्ड्स में प्रत्येक कार्ड की भुजा की लम्बाई 6 से०मी० है। अर्थात् कार्ड्स समबाहु त्रिभुजाकार हैं।

∴ इस समबाहु त्रिभुज क्षेत्राकार कार्ड की परिसीमा 3×6 से०मी० है।

समबाहु त्रिभुजाकार क्षेत्र की एक भुजा की लम्बाई x इकाई हो, तो परिसीमा 3x इकाई होगी।

3x में 3 स्थिरांक है और x चलराशि है

2 5x, 4x, 3x क्या हैं ?

5x, 4x, 3x आदि बीजगणितीय व्यंजक [Algebraic Expression] हैं। इनमें x चलराशि और 5,4,3 स्थिरांक हैं।

सामान्यत: चलराशि को x, y, z, ... के द्वारा और स्थिरांक को a, b, c .... द्वारा प्रकट किया जाता है।

चलराशि और स्थिरांक अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षर के रूप में प्रकट किये जाने पर भी एक ही परिस्थिति में स्थिरांक का मान निश्चित रहता है किन्तु चलराशि का मान बदलता रहता है।

[जैसे, वर्ग की परिसीमा 4x इकाई है। यहाँ x इकाई (भुजा की लम्बाई) परिवर्तित हो सकती है किन्तु 4 अपरिवर्तित रहता है]

वर्गाकार कार्ड के एक भुजा की लम्बाई x इकाई होने पर इसका क्षेत्रफल x^2 वर्ग इकाई होता है।

3 क्या x^2 एक बीजगणितीय व्यंजक है ?

x^2 एक बीजगणितीय व्यंजक है। इसे x का द्विघात कहा जाता है। x^2 में आधार x और घातांक 2 है।

4 हम वृक्षारोपण महोत्सव के दिन बहुत से पौधों के चारे ले आये। हम छात्र-छात्रायें कुछ पेड़ों के चारे लगायेंगे। मैंने सुमित के साथ मिलकर निश्चय किया है कि x कतारों में फूलों के चारे लगायेंगे। मेहर और साहेब ने हमारे तय किये गये x कतारो में से प्रत्येक कतार में x फूल के चारे लगाये। किन्तु फिर भी 8 फूल के चारे बचे रह गये। मैंने इन 8 चारों को बगीचे में दूसरी जगह लगा दिया। गणना करके देखे कि हमने कितने फूल के चारे लगाये।

हमने कुल (x^2+8) फूलों के चारे लगाये हैं।

क्या $x^2 + 8$ बीजगणितीय व्यंजक है ?

$x^2, x^2 + 8, x^2 - 5x + 2, x^3 + x^2 - x + 1$ ये सभी बीजगणितीय व्यंजक हैं जिनके चलराशियों के घातांक अखण्ड संख्यायें हैं।

5 ऐसे बीजगणितीय व्यंजक जिनके घातांक अखण्ड संख्या हो- इन्हें क्या कहा जाता है ?

सभी बीजगणितीय व्यंजक जिनके घातांक अखण्ड संख्या हो- इन्हें क्या कहा जाता है, बहुपदीय व्यंजक **(polynomials)** कहा जाता है।

$x^2, x^2 + 8, x^2-5x+2, x^3 + x^2-x+1, 5x, 4x, 3x$ ये सभी बहुपदीय व्यंजक हैं जिनकी चलराशि x है अर्थात् सभी एक चलराशि युक्त बहुपदीय व्यंजक हैं।

6 $x^2 + 8$ बहुपदीय व्यंजक के x^2 और 8 को क्या कहा जाता है ?

x^2, 8 को $x^2 + 8$ बहुपदीय व्यंजक का पद कहा जाता है।

$x^2 + 8$ बहुपदीय व्यंजक के पद ☐ [2/3] है।

$\therefore$ $x^2 + 8$ एक द्विपदी व्यंजक **(Binomial)** है।
5x, 4x, 3x को एकपदी व्यंजक **(Monomial)** कहा जाता है।
एवं $x^2 - 5x + 2$ को त्रिपदी व्यंजक **(Trinomial)** कहा जाता है।

$x^2 - 5x + 2$ बहुपदी व्यंजक के पद x^2, $-5x$ और 2 हैं।
और $x^3 + x^2 - x + 1$ बहुपदी व्यंजक के पद ☐, ☐, ☐ और ☐ हैं। [स्वयं करें]

किसी बहुपदी व्यंजक के प्रत्येक पद में एक गुणांक (Coefficient) होता है।

$x^2 - 5x + 2$ बहुपदी व्यंजक को लिख सकते हैं, $1.x^2 + (-5)x + 2.x^o$ [$\because x^o = 1$, जहाँ $x \neq 0$]
$\therefore$ $x^2 - 5x + 2$ बहुपदी व्यंजक में x^2 का गुणांक 1, x का गुणांक -5 और x^o का गुणांक 2 है।

$x^3 + x^2 - x + 1$ बहुपदी व्यंजक में x का गुणांक ☐ [1/–1] और x^o का गुणांक ☐ है।

7 8,1, –5, 10, 0 क्या ये भी बहुपदी व्यंजक हैं ?

8,1, –5, 10, 0 आदि स्थिरांक बहुपदी व्यंजक हैं (Constant Polynomials)।

किन्तु 0 (शून्य) को शून्य बहुपदी व्यंजक (Zero Polynomial) कहा जाता है।

बहुपदी व्यंजक को चलराशि के अनुसार साधारणतः p(x), q(y), r(x,y) आदि द्वारा प्रकट किया जाता है।

जैसे $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$q(y) = y^2 + 5y$

$r(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2$ आदि।

8 हमने कुल (x^2+8) चारे लगाये हैं किन्तु अध्यापक/अध्यापिका और अतिथियों ने क्रमशः $(3x^2+2x+5)$ और (x^3+1) चारे लगाये। हम सब ने मिलकर कितने चारे लगाये गणना करके लिखें।

माना कि $f(x) = x^2+8$, $g(x) = 3x^2+2x+5$ एवं $p(x) = x^3+1$

$$\therefore \quad f(x) + g(x) + p(x) = (x^2+8) + (3x^2+2x+5) + (x^3+1)$$

$$= x^3 + (x^2+3x^2) + 2x + (8+5+1)$$

$$= x^3+4x^2+2x+14$$

हम सभी ने मिलकर $(x^3+4x^2+2x+14)$ चारे लगाये।

∴ बहुपदी व्यंजकों का योगफल एक बहुपदी व्यंजक पाया।

9 अब $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 9$ और $q(y) = 2y^2 + 3y + 1$ योग करते हैं।

$f(x) + q(y) = (3x^3 + 2x^2 + 9) + (2y^2 + 3y + 1) = 3x^3 + 2x^2 + 2y^2 + 3y + 10$

फिर बहुपदी व्यंजकों का योगफल एक बहुपदी व्यंजक पाया।

10 किन्हीं बहुपदी व्यंजकों को क्यों न जोड़ा जाय उनका योगफल एक बहुपदी व्यंजक ही होता है। दो बहुपदी व्यंजक लिखकर योग करें। [स्वयं करें]

11 $g(x) = 3x^2 + 2x + 5$ और $f(x) = x^2 + 8$ दो बहुपदी व्यंजकों का वियोगफल (अन्तर फल) एक बहुपदी व्यंजक होगा या नहीं गणना करके देखते हैं।

$$g(x) - f(x) = (3x^2 + 2x + 5) - (x^2 + 8)$$

$$= 3x^2 - x^2 + 2x + 5 - 8 = 2x^2 + 2x - 3$$

∴ दो बहुपदी व्यंजकों का वियोगफल भी एक बहुपदी व्यंजक पाया।

12 हम किन्हीं दो बहुपदी व्यंजकों का वियोग करके पाते है कि बहुपदी व्यंजकों का वियोगफल बहुपदी व्यंजक होता है। दो बहुपदी व्यंजक लिखकर वियोग करें। [स्वयं करें]

13 हम $f(x) = x^2 + 2x + 3$ और $q(x) = x^2 - 2x - 3$ दो बहुपदी व्यंजकों का गुणा करते हैं।

$f(x) \cdot q(x) = (x^2+2x+3)$ और (x^2-2x-3)

$$= x^2 (x^2-2x+3) + 2x (x^2-2x-3) + 3 (x^2-2x-3)$$

$$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 3x^2 - 6x - 9 = x^4 + 2x^2 - 12x - 9$$

अतः बहुपदी व्यंजकों का गुणनफल बहुपदी व्यंजक होगा। स्वयं द्विपदीय व्यंजक लिखकर गुणा करें।

स्वयं करें — 7.1

1. यदि $f(x) = x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 6$, $h(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7$, $g(x) = x + 1$,
$p(x) = x^4 - x^2 + 2$ और $q(y) = 7y^3 - y + 10$

हो तो निम्न बहुपदी व्यंजकों के मान गणना कर लिखें —

(i) $f(x) + g(x)$ (ii) $f(x) - h(x)$ (iii) $f(x) - p(x)$
(iv) $f(x) + p(x)$ (v) $p(x) + g(x) + f(x)$ (vi) $p(x) - q(y)$
(vii) $f(x) \cdot g(x)$ (viii) $p(x) \cdot g(x)$

आज सहाना और सोहम ने कक्षा के श्यामपट (ब्लैक बोर्ड) पर ढेर सारे बीजगणितीय व्यंजक लिखा है।

$5x^2 + 3x - 8$, $y^3 + 2y^2 - 5$, $z^{16} + 5z^7 + 6$, $x + \frac{1}{x}$,
$u + \sqrt[3]{u}$, $7 - v + v^3 + v^7$, $\sqrt{x} + x$, $x^4 + y^2 + 4xy$,
$u + v + 6uv$, $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

सहाना और सोहम द्वारा लिखे गये सभी बीजगणितीय व्यंजक क्या बहुपदी व्यंजक है? बीजगणितीय व्यंजकों के चलराशि के घातांक को देखकर बहुपदी व्यंजकों को लिखें।

$p(x) = 5x^2 + 3x - 8$, $g(v) = 7 - v + v^3 + v^7$, $f(y) = y^3 + 2y^2 - 5$, $f(x,y) = x^4 + y^2 + 4xy$,
$q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$, $S(u,v) = u + v + 6uv$, $t(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(i) $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ (ii) $u + \sqrt[3]{u} = u + u^{1/3}$ एवं (iii) $\sqrt{x} + x = x^{1/2} + x$

(i), (ii) और (iii) न० बीजगणितीय व्यंजकों के चलराशियों के घातांक अखण्ड नहीं हैं। [अर्थात् शून्य अथवा धनात्मक पूर्ण संख्या नहीं हैं] इसीलिए $x + \frac{1}{x}$, $u + \sqrt[3]{u}$ और $\sqrt{x} + x$ बीजगणितीय व्यंजक बहुपदी व्यंजक नहीं हैं।

14 4 बीजगणितीय व्यंजक लिखें जिनमें दो बहुपदी व्यंजक हो और 2 न हो। [स्वयं करें]

15 अब बोर्ड (पट) पर लिखे व्यंजकों के पदों की संख्या लिखें और तीन बहुपदी व्यंजकों के सर्वोच्च घात वाली चलराशियों के घातांक ढूँढकर लिखे।

बहुपदी व्यंजक	पद संख्या	सर्वोच्च घात वाली चलराशि का घातांक
$P(x) = 5x^2 + 3x - 8$	3	2
$f(y) = y^3 + 2y^2 - 5$	☐	3
$q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$	☐	☐
$g(v) = 7 - v + v^3 + v^7$	4	7
$t(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	☐	☐

किसी बहुपदी व्यंजक के सर्वोच्च घात वाली चलराशि के घातांक को उस व्यंजक का क्या कहा जाता है?

उसे बहुपदी व्यंजक का डिग्री (Degree) कहा जाता है।

$p(x) = 5x^2 + 3x - 8$ बहुपदी व्यंजक का डिग्री 2 है
फिर $q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$ का डिग्री 16 है
$\therefore$ f (y), g(v), और t(x) की डिग्री क्रमश : ☐ ☐ और ☐ है [स्वयं लिखे]

16 शून्य को छोड़कर अन्य किसी स्थिरांक बहुपदी व्यंजक की डिग्री का मान कितना होता है ?

शून्य के अलावा अन्य किसी स्थिरांक बहुपदी व्यंजक की डिग्री 0 होती है, जैसे $5 = 5.x^0$, $-7 = -7.x^0$

किन्तु शून्य बहुपदी व्यंजक की डिग्री अपरिमापित है क्योंकि $0 = 0.x^0$, $0 = 0.x^2$

17 5 बहुपदी व्यंजक लिखे जिनकी डिग्री 1 है।

(i) $5x + 2$ (ii) $y + \sqrt{7}$ (iii) $8-3x$ (iv) □ (स्वयं लिखें) (v) □ [स्वयं लिखें]

जिन बहुपदी व्यंजको की डिग्री 1 होती है उनकी चलराशि का सर्वोच्च घात एक होती है। इन सभी बहुपदी व्यंजकों को एक घातीय बहुपदी व्यंजक कहा जाता है क्या ?

जिन सभी बहुपदी व्यंजकों की चलराशि का सर्वोच्च घात एक हो उन्हें एक घात बहुपदी व्यंजक कहा जाता है। ऊपर के $5x + 2$, $y + \sqrt{7}$, $8-3x$, □, □, □, सभी एकघाती बहुपदी व्यंजक हैं।

x चलराशि के एक घाति बहुपदी व्यंजक का या सरल बहुपदी व्यंजक का सामान्य रूप $ax+b$ है
[a,b स्थिरांक और $a \neq 0$]

y चलराशि के एकघाती बहुपदी व्यंजक का या सरल बहुपदी व्यंजक का सामान्य रूप □
[a,b स्थिरांक और $a \neq 0$]

सोहम ने भी बोर्ड पर कई बहुपदी व्यंजक लिखा।

$x^2 + 9$, $2 + x - x^2$, $2x^2 - 7x + 1$, $4y^2 + \sqrt{2}$, $y - \frac{1}{2}$, $z^2 - 4z$

सोहम द्वारा लिखी गयी बहुपदी व्यंजकों की डिग्री □ है; अर्थात् इन बहुपदी व्यंजकों के चलराशि सर्वोच्च घात 2 वाले है अर्थात् बहुपदी व्यंजक की डिग्री 2 है।

18 इन सभी बहुपदी व्यंजकों को क्या द्विघाती बहुपदी व्यंजक कहा जा सकता है ?

$x^2 + 9$, $2+x - x^2$, $2x^2 -7x+1$, $4y^2 + \sqrt{2}$, $y - \frac{1}{2}$, $z^2 - 4z$ — ये सभी द्विघाति बहुपदी व्यंजक हैं।

x चलराशि के द्विघाती बहुपदी व्यंजकों का सामान्य रूप ax^2+bx+c है। [a,b,c स्थिरांक है और $a \neq 0$]

19 पाँच त्रिघाती बहुपदी व्यंजक नीचे लिखते हैं।

(i) $9x^3 + 1$ (ii) $x^3 + x^2 + x + 1$ (iii) $3 - 2x - 3x^3$ (iv) □ स्वयं लिखें (v) □ स्वयं लिखें।

x चलराशि के त्रिघाती बहुपदी व्यंजक का सामान्य रूप ax^3+bx^2+cx+d है। [जहाँ a,b,c,d स्थिरांक है और $a \neq 0$]

n घातयुक्त एक चलराशि का बहुपदी व्यंजक $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$ है
जहाँ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots\ldots\ldots\ldots a_1, a_0$ स्थिरांक और $a_n \neq 0$।
इस बहुपदी व्यंजक में पदों की संख्या □ है और डिग्री □ है।
यदि $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ (सभी स्थिरांकों का मान शून्य हो) हो तो शून्य बहुपदी व्यंजक मिलता है।

20 शून्य बहुपदी व्यंजक की डिग्री [ ] है (स्वयं लिखें)

फिर $f(x, y) = x^4+y^2+4xy$ बहुपदी व्यंजक का चलराशि [ ] [1/2] है।

$\therefore f(x, y)$ दो चलराशि का बहुपदी व्यंजक है।

किन्तु एक से अधिक चलराशि युक्त बहुपदी व्यंजकों की डिग्री का निर्धारण कैसे होगा ?

एक से अधिक चलराशि युक्त बहुपदी व्यंजकों की डिग्री निर्धारित करने के लिये प्रत्येक पद में उपस्थित सभी चलराशियों के घातों का योग किया जाता है और घातांकों का सर्वाधिक योगफल ही उस बहुपदी व्यंजक की डिग्री होता है।

$\therefore f(x, y) = x^4 + y^2 + 4xy$ की डिग्री 4 है।

फिर $s(u,v) = u + v + 6uv$ बहुपदी व्यंजक की डिग्री 2 है।

21 हम नीचे एक से अधिक चलराशि युक्त बहुपदी व्यंजकों की डिग्री लिखें।

(i) $2x^2 + 4y^2 + 3x^2y^2$ (ii) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (iii) a^2+b^2+2ab (स्वयं करें)

22 निम्न बीजगणितीय व्यंजकों में कौन-कौन बहुपदी व्यंजक हैं लिखें और उन सभी व्यंजकों में से प्रत्येक की डिग्री लिखें।

(i) $x^4 + 11x - 9$ (ii) $4y^3 + \sqrt{7}y + 3$ (iii) $\sqrt{y} + 4y$ (iv) 0 (v) $z + \frac{1}{z} + 2$ (vi) 13

(i) $x^4 + 11x - 9$ एक बहुपदी व्यंजक है। क्योंकि इस बीजगणितीय व्यंजक के चलराशि का घात अखण्ड संख्या है। x के सर्वाधिक घात का मान 4 है, इसलिये $x^4 + 11x - 9$ की डिग्री 4 है।

(ii) $4y^3 + \sqrt{7}y + 3$ एक बहुपदी व्यंजक है। क्योंकि इस बीजगणितीय व्यंजक के चलराशि का घात अखण्ड संख्या है। y के घात का सर्वाधिक मान [ ] है, इसलिये $4y^3 + \sqrt{7}y + 3$ की डिग्री 3 है।

(iii) $\sqrt{y} + 4y$ बहुपदी व्यंजक नहीं है, कारण इस बीजगणितीय व्यंजक के चलराशि का घात एक अखण्ड संख्या नहीं एक भिन्न है। ($\because \sqrt{y} = y^{1/2}$)

(iv) 0 एक शून्य बहुपदी व्यंजक है जिसकी डिग्री [ ] है। [स्वयं करें]

(v) और (vi) स्वयं करें।

23 एक एक चलराशि युक्त त्रिपदीय व्यंजक लिखे जिसकी डिग्री 25 हो।

एक एक चलराशि युक्त त्रिपदीय व्यंजक जिसकी डिग्री 25 है वह $2x^{25} + 5x^{10} + 9$ है।

24 एक एक चलराशि युक्त एकपदी व्यंजक लिखें जिसकी डिग्री 8 हो।

$-5x^8$ एक एक चलराशि युक्त एकपदी व्यंजक है जिसकी डिग्री 8 है।

25 एक एक चलराशि युक्त द्विपदीय व्यंजक लिखें जिसकी डिग्री 7 हो।

$2x^7+3x$ **एक एक चलराशि युक्त द्विपदीय व्यंजक है जिसकी डिग्री** 7 है।

26 एक एक चलराशि युक्य द्विघाती बहुपदी व्यंजक और एक त्रिघाती बहुपदी व्यंजक लिखें।

एक एक चलराशि युक्त द्विघाती बहुपदी व्यंजक $9y^2 + 7y + 8$ है।

एक एक चलराशि युक्त त्रिघाती बहुपदी व्यंजक $2x^3 - 11x^2 + 3x$ है।

27 $5x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x + 3$ बहुपदी व्यंजक के x^3, x ও x^0 के गुणांक लिखें।

$5x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x + 3$ बहुपदी व्यंजक में x^3 का गुणांक (–2), x का गुणांक [ ] और x^0 का गुणांक 3 है।

हल करें — 7.1

1. निम्न में से कौन कौन बीजगणितीय व्यंजक बहुपदी व्यंजक हैं लिखें। जो बहुपदी व्यंजक हैं उनमें से प्रत्येक की डिग्री लिखें।

(i) $2x^6 - 4x^5 + 7x^2 + 3$ (ii) $x^{-2} + 2x^{-1} + 4$ (iii) $y^3 - \frac{3}{4}y + \sqrt{7}$ (iv) $\frac{1}{x} - x + 2$
(v) $x^{51} - 1$ (vi) $\sqrt[3]{t} + \frac{t}{27}$ (vii) 15 (viii) 0
(ix) $z + \frac{3}{z} + 2$ (x) $y^3 + 4$ (xi) $\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \sqrt{2}x + 2$

2. निम्न बहुपदी व्यंजकों में कौन एक चलराशि युक्त एकघाती व्यंजक, कौन एक चलराशि युक्त द्विघाती व्यंजक और कौन एक चलराशि युक्त त्रिघाती व्यंजक है लिखें।

(i) $2x + 17$ (ii) $x^3 + x^2 + x + 1$ (iii) $-3 + 2y^2 + 5xy$
(iv) $5 - x - x^3$ (v) $\sqrt{2} + t - t^2$ (vi) $\sqrt{5}\,x$

3. निम्न बहुपदी व्यंजकों से निर्देशानुसार गुणांक बनायें।

(i) $5x^3 - 13x^2 + 2$ में x^3 का गुणांक बनायें। (ii) $x^2 - x + 2$ में x का गुणांक बनायें।
(iii) $8x - 19$ में x^2 का गुणांक बनायें। (iv) $\sqrt{11} - 3\sqrt{11}\,x + x^2$ में x^0 का गुणांक बनायें।

4. निम्न बहुपदी व्यंजकों की डिग्री लिखें।

(i) $x^4 + 2x^3 + x^2 + x$ (ii) $7x - 5$ (iii) 16 (iv) $2 - y - y^3$ (v) $7t$ (vi) $5 - x^2 + x^{19}$

5. दो अलग अलग एक चलराशि युक्त द्विपदी व्यंजक लिखें जिनकी डिग्री 17 हो।

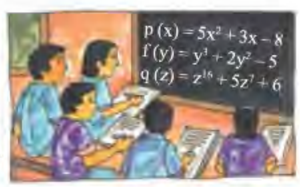
6. दो अलग अलग एक चलराशि युक्त एकपदी व्यंजक लिखें जिनकी डिग्री 4 हो।

7. दो अलग अलग एक चलराशि युक्त त्रिपदी व्यंजक लिखें जिनकी डिग्री 3 हो।

8. निम्न बीजगणितीय व्यंजकों में कौन एक चलराशि युक्त, कौन दो चलराशि युक्त बहुपदी व्यंजक और कौन बहुपदी व्यंजक नहीं है लिखें।

(i) $x^2 + 3x + 2$ (ii) $x^2 + y^2 + a^2$ (iii) $y^2 - 4ax$ (iv) $x + y + 2$ (v) $x^8 + y^4 + x^5y^9$
(vi) $x + \frac{5}{x}$

सहाना और सोहम ने श्यामपट पर जितने बहुपदी व्यंजक लिखे थे हम सभी मित्रों ने उन व्यंजकों को अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिख लिया। हम इन बहुपदी व्यंजकों को लेकर एक मजेदार खेल खेलेंगे।



हममें से प्रत्येक एक एक चलराशि का मान बतायेगा और उस चलराशि के उसी निर्दिष्ट मान के अनुसार बहुपदीय व्यंजकों के मान निर्णय करने की चेष्टा करेंगे।

मैंने कहा, $x = 2$

28 $x = 2$ के लिये $p(x) = 5x^2 + 3x - 8$ का मान निर्णय करें।

$p(x) = 5x^2 + 3x - 8$
$x = 2$ रखने पर पाते है $p(2) = 5(2)^2 + 3 \times 2 - 8$
$= 20 + 6 - 8 = 18$

हममें से प्रत्येय नें $p(2) = 18$ पाया

इसबार फिरोज ने कहा $y = 1$,

29 $y = 1$ के लिये $f(y) = y^3 + 2y^2 - 5$ का मान निर्णय करें।

$f(y) = y^3 + 2y^2 - 5$

$y = 1$ रखने पर पाते हैं, $f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 5 = -2$

30 अब $z = -1$ के लिए $q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$ का मान निर्णय करें।

$q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$

$q(-1) = (-1)^{16} + 5(-1)^7 + 6 = 1 - 5 + 6 = \square$ [स्वयं लिखें]

31 इसबार $v = -2$ के लिये $g(v) = 7 - v + v^3 + v^7$ का मान स्वयं गणना कर लिखें।

32 अब हम $P(x) = 5x^2 + 3x - 8$ का मान निर्णय करें जब $x = 1$ हो।

$P(1) = 5(1)^2 + 3.1 - 8 = 0$

देखते हैं, $P(1) = 0$ पाया, अर्थात् $x = 1$ के लिये $P(x)$ का मान 0 पाया। इसे क्या कहेंगे ?

चूँकि $x = 1$ के लिये $P(x) = 5x^2 + 3x - 8$ का मान 0 है

$\therefore$ 1 को $P(x)$ बहुपदी व्यंजक का शून्य कहा जाता है।

किसी एक संख्या c को $f(x)$ बहुपदी व्यंजक का शून्य कहा जायेगा यदि $f(c) = 0$ हो जाय।

33 $f(x) = 8 - x$ बहुपदी व्यंजक का शून्य क्या होगा गणना करें।

$f(1) = 8 - 1 = 7$

$f(2) = 8 - 2 = 6$

....

$f(8) = 8 - 8 = 0$

$\therefore$ $x = 8$ के लिये $f(x)$ का मान शून्य होता है।

$\therefore$ 8, $f(x)$ बहुपदी व्यंजक का शून्य है।

34 $g(x) = 2x + 16$ बहुपदी व्यंजक का शून्य क्या होगा खोजें।

$g(x)$ बहुपदी व्यंजक के शून्य का निर्णय करने के लिये x के किस मान के लिये $g(x)$ का मान 0 होगा– देखते हैं।

$2x + 16 = 0$

या, $2x = -16$

$\therefore x = -8$

$\therefore$ $x = -8$ के लिये $g(x)$ का मान शून्य होगा।

$\therefore$ -8, $g(x)$ बहुपदी व्यंजक का शून्य है।

सहजतापूर्वक $g(x) = 0$ का हल करके $g(x)$ बहुपदी व्यंजक का शून्य पा लिया। किन्तु $g(x) = 0$ को क्या कहा जाता है ?

$g(x) = 0$ को बहुपदी व्यंजक का समीकरण कहा जाता है और $x = -8$, $g(x) = 0$ बहुपदी व्यंजक के समीकरण का मूल है।

$\therefore$ कहा जाता है, -8, $g(x)$ बहुपदी व्यंजक का शून्य है।

अथवा, -8, $g(x) = 0$ बहुपदी व्यंजक के समीकरण का मूल है।

35 इसबार, 4 इस स्थिरांक बहुपदी व्यंजक का शून्य क्या होगा देखें।

4 इस स्थिरांक बहुपदी व्यंजक का कोई शून्य नहीं है। 4 अर्थात् $4 \cdot x^0$ में x के बदले कोई भी संख्या रखी जाय शून्य नहीं पाया सकता।

$\therefore$ शून्य न हो ऐसे किसी स्थिरांक बहुपदी व्यंजक का शून्य नहीं है।

किन्तु शून्य बहुपदी व्यंजक का शून्य क्या होगा ?

प्रत्येक वास्तविक संख्या ही शून्य बहुपदी व्यंजक का शून्य होती है। क्योंकि 0 को लिखा जाता है $0 \cdot x^5$; x के बदले कोई भी वास्तविक संख्या ली जाय $0 \cdot x^5$ का मान शून्य होगा जैसे $0.0^5 = 0$, $0.3^5 = 0$, $0.(\frac{4}{5})^5 = 0$ इत्यादि। किन्तु $0.x^0$ के लिये $x \neq 0$ रखना होगा। क्योंकि 0^0 अपरिभाषित है।

36 नीचे की सारणी देखें और किस बहुपदी व्यंजक का शून्य होगा गणना कर लिखें।

बहुपदी व्यंजक	बहुपदी व्यंजक का शून्य
$x - 5$	1, 5, 9, –2
$10 - 5x$	7, 0, 1, 2
$2y + 2$	0, 1, –1, 2
$5z$	5, 1, 0, 2

x के किस मान के लिये $x - 5 = 0$ होगा– देखें।

$$x - 5 = 0$$
$$\therefore x = 5$$

$\therefore$ 5, $x - 5$ बहुपदी व्यंजक का शून्य है।

$10 - 5x$, $3y + 3$ और $5z$ बहुपदी व्यंजक के शून्य गणना कर लिखें। [स्वयं लिखें]

देखते हैं, उपरोक्त सभी सरल बहुपदी व्यंजकों का शून्य मात्र एक संख्या है।

37 $f(x) = ax + b$ [a, b, स्थिरांक और $a \neq 0$] सरल बहुपदी व्यंजक का शून्य गणना कर लिखें।

$$f(x) = ax + b = 0$$
$$\therefore x = -\frac{b}{a}$$

$\therefore$ पाते हैं, $x = -\frac{b}{a}$; f (x) सरल बहुपदी व्यंजक का एक मात्र शून्य है।

पाया कि, एक सरल बहुपदी व्यंजक का केवल मात्र एक ही शून्य होता है।

38 एक द्विघाती बहुपदी व्यंजक $q(x) = x^2 - 4$ का शून्य क्या होगा गणना कर लिखें।

$q(x) = x^2 - 4$ और $x = 2$ रखकर पाते हैं, $q(2) = 2^2 - 4 = 0$

$q(x) = x^2 - 4$ और $x = -2$ रखकर पाते हैं, $q(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$

$\therefore$ 2 और –2 दोनों $q(x) = x^2 - 4$ बहुपदी व्यंजक के शून्य हैं।

क्या-क्या मिला लिखते हैं

(i) किसी बहुपदी व्यंजक का शून्य हमेशा शून्य नहीं भी हो सकता है।
(ii) 0 किसी बहुपदी व्यंजक का शून्य हो सकता है।
(iii) प्रत्येक सरल बहुपदी व्यंजक का एक और केवल एक शून्य होता है।
(iv) एक बहुपदी व्यंजक का एकाधिक शून्य हो सकता है।

हल करें — 7.2

1. यदि $f(x) = x^2 + 9x - 6$ हो, तो $f(0)$, $f(1)$ ও $f(3)$ का मान लिखें।

2. निम्न बहुपदी व्यंजक $f(x)$ से $f(1)$ और $f(-1)$ के मान लिखें।

   (i) $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 4$ (ii) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 8$

   (iii) $f(x) = 4 + 3x - x^3 + 5x^6$ (iv) $f(x) = 6 + 10x - 7x^2$

3. निम्न तथ्यों की जाँच करें :

   (i) $P(x) = x - 1$ बहुपदी व्यंजक का शून्य 1 है।

   (ii) $P(x) = 3 - x$ बहुपदी व्यंजक का शून्य 3 है।

   (iii) $P(x) = 5x + 1$ बहुपदी व्यंजक का शून्य $-\frac{1}{5}$ है।

   (iv) $P(x) = x^2 - 9$ बहुपदी व्यंजक का शून्यद्वय 3 और −3 है।

   (v) $P(x) = x^2 - 5x$ बहुपदी व्यंजक का शून्यद्वय 0 और 5 है।

   (vi) $P(x) = x^2 - 2x - 8$ बहुपदी व्यंजक का शून्यद्वय 4 और (−2) है।

4. निम्न बहुपदी व्यंजक के शून्य निर्णय करें :

   (i) $f(x) = 2 - x$ (ii) $f(x) = 7x + 2$ (iii) $f(x) = x + 9$

   (iv) $f(x) = 6 - 2x$ (v) $f(x) = 2x$ (vi) $f(x) = ax + b, (a \neq 0)$

वृक्षारोपण कार्यक्रम में हमलोग अपनी कक्षा को बहुत सुन्दर सजाना चाहते है। इसीलिए हमलोगों ने कुछ पैसे एकत्रित किये हैं।

39 हमलोगों के पास अभी भी 55 रु० अतिरिक्त बचे पड़े हैं। हमलोग 24 लोगों में उस 55 रु० को समान रुप से बाँट देंगे। देखे प्रत्येक जन को कितने रुपये मिलते हैं।

$$24 \overline{)\,55\,}\,2 \qquad \begin{array}{r} 55 \\ -48 \\ \hline 7 \end{array}$$

देखते हैं, प्रत्येक को 2 रुपये देने के बाद 7 रुपये बच जाते हैं।

∴ पाते हैं, $55 = 24 \times 2 + 7$ और $7 < 24$

∴ **भाज्य = भाजक × भागफल + भागशेष** और **0 ≤ भागशेष < भाजक**

यहाँ, भाजक धनात्मक पूर्ण संख्या है और भाज्य, भागफल और भागशेष अखण्ड संख्यायें हैं।

किन्तु यदि हमलोगों के पास 72 रु० बचे होते तब हमलोग 24 लोगों को समान-समान रुपये दे पाते कि नहीं गणना करके देखे।

$$24 \overline{)\,72\,}\,3 \qquad \begin{array}{r} 72 \\ -72 \\ \hline 0 \end{array}$$

यहाँ भागशेष 0,

∴ $72 = 24 \times 3 + 0$

देखते हैं, 24, 72 का उत्पादक है और 72, 24 का अपवर्त्य।

40 हम यदि $(3x^3 + 2x^2 + x)$ रु० को x लोगों में समान-समान बाँट दिये होते तो प्रत्येक को कितने रुपये मिलते गणना करके देखें।

समझते हैं, प्रत्येक $(3x^2 + 2x + 1)$ रु० पायेगा।
यहाँ, भाज्य = $3x^3 + 2x^2 + x$, भाजक = x, भागफल = $3x^2 + 2x + 1$ और भागशेष = 0

$\therefore 3x^3 + 2x^2 + x = (3x^2 + 2x + 1) \times x + 0$

भाज्य = भाजक × भागफल + भागशेष

और भागशेष 0 (शून्य) अथवा भागशेष की डिग्री < भाजक की डिग्री

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 2x + 1 \\
\hline
x & 3x^3 + 2x^2 + x \\
 & -3x^3 \\
\hline
 & 2x^2 \\
 & -2x^2 \\
\hline
 & x \\
 & -x \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

फिर देखते हैं $(3x^3 + 2x^2 + x)$ के प्रत्येक पद में x है।
लिख सकते हैं, $3x^3+2x^2+x = x(3x^2+2x+1)$ जहाँ x और $3x^2+2x+1$ दोनों बहुपदी व्यंजक हैं।
$\therefore$ कह सकते हैं, x, $3x^3 + 2x^2 + x$ का एख उत्पादक है और $3x^3 + 2x^2 + x$, x का अपवर्त्य
इसी प्रकार $(3x^2 + 2x + 1)$, $(3x^3 + 2x^2 + x)$ का एक और अपवर्त्य है।
और $(3x^3 + 2x^2 + x)$, $(3x^2 + 2x + 1)$ का एक और अपवर्त्य है।

माना कि, $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ एवं $g(x) = x$
g (x) सरल बहुपदी व्यंजक का शून्य होगा 0; क्योंकि $g(0) = 0$
अब f (0) का मान क्या पाते हैं देखें।
$f(0) = 3.0 + 2.0 + 0 = 0$
$\therefore$ यहाँ $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ को $g(x) = x$ द्वारा भाग देने पर भागफल $3x^2 + 2x + 1$ मिला।
माना कि, $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$
अर्थात् $f(x) = g(x) \times q(x) + f(0)$

41 यदि हमलोग $(3x^3 + 2x^2 + 1)$ में x द्वारा भाग देते तो क्या पाते देखें।

पाते, $3x^3 + 2x^2 + 1 = x(3x^2 + 2x) + 1$
मान लिया कि $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ और $g(x) = x$
यहाँ $f(0) = 3.0 + 2.0 + 1 = 1$

$\therefore f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ को $g(x) = x$ से भाग देने पर भागफल $3x^2 + 2x$ पाया, जहाँ, $q(x) = 3x^2 + 2x$
अर्थात् $f(x) = g(x) \times q(x) + f(0)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 2x \\
\hline
x & 3x^3 + 2x^2 + 1 \\
 & -3x^3 \\
\hline
 & 2x^2 \\
 & -2x^2 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

42 अब यदि $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ में $g(x) = (x - 1)$ सरल बहुपदी व्यंजक द्वारा भाग दें तो क्या मिलता है देखें।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x + 8 \\
\hline
x - 1 & 3x^2 + 5x + 1 \\
 & \underline{-}3x^2 \mp 3x \\
\hline
 & 8x + 1 \\
 & \underline{-}8x \mp 8 \\
\hline
 & 9
\end{array}
$$

यहाँ, भाज्य = $3x^2 + 5x + 1$, भाजक = $x - 1$,
भागफल = $3x + 8$ और भागशेष = 9
फिर, $3x^2 + 5x + 1 = (x - 1)(3x + 8) + 9$
[स्वयं गणना करके देखें]

$\therefore$ भाज्य = भाजक × भागफल + भागशेष

अर्थात् यदि f (x) और g (x) दो बहुपदी व्यंजक हो और $g(x) \neq 0$ हो तो दो अनन्य (unique) बहुपदी व्यंजक q (x) और r (x) पायेंगे जिससे कि $\mathbf{f(x) = g(x) \times q(x) + r(x)}$ हो, जहाँ $r(x) = 0$ या r (x) की डिग्री < g (x) की डिग्री

पाते हैं, $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$, $g(x) = x - 1$ और

g (x) सरल बहुपदी व्यंजक का शून्य 1 है।

और $f(1) = 3.1^2 + 5.1 + 1 = 9$

$\therefore$ $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ बहुपदी व्यंजक को $g(x) = x - 1$ सरल बहुपदी व्यंजक से भाग देने पर एक ही बहुपदी व्यंजक $q(x) = 3x + 8$ पाया जिससे कि

$f(x) = g(x) \times q(x) + f(1)$ होता है और f (1) की डिग्री < g (x) की डिग्री।

अर्थात् इस दशा में सहज ही भागशेष = f (1) पाया।

43 $3x^2 + 5x - 1$ को $x - 1$ द्वारा भाग देकर देखें कि भागशेष 7 अर्थात् f (1) होता है कि नहीं। **[स्वयं करें]**

44 अब $f(x) = x^4+x^3+2x^2-1$ - में $g(x) = x+1$ द्वारा भाग देकर देखते हैं,

भागशेष $= f(-1) = (-1)^4+(-1)^3+2(-1)^2-1$

$= 1-1+2-1=1$ [स्वयं करें]

ऊपर के उदाहरण से हम पाते हैं कि किसी बहुपदी व्यंजक f (x) में किसी सरल बहुपदी व्यंजक g(x) द्वारा भाग देने के लिये भाग न देकर बड़ी सहजता से भागशेष निर्णय कर सकते हैं।

भागशेष निर्णय करने की इस सहज पद्धति को तर्क देकर प्रमाणित करें।

भागशेष प्रमेय (Remainder Theorem) :

f(x) एक बहुपदी व्यंजक है जिसकी डिग्री $n(n \geq 1)$ है और a कोई वास्तविक संख्या है। f(x) में $(x - a)$ द्वारा भाग देने पर भागशेष f(a) होगा।

प्रमाण : माना कि, f (x) एक बहुपदी व्यंजक है।

f(x) में (x–a) द्वारा भाग देने पर अनन्य भागफल q(x) और अनन्य (unique) भागशेष r(x) पाते हैं।

और $f(x) = (x-a)\, q(x) + r(x)$..............(I) और $r(x) = 0$ अथवा r (x) की डिग्री < (x–a) की डिग्री

(x–a) की डिग्री 1 है और r (x) की डिग्री (x–a) की डिग्री से कम है।

$\therefore$ r (x) की डिग्री = 0 या $r(x) = 0$

$\therefore$ r (x) एक स्थिरांक है।

माना कि, $r(x) = R$

$\therefore$ (I) न० से पाते हैं $f(x) = (x-a)\, q(x) + R$. (यह एक अपरिवर्तित है)

x = a रखने पर पाते हैं, $f(a) = (a-a)\, q(a) + R = R$. $\therefore$ $f(a) = R$ (प्रमाणित)।

45 f(x) = x^3-2x^2+6x-1 बहुपदी व्यंजक में (x–2) द्वारा भाग देने पर भागशेष क्या पायेंगे भागशेष प्रमेय का प्रयोग कर सहज ही गणना कर लिखें।

पहले (x–2) सरल बहुपदी व्यंजक का शून्य ज्ञात करते हैं।

$\therefore \quad x-2=0 \qquad \therefore x=2$

भागशेष प्रमेय से हम जानते हैं, $f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ में x–2 द्वारा भाग देने पर भागशेष f(2) होगा

$\therefore$ अभिष्ट भागशेष = f(2)

$= (2)^3 - 2.2^2 + 6.2 - 1 \qquad = 8-8+12-1 = 11$

46 $(12x^3-11x+5)$ बहुपदी व्यंजक में (2x–1) द्वारा भाग देने पर भागशेष क्या होगा देखें।

$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

(2x–1) सरल बहुपदी व्यंजक का शून्य $\frac{1}{2}$ है।

माना कि $f(x) = 12x^3 - 11x + 5$

$\therefore$ अभीष्ट भागशेष = $f(\frac{1}{2}) = 12\times(\frac{1}{2})^3 - 11\times\frac{1}{2}+5$

$= \cancel{12}^{3} \times \frac{1}{\cancel{8}_{2}} - \frac{11}{2} + 5 = \frac{3}{2} - \frac{11}{2} + 5 = \square$

47 $f(x) = x^4-2x^2-1$ में (x–1) द्वारा भाग देने पर भागशेष क्या होगा लिखें। [स्वयं करें]

48 $f(x) = 4x^3+8x^2-5$ में (2x +1) द्वारा भाग देने पर भागशेष क्या है लिखें। [स्वयं करें]

49 $(10x^3-11x^2-8x+3)$ बहुपदी व्यंजक (2x–3) का अपवर्त्य है कि नहीं गणना करके लिखें।

$2x-3 = 0$

$\Rightarrow \; 2x = 3 \qquad \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ (2x–3) सरल बहुपदी व्यंजक का शून्य $\frac{3}{2}$ है।

$\therefore$ माना कि, $f(x) = 10x^3-11x^2-8x+3$

$\therefore$ (2x–3) का अपवर्त्य f(x) होगा यदि $f(\frac{3}{2}) = 0$ हो।

$f(\frac{3}{2}) = 10\times(\frac{3}{2})^3 - 11\times(\frac{3}{2})^2 - 8\times\frac{3}{2} + 3 = \square$

$\therefore$ f(x), (2x – 3) का अपवर्त्य है।

50 गणना करके देखें कि (x–2), $f(x) = x^3 - x - 6$-का एक उत्पादक है या नहीं।

(x–2) सरल बहुपदी व्यंजक का शून्य 2 है।

$f(x) = x^3 - x - 6$

$\therefore f(2) = \square^3 - \square - \square$ (स्वयं करें)

$\therefore f(2) = \square$

$\therefore$ (x–2), f(x) का एक उत्पादक है।

51 यदि ax^2+3x-5 और x^2-2x+a बहुपदी व्यंजकद्वय को x – 3 द्वारा भाग देने पर एक ही भागशेष हो तो a का मान ज्ञात करके लिखें।

माना कि, $f(x) = ax^2+3x-5$ और $g(x) = x^2-2x+a$

f(x) में (x–3) से भाग देने पर भागशेष पाते हैं, $f(3) = 9a+9-5 = 9a+4$

g(x) में (x–3) से भाग देने पर भागशेष पाते हैं, $g(3) = 9-6+a = 3+a$

$\because f(3) = g(3)$

$\therefore 9a+4 = 3+a$

या, $8a = -1 \qquad \therefore a = -\frac{1}{8}$

52 यदि $ax^2-8x-5x$ और $2x^2+x+3a$ बहुपदी व्यंजकों में $(x-1)$ द्वारा भाग दिया जाय तो भागशेष एक समान मिलता है तो उसे जानकर लिखें। [स्वयं करें]

हल करें — 7.3

1. भागशेष-प्रमेय का प्रयोग करके x^3-3x^2+2x+5 के (i) $x-2$ (ii) $x+2$ (iii) $2x-1$ (iv) $2x+1$ द्वारा भाग करने पर प्रत्येक के लिये कितना भागशेष होगा ज्ञात करके लिखें।

2. भागशेष प्रमेय का प्रयोग कर $(x-1)$ द्वारा निम्न बहुपदी व्यंजको में भाग देने पर क्या-क्या भागशेष मिलेगा जान करके लिखें।

(i) $x^3-6x^2+13x+60$ (ii) $x^3-3x^2+4x+50$

(iii) $4x^3+4x^2-x-1$ (iv) $11x^3-12x^2-x+7$

3. भागशेष-प्रमेय का प्रयोग कर भागशेष लिखें जबकि (i) $(x-3)$ द्वारा (x^3-6x^2+9x-8) बहुपदी व्यंजकमे भाग दिया जाय (ii) $(x-a)$ द्वारा (x^3-ax^2+2x-a) बहुपदी व्यंजक में भाग दिया जाये।

(i) $(x-3)$ द्वारा (x^3-6x^2+9x-8) बहुपदी व्यंजक में भाग दिया जाय।

(ii) $(x-a)$ द्वारा (x^3-ax^2+2x-a) बहुपदी व्यंजक में भाग दिया जाय।

4. भागशेष-प्रमेय का प्रयोग कर $p(x)=4x^3+4x^2-x-1$ बहुपदी व्यंजक $(2x+1)$ का अपवर्त्य है कि नहीं ज्ञात करें।

5. $(x-4)$ द्वारा (ax^3+3x^2-3) और $(2x^3-5x+a)$ बहुपदी व्यंजको मे भाग देने पर समान-समान भाग शेष मिले तो a का मान ज्ञात करके लिखें।

6. x^3+2x^2-px-7 और $x^3+px^2-12x+6$ बहुपदी व्यंजकों में क्रम से $(x+1)$ और $(x-2)$द्वारा भाग देने पर यदि R_1 और R_2 भागशेष मिलें और यदि $2R_1+R_2=6$ हो तो p का मान कितना है - लिखें।

7. $x^4-2x^3+3x^2-ax+b$ बहुपदी व्यंजक में $(x-1)$ और $(x+1)$ द्वारा भाग देन पर भागशेष क्रम से 5 और 19 हैं तो इस बहुपदी व्यंजक में $x+2$ द्वारा भाग देने पर भागशेष क्या होगा-लिखें।

8. यदि $f(x)=\frac{a(x-b)}{a-b}+\frac{b(x-a)}{b-a}$ हो तो दिखाये कि $f(a)+f(b)=f(a+b)$

9. $f(x)=ax+b$ और $f(0)=3$, $f(2)=5$ हो तो a और b के मान ज्ञात करें।

10. $f(x)=ax^2+bx+c$ और $f(0)=2$, $f(1)=1$ और $f(4)=6$ होतो a, b और c के मान बताये।

11. **बहुविकल्पीय प्रश्नः (M.C.Q.)**

(i) निम्न में से कौन एक चलराशि युक्त बहुपदी व्यंजक है।

(a) $x+\frac{2}{x}+3$ (b) $3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+5$ (c) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x+6$ (d) $x^{10}+y^5+8$

(ii) नीचे कौन सा बहुपदी व्यंजक है ?

(a) $x-1$ (b) $\frac{x-1}{x+1}$ (c) $x^2-\frac{2}{x^2}+5$ (d) $x^2+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2}}+6$

(iii) नीचे कौन सा सरल बहुपदी व्यंजक है ?

(a) $x+x^2$ (b) $x+1$ (c) $5x^2-x+3$ (d) $x+\frac{1}{x}$

(iv) नीचे कौन सा द्विघाती बहुपदी व्यंजक है ?

(a) $\sqrt{x}-4$ (b) x^3+x (c) x^3+2x+6 (d) x^2+5x+6.

(v) $\sqrt{3}$ बहुपदी व्यंजक की डिग्री है

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) 1 (d) 0

12. संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न :

(i) $p(x) = 2x - 3$ बहुपदी व्यंजक का शून्य लिखें।

(iii) $p(x) = x + 4$ हो तो $p(x) + p(-x)$ का मान लिखें।

(iv) $x^3 + 4x^2 + 4x - 3$ बहुपदी व्यंजक में x द्वारा भाग देने पर भागशेष कितना होगा लिखें।

(v) $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1x + a_0$ हो तो $a_7 + a_6 + a_5 + \ldots\ldots + a_0$-का मान क्या होगा लिखें। (जहाँ $a_7, a_6 \ldots\ldots\ldots a_0$ स्थिरांक हैं)

53 यदि वृक्षारोपण कार्यक्रम के बाद 96 रू० बचे होते और हम इसे 24 लोगो में समान-समान रुप में बाँटते है तो प्रत्येक को कितने रूपये मिलेगा ज्ञात करके देखें।

96 रू० ÷ 24 = ☐ रू०।

फिर $96 = 24 \times 4 + 0$, $0 < 24$ यहाँ भागशेष 0; 24, 96 का उत्पादक हैं।

24 के 96 -का उत्पादक होने पर 96 में 24 द्वारा भाग देते समय भागशेष शून्य होगा।

54 $(6x^2 + 17x + 5)$ रू० को $(3x + 1)$ लोगों में समान-समान रूप से बाँटने के बाद कितने रू० शेष बचते है - देखे ?

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 5 \\ \hline 3x+1 & 6x^2 + 17x + 5 \\ & \underline{6x^2 + 2x} \\ & \quad 15x + 5 \\ & \quad \underline{15x + 5} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

भागशेष = 0

$(3x + 1)$, $(6x^2 + 17x + 5)$ एक उत्पादक है।

दूसरी तरफ से कहा जा सकता है कि $(3x + 1)$ सरल बहुपदी व्यंजक के $6x^2 + 17x + 5$ बहुपदी व्यंजक का एक उत्पादक होने पर दूसरा एक बहुपदी व्यंजक $(2x + 5)$ पाते हैं जिससे कि $6x^2 + 17x + 5 = (3x + 1)(2x + 5)$ होगा।

पाते हैं, बहुपदी व्यंजक $f(x)$ का एक उत्पादक $(x - a)$ होगा यदि $f(a) = 0$ हो, और $f(a) = 0$ होने पर $(x - a)$, $f(x)$ का एक उत्पादक होगा।

ऊपर के उदाहरणो में से किसी बहुपदी व्यंजक के साथ एक सरल बहुपदी व्यंजक के उत्पादक होने की संख्या लिखे और तर्क सहित प्रमाणित करें।

गुणक-प्रमेय (Factor Theorem) :

यदि $f(x)$ कोई बहुपदी व्यंजक हो जिसकी डिग्री $n (n \geq 1)$ हो और a कोई वास्तविक संख्या हो तो

(i) $(x - a)$, $f(x)$ का एक उत्पादक होगा यदि $f(a) = 0$ हो,

और (ii) $f(a) = 0$ होगा यदि $(x - a)$, $f(x)$ का एक उत्पादक हो।

प्रमाण : भागशेष-प्रमेय से कहा जा सकता है कि बहुपदी व्यंजक $f(x)$ में $(x - a)$ द्वारा भाग देने पर एक बहुपदी व्यंजक $q(x)$ पाते हैं जिससे कि $f(x) = (x - a) q(x) + f(a)$ होता है।

(i) यदि $f(a) = 0$ हो, तो $f(x) = (x - a) q(x)$ मिलेगा

∴ $(x - a)$, $f(x)$ का एक उत्पादक हो।

(ii) फिर यदि $(x - a)$, $f(x)$ का एक उत्पादक हो, तो एक बहुपदी व्यंजक $g(x)$ पाते है जिससे कि $f(x) = (x - a) g(x)$ होगा।

$x = a$ रखकर पाते हैं $f(a) = (a - a) g(a) = 0$ (प्रमाणित)

55 गुणक प्रमेय का प्रयोग करके देखे कि $(x-2),(4x^4+4x^3-19x^2-16x+12)$ का एक उत्पादक है कि नहीं ? पहले देखते हैं $x-2$ बहुपदी व्यंजक का शून्य कितना हैं।

$x-2=0 \therefore\ x=2$

माना कि, $f(x)=4x^4+4x^3-19x^2-16x+12$

$x=2$ रखने पर पाते हैं, $f(2)=4(2)^4+4(2)^3-19\times(2)^2-16\times2+12$

$=4\times16+4\times8-19\times4-32+12$

$=64+32-76-32+12 \quad =108-108 \quad =0$

$\therefore$ $(x-2),(4x^4+4x^3-19x^2-16x+12)$ का एक उत्पादक हैं।

56 k का मान कितना होने पर $(3x-2)$, $15x^2-kx-14$ का एक उत्पादक होगा - लिखें।

माना कि, $f(x)=15x^2-kx-14$

$(3x-2)$ सरल बहुपदी व्यंजक का शून्य $\frac{2}{3}$ हैं।

$\because (3x-2)$, $f(x)$ का एक उत्पादक हैं,

$3x-2=0,$
$\therefore\ x=\frac{2}{3}$

$\therefore f\left(\frac{2}{3}\right)=0$

$\therefore 15\left(\frac{2}{3}\right)^2-k\frac{2}{3}-14=0$

या, $\overset{5}{\cancel{15}}\times\frac{4}{\cancel{9}_3}-\frac{2k}{3}-14=0$

या, $\frac{-2k}{3}=14-\frac{20}{3}=\frac{42-20}{3}$

या, $-\frac{2k}{3}=\frac{22}{3} \qquad \therefore k=-11$

$\therefore k=-11$ हो तो $(3x-2)$, $15x^2-kx-14$ का एक उत्पादक होगा।

57 k के किस मान के लिये $4x^2-kx+1$ का एक उत्पादक $(x-1)$ होगा ज्ञात करके लिखें।

58 यदि n कोई सम धनात्मक पूर्ण संख्या हो तो दिखायें कि x^n-y^n बहुपदी व्यंजक का एक उत्पादक $x+y$ हैं।

माना कि, x^n-y^n में $x+y$ द्वारा भाग देने पर भागफल Q और x हीन भागशेष R हैं।

भाज्य = भाजक × भागफल + भागशेष,

$\therefore x^n-y^n=(x+y)\times Q+R$ [यह एक नादात्म्य यहै]

चूँकि R भागशेष x हीन हैं, $\therefore$ x का चाहे जो भी मान हो, R का मान नहीं बदलेगा। ऊपर के नादात्म्य में x के स्थान पर $(-y)$ लिखने पर पाते हैं।

$(-y)^n-y^n=(-y+y)\times Q+R$

$y^n-y^n=0\times Q+R \qquad (\because$ n सम धनात्मक पूर्ण संख्या है)

$\therefore R=0$

अत; x^n-y^n बहुपदी व्यजंक का एक उत्पादक $(x+y)$ है जहां n एक सम धनात्मक पूर्ण संख्या है।

हल करें — 7.4

1. **निम्न बहुपदी व्यंजको में किनका एक उत्पादक $(x + 1)$ है, ज्ञात करके लिखें।**

(i) $2x^3 + 3x^2 - 1$ (ii) $x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 5$ (iii) $7x^3 + x^2 + 7x + 1$

(iv) $3 + 3x - 5x^3 - 5x^4$ (v) $x^4 + x^2 + x + 1$ (vi) $x^3 + x^2 + x + 1$

2. **गुणक-प्रमेय का उपयोग कर देखें कि निम्न बहुपदी व्यंजक कों $f(x)$ का एक उत्पादक $g(x)$ है कि नहीं।**

(i) $f(x) = x^4 - x^2 - 12$ और $g(x) = x + 2$

(ii) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 11x - 30$ और $g(x) = x + 5$

(iii) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 24x - 45$ और $g(x) = x - 3$

(iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12.$ और $g(x) = 3x - 2$

3. k का मान कितना होने पर $x + 2$ द्वारा $2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ बहुपदी व्यंजक विभाज्य हैं - ज्ञात करके लिखें।

4. **k के किस मान के लिये निम्न बहुपदी व्यंजकों, $f(x)$ का एक उत्पादक $g(x)$ होगा –लिखे।**

(i) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + x + k$ और $g(x) = x - 1$

(ii) $f(x) = kx^2 - 3x + k$ और $g(x) = x - 1$

(iii) $f(x) = 2x^4 + x^3 - kx^2 - x + 6$ और $g(x) = 2x - 3$

(iv) $f(x) = 2x^3 + kx^2 + 11x + k + 3$ और $g(x) = 2x - 1$

5. $ax^4 + 2x^3 - 3x^2 + bx - 4$ बहुपदी व्यंजक का उत्पादक $x^2 - 4$ हो तो a और b के मान ज्ञात कर लिखें।

6. $x^3 + 3x^2 + 2ax + b$ बहुपदी व्यंजक के दो उत्पादक $(x + 1)$ और $(x + 2)$ हो तो a और b के मान ज्ञात करके लिखें।

7. $ax^3 + bx^2 + x - 6$ बहुपदी व्यंजक में $(x - 2)$ द्वारा भाग देने पर भागशेष 4 बचता है तो यदि इस बहुपदी व्यंजक का एक और उत्पादक $x + 2$ हो तो a और b के मान ज्ञात करें।

8. n कोई धनात्मक पूर्ण संख्या (सम या विषम) हो तो दिखाये कि $x^n - y^n$ बहुपदी व्यंजक का एक उत्पादक $x - y$ है।

9. n कोई विषम धनात्मक पूर्ण संख्या हो तो दिखायें कि $x^n + y^n$ बहुपदी व्यंजक का $x + y$ एक उत्पादक है।

10. n कोई विषम धनात्मक पूर्ण संख्या (सम या विषम) हो तो दिखाये कि $x^n + y^n$ बहुपदी व्यंजक का $x - y$ एक उत्पादक कभी नहीं हो सकता।

11. **बहुविकल्पीय प्रश्न (M . C. Q.):**

(i) $x^3 + 6x^2 + 4x + k$ बहुपदी व्यंजक $(x + 2)$ द्वारा विभाजित हो तो k का मान हैं—

(a) - 6 (b) – 7 (c) – 8 (d) – 10

(ii) $f(x)$ बहुपदी व्यंजक में $f(-\frac{1}{2}) = 0$ हो तो $f(x)$ का एक उत्पादक है—

(a) $2x - 1$ (b) $2x+1$ (c) $x - 1$ (d) $x + 1$

(iii) f (x) बहुपदी व्यंजक का (x – 1) एक उत्पादक है किन्तु g (x) बहुपदी व्यंजक का उत्पादक नहीं है। अत; (x – 1) एक उत्पादक होगा - (इसका)

(a) f (x) g (x) (b) –f (x) + g (x) (c) f (x) – g (x) (d) {f(x)+g(x)}g(x)

(iv) $x^n + 1$ बहुपदी व्यंजक का (x + 1) एक उत्पादक होगा जब

(a) n एक विषम धनात्मक पूर्ण संख्या हो। (b) n एक समधनात्मक पूर्ण संख्या हो।

(c) n एक ऋणात्मक पूर्ण संख्या हो (d) n एक धनात्मक पूर्ण संख्या हो।

(v) $an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ बहुपदी व्यंजक का $n^2 - 1$ उत्पादक हो तो

(a) a + c + e = b + d (b) a + b + e = c + d (c) a + b + c = d + e (d) b + c + d = a + e

12. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न:

(i) $x^3 + ax^2 - 2x + a - 12$ बहुपदी व्यंजक का एक उत्पादक x + a हो तो a का मान ज्ञात करें।

(ii) $k^2 x^3 - kx^2 + 3kx - k$ बहुपदी व्यंजक का एक उत्पादक x –3 हो तो k का मान ज्ञात करें।

(iii) f(x) = 2x + 5 हो तो f(x) + f(–x) का मान ज्ञात कर लिखें।

(iv) $px^2 + 5x + r$ बहुपदी व्यंजक के (x –2) और $(x - \frac{1}{2})$ दोनो उत्पादक हैं तो p और r का सम्बन्ध ज्ञात करके लिखें।

(v) f (x) = 2x + 3 सरल बहुपदी व्यंजक का मूल लिखें।

8 गुणनखण्ड करना
(FACTORISATION)

आज शनिवार है। आज हमलोग विद्यालय में एक मजेदार खेल खेलेगें। हमारी कक्षा में दो श्यामपट्ट (ब्लैक बोर्ड) हैं। पहले हमलोग दो दलों में बँट जायेगें। अब प्रत्येक दल में से एक विधार्थी श्यामपट पर कोई एक बहुपदी व्यंजक लिखेगा। दूसरे श्यामपट पर दूसरे दल के लोग उस बहुपदी व्यंजक को गुणनखण्ड के रूप में विश्लेषित करने की चेष्टा करेंगे।

मिहिर ने बोर्ड पर 26 लिखा।

हमलोगों ने विश्लेषित किया $26 = 2 \times 13$

1 साथी ने बोर्ड पर लिखा $x^2 + 9x$; यह एक द्विघाती बहुपदी व्यंजक है। $(x^2 + 9x)$ को गुणनखण्ड के रूप में प्रकट करने की चेष्टा करते हैं।

$x^2 + 9x = x(x + 9)$

2 अली ने लिखा $x^2 + 3x - 4$; यह एक द्विघाती बहुपदी व्यंजक है। $(x^2 + 3x - 4)$ को गुणनखण्ड के रूप में प्रकट करने की चेष्टा करते हैं।

$x^2 + 3x - 4 = x^2 + 4x - x - 4$

$= x(x + 4) - 1(x + 4) \quad = (x + 4)(x - 1)$

3 नसरीन ने $x^3 + 3x - 4$; यह एक द्विघाती बहुपदी व्यंजक है। इस प्रकार के व्यंजक को किस प्रकार गुणनखण्ड के रूप में प्रकट करेंगे?

माना कि, $f(x) = x^3 + 3x - 4$

पहले $f(x)$ का एक उत्पादक (खण्ड) खोजते हैं।

$f(x)$ में $x = +1, +2, +3$, रखकर देखें कि x के किस मान के लिये $f(x) = 0$ होता है।

$f(1) = (1)^3 + 3.1 - 4 = 0$

पाते हैं, $f(1) = 0$

गुणक-प्रमेय से कहा जा सकता है, $(x-1)$, $f(x)$ का एक उत्पादक है।

$x^3 + 3x - 4$

$= x^3 - x^2 + x^2 - x + 4x - 4$

$= x^2(x-1) + x(x-1) + 4(x-1)$

$= (x-1)(x^2 + x + 4)$

दूसरे प्रकार से

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 4 \\
\hline
x - 1 & x^3 + 3x - 4 \\
 & \underline{x^3 - x^2} \\
 & x^2 + 3x \\
 & \underline{x^2 - x} \\
 & 4x - 4 \\
 & \underline{4x - 4} \\
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore x^3 + 3x - 4 = (x-1)(x^2 + x + 4)$

> $f(x) = x^3 + 3x - 4$ के उत्पादक (गुणनखण्ड) विश्लेषण करते समय पहले $f(x)$ का एक उत्पादक ढूँढ़ना होगा अर्थात् x के किस मान के लिये $f(x)$ का मान 0 होगा यह निर्णय करना होगा।

किन्तु इस पद्धति से गुणनखण्ड करने को क्या कहा जाता है?

शून्य पद्धति (Vanishing Method) या परीक्षा पद्धति (Trial method) कहा जाता है।

4 $f(x) = x^3 + 3x - 4$ में $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, ..., रखकर x के किस मान के लिये $f(x)$ का मान शून्य होता है। इसे जानने की क्या कोई सहज पद्धति है?

$f(x)$ का स्थिरांक पद -4 है और -4 के उत्पादक हैं $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

अत: x के इन्हीं मानों में से किसी मान के लिये $f(x)$ का मान शून्य होगा।

5 $f(x) = x^3 + 3x + 4$ होने पर भी क्या x के स्थान पर $\pm 1, \pm 2, \pm 3...$ मानों में से किसी एक मान को रखकर f (x) का मान शून्य पातें ?

यहाँ चूँकि f (x) का प्रत्येक पद धनात्मक है, अत: x के धनात्मक मान से f (x) शून्य नहीं होता।

अत: यहाँ x के ऋणात्मक मान के लिये f (x) का मान शून्य होगा।

यदि $x = -1$ हो; $f(x) = (-1)^3 + 3(-1) + 4$

$= -1 - 3 + 4 = 0$

अत: यहाँ $x^3 + 3x + 4$ बहुपदी व्यंजक का एक उत्पादक या गुणनखण्ड $(x + 1)$ होता।

रजत ने लिखा → $x^3 - 7x - 6$

6 $(x^3 - 7x - 6)$ बहुपदी व्यंजक को शून्य पद्धति से उत्पादकों में विश्लेषित करने के लिये x के किस मान के लिये $x^3 - 7x - 6$ का मान शून्य होगा देखें।

माना $f(x) = x^3 - 7x - 6$

देखते हैं, $f(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6 = 0$

$\therefore$ गुणन प्रमेय से पाते हैं $(x + 1)$, f (x) का एक गुणनखण्ड (उत्पादक) है।

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & x^3 - 7x - 6 \\
&= x^3 + x^2 - x^2 - x - 6x - 6 \\
&= x^2(x+1) - x(x+1) - 6(x+1) \\
&= (x+1)(x^2 - x - 6) \\
&= (x+1)\{x^2 - 3x + 2x - 6\} \\
&= (x+1)\{x(x-3) + 2(x-3)\} \\
&= (x+1)(x-3)(x+2)
\end{aligned}$$

दूसरे प्रकार से

$$\begin{aligned}
& x^3 - 7x - 6 \\
&= x^3 + 1 - 7x - 7 \\
&= (x+1)(x^2 - x + 1) - 7(x+1) \\
&= (x+1)(x^2 - x + 1 - 7) \\
&= (x+1)(x^2 - x - 6) \\
&= (x+1)(x-3)(x+2)
\end{aligned}$$

इन विधियों के अलावा, $(x^3 - 7x - 6)$ में $(x + 1)$ द्वारा भाग देकर भी अन्य उत्पादक पाये जा सकते हैं।

7 $(x^3 - 7x - 6)$ और $(2x^3 - x - 1)$ बहुपदी व्यंजकों का उसी प्रकार गुणनखण्ड निकालें। [स्वयं करें]

8 मोहित ने लिखा $f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$: यहाँ भी क्या –9 के गुणनखण्डों (उत्पादको) में $2x^3 + x^2 - 9x - 9$ बहुपदी व्यंजक का मान शून्य होगा ?

यहाँ चल राशि के सर्वाधिक घातांक वाले पद का अंक गुणांक 2 है और स्थिरांक – 9; है फिर $\frac{-9}{2}$ लघु आकार में है।

– 9 के उत्पादक $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ और

2 के उत्पादक $\pm 1, \pm 2$ हैं।

अत: f (x) के संभावित शून्य होगें $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}$

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$

$f(1) = 2 + 1 - 9 - 9 \neq 0$

$f(-1) = -2 + 1 + 9 - 9 \neq 0$

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$ में – x का मान $\frac{1}{2}$ रखकर देखें कि f (x) का मान शून्य होता है या नहीं।

$$f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{2})^2 - 9(-\frac{1}{2}) - 9$$
$$= 2 \times (-\frac{1}{8}) + \frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 9 \quad = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 9 \neq 0$$

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$में – x के मान $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{9}{2}$ रखकर देखें f (x) का मान शून्य होता है कि नहीं।

$$f(-\frac{3}{2}) = 2(-\frac{3}{2})^3 + (-\frac{3}{2})^2 - 9(-\frac{3}{2}) - 9$$
$$= 2 \times (-\frac{27}{8}) + \frac{9}{4} + \frac{27}{2} - 9 = -\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + \frac{27}{2} - 9$$
$$= \frac{-27 + 9 + 54 - 36}{4} \qquad = \frac{-63 + 63}{4} \qquad = 0$$

अतः $x = \frac{-3}{2}$ मान से f (x) का मान शून्य हुआ।

∴ 2x + 3, $2x^3 + x^2 - 9x - 9$ बहुपदी व्यंजक का एक उत्पादक है।

$2x^3 + x^2 - 9x - 9$
$= 2x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 3x - 6x - 9$
$= x^2(2x + 3) - x(2x + 3) - 3(2x + 3)$
$= (2x + 3)(x^2 - x - 3)$

9 रीना ने लिखा— $8a^3 + 8a - 5$

मान कि $f(a) = 8a^3 + 8a - 5$

मान रखकर देखते हैं $f(\frac{1}{2}) = 8 \times (\frac{1}{2})^3 + 8 \times (\frac{1}{2}) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$

∴ गुणक प्रमेय से पाते हैं कि f(a) का एक उत्पादक (2a – 1) है।

$(8a^3 + 8a - 5)$
$= 8a^3 - 4a^2 + 4a^2 - 2a + 10a - 5$
$= 4a^2(2a - 1) + 4a(2a - 1) + 5(2a - 1)$
$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 5)$

दूसरी तरह से

$8a^3 + 8a - 5$
$= 8a^3 - 1 + 8a - 4$
$= (2a)^3 - (1)^3 + 4(2a - 1)$
$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1) + 4(2a - 1)$
$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1 + 4)$
$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 5)$

10 हम इसी प्रकार $(8a^3 + 4a - 3)$ बहुपदी व्यंजक का गुणनखण्ड ज्ञात करें और क्या-क्या गुणनखण्ड मिलते हैं लिखें। (स्वयं करें)

हल करें — 8.1

नीचे के बहुपदी व्यंजकों के गुणनखण्ड निकालें :

1. $x^3 - 3x + 2$
2. $x^3 + 2x + 3$
3. $a^3 - 12a - 16$
4. $x^3 - 6x + 4$
5. $x^3 - 19x - 30$
6. $4a^3 - 9a^2 + 3a + 2$
7. $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$
8. $5a^3 + 11a^2 + 4a - 2$
9. $2x^3 - x^2 + 9x + 5$
10. $2y^3 - 5y^2 - 19y + 42$

जब हम सभी मित्र एक साथ मिलकर इस खेल में व्यस्त थे तब हमारी मित्र युचेता ने एक मजेदार काम किया। उसने एक सफेद आर्ट पेपर पर अपने याद किये हुये तादात्म्य लिख डाले और इसे कक्षा की एक दीवार पर एक ओर लटँका दिया था।

उसने लिखा,

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ — I

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ — II

$(x^2 - y^2) = (x+y)(x-y)$ — III

11 हम सुचेता द्वारा लिखे गये तादात्म्य (Iderity) का प्रयोग करके $(x^2 - 1 - 2a - a^2)$ बहुपदी व्यंजकों का गुणनखण्ड करने का प्रयास करें।

$x^2 - 1 - 2a - a^2$

$= x^2 - (1 + 2a + a^2)$ [(I) न॰ तादात्म्य की सहायता से]

$= x^2 - (1 + a)^2$

$= (x + 1 + a)(x - 1 - a)$ [(III) न॰ तादात्म्य की सहायता से]

12 हम सुचेता द्वारा लिखे गये तादात्म्य की सहायता से निम्न बहुपदी व्यंगजकों का गुणनखण्ड करने का प्रयास करें।

(i) $p^4 + 2p^2 + 9$ (ii) $x^2 - 2ax + (a+b)(a-b)$ (iii) $a^{16} - b^{16}$ (iv) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 3y$

(i) $p^4 + 2p^2 + 9 = (p^2)^2 + 2\cdot p^2\cdot 3 + (3)^2 - 4p^2$

$= (p^2+3)^2 - (2p)^2 = (p^2 + 3 + 2p)(p^2 + 3 - 2p)$

(ii) $x^2 - 2ax + (a+b)(a-b) = x^2 - \{(a+b) + (a-b)\}x + (a+b)(a-b)$

$= x^2 - (a+b)x - (a-b)x + (a+b)(a-b)$

$= x\{x - (a+b)\} - (a-b)\{x - (a+b)\}$

$= \{x - (a+b)\}\{x - (a-b)\}$

$= (x - a - b)(x - a + b)$

दूसरे प्रकार से

$x^2 - 2ax + (a+b)(a-b)$

$= x^2 - 2ax + a^2 - b^2$

$= (x-a)^2 - b^2$

$= (x - a + b)(x - a - b)$

(iii) $a^{16} - b^{16}$

$= (a^8)^2 - (b^8)^2$

$= (a^8 + b^8)(a^8 - b^8)$

$= (a^8 + b^8)\{(a^4)^2 - (b^4)^2\}$

$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^4 - b^4)$

$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)\{(a^2)^2 - (b^2)^2\}$

$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

(iv) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 3y$

$= (2x)^2 - 2.2x.3y + (3y)^2 + 2x - 3y$

$= (2x - 3y)^2 + (2x - 3y)$

$= (2x - 3y)(2x - 3y + 1)$

हल करें — 8.2

1. $\frac{x^4}{16} - \frac{y^4}{81}$ **2.** $m^2 + \frac{1}{m^2} + 2 - 2m - \frac{2}{m}$ **3.** $9p^2 - 24pq + 16q^2 + 3ap - 4aq$

4. $4x^4 + 81$ **5.** $x^4 - 7x^2 + 1$ **6.** $p^4 - 11p^2q^2 + q^4$

7. $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$ **8.** $3a(3a + 2c) - 4b(b + c)$ **9.** $a^2 - 6ab + 12bc - 4c^2$

10. $3a^2+4ab+b^2-2ac-c^2$ **11.** $x^2-y^2-6ax+2ay+8a^2$ **12.** $a^2-9b^2+4c^2-25d^2-4ac+30bd$

13. $3a^2-b^2-c^2+2ab-2bc+2ca$ **14.** $x^2 - 2x - 22499$ **15.** $(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) + 4abxy$

मित्र पल्लव ने भी सुचेता की तरह अपने याद रखे गये कुछ तादात्म्य लिखकर बोर्ड पर लटका दिया।

पल्लव ने लिखा —

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ — IV	$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ — VII
$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ — V	$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$ — VIII
$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ — VI	$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ — IX

13 नासरीन ने श्यामपट्ट पर पाँच बहुपदी व्यंजक लिखा जो निम्न हैं

(i) $a^3 - \frac{1}{a^3} - 2a + \frac{2}{a}$ (ii) $\frac{x^3}{64} - \frac{64}{x^3}$ (iii) $1 - x^{12}$

(iv) $63a^3 + 6a^2 - 12a + 8$ (v) $a^3 - 9b^3 + (a+b)^3$

हम नासरीन द्वारा लिखे गये बहुपदी व्यंजको को बोर्ड पर लटके तादात्म्यों की सहायता से गुणनखण्ड के रूप में प्रकट करने का प्रयास करते हैं।

(i) $a^3 - \frac{1}{a^3} - 2a + \frac{2}{a}$

$= (a - \frac{1}{a})\ \{a^2 + a.\frac{1}{a} + (\frac{1}{a})^2\} - 2(a - \frac{1}{a})$ **[IX** न० की सहायता से**]**

$= (a - \frac{1}{a})(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}) - 2(a - \frac{1}{a})$

$= (a - \frac{1}{a})\ [a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} - 2] \quad = (a - \frac{1}{a})\ (a^2 - 1 + \frac{1}{a^2})$

(ii) $\frac{x^3}{64} - \frac{64}{x^3}$

$= (\frac{x}{4})^3 - (\frac{4}{x})^3$

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\{(\frac{x}{4})^2 + \frac{\cancel{x}}{\cancel{4}}\ \frac{\cancel{4}}{\cancel{x}} + (\frac{4}{x})^2\}$ **[IX** न० की सहायता से**]**

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ \{(\frac{x}{4})^2 + 1 + (\frac{4}{x})^2\}$

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\{(\frac{x}{4})^2 + 2.\frac{x}{4}.\frac{4}{x} + (\frac{4}{x})^2 - 1\}$

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\{(\frac{x}{4} + \frac{4}{x})^2 - (1)^2\} = (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ (\frac{x}{4} + \frac{4}{x} + 1)\ (\frac{x}{4} + \frac{4}{x} - 1)$

(iii) $1 - x^{12}$

$= (1)^2 - (x^6)^2$

$= (1 + x^6)(1 - x^6)$

$= (1 + x^6)\{(1)^2 - (x^3)^2\}$

$= (1 + x^6)(1 + x^3)(1 - x^3)$

$= \{(1)^3 + (x^2)^3\}\ \{(1)^3 + (x)^3\}\ \{(1)^3 - (x)^3\}$

$= (1 + x^2)(1 - x^2 + x^4)(1 + x)(1 - x + x^2)(1 - x)(1 + x + x^2)$

$= (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)(1 - x^2 + x^4)$

(iv) $63a^3 + 6a^2 - 12a + 8$

$= 64a^3 - a^3 + 6a^2 - 12a + 8$

$= (4a)^3 - \{(a)^3 - 3.(a)^2.\,2 + 3.a.(2)^2 - (2)^3\}$

$= (4a)^3 - (a-2)^3$

$= \{4a - (a-2)\}\ \{(4a)^2 + 4a.\,(a-2) + (a-2)^2\}$

$= (4a - a + 2)\,(16a^2 + 4a^2 - 8a + a^2 - 4a + 4)$

$= (3a+2)\,(21a^2 - 12a + 4)$

(v) $a^3 - 9b^3 + (a+b)^3$

$= a^3 - b^3 + (a+b)^3 - 8b^3$

$= (a)^3 - (b)^3 + (a+b)^3 - (2b)^3$

$= (a-b)\,(a^2 + ab + b^2) + \{\,(a+b) - 2b\}\ \{(a+b)^2 + (a+b).2b + (2b)^2\}$

$= (a-b)\,(a^2 + ab + b^2) + (a-b)\,(a^2 + 2ab + b^2 + 2ab + 2b^2 + 4b^2)$

$= (a-b)\,(a^2 + ab + b^2) + (a-b)\,(a^2 + 4ab + 7b^2)$

$= (a-b)\,(a^2 + ab + b^2 + a^2 + 4ab + 7b^2)$

$= (a-b)\,(2a^2 + 5ab + 8b^2)$

हल करें — 8.3

1. $t^9 - 512$ **2.** $729p^6 - q^6$ **3.** $8\,(p-3)^3 + 343$ **4.** $\frac{1}{8a^3} + \frac{8}{b^3}$

5. $(2a^3 - b^3)^3 - b^9$ **6.** $AR^3 - Ar^3 + AR^2h - Ar^2h$ **7.** $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 8$

8. $32x^4 - 500x$ **9.** $8a^3 - b^3 - 4ax + 2bx$ **10.** $x^3 - 6x^2 + 12x - 35$

निषाद ने एक बोर्ड पर लिखा ⟶ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

14 देखते हैं $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ एक तीन चलराशियुक्त बहुपदी व्यंजक बहुपदी व्यंजक है जसकी डिग्री 3 है। हम दीवार पर लटके तादात्म्यों की सहायता से $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ को गुणनखण्ड के रूप में प्रकट करें।

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x+y)^3 - 3xy\,(x+y) + z^3 - 3xyz$

$= (x+y)^3 + z^3 - 3xy\,(x+y) - 3xyz$

$= (x+y+z)\,\{(x+y)^2 - (x+y)z + z^2\} - 3xy\,(x+y+z)$

$= (x+y+z)\,\{x^2 + y^2 + 2xy - xz - yz + z^2 - 3xy\}$

$= (x+y+z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

हमने एक नया तादात्म्य पाया।

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \quad \text{——— X}$$

15 यदि $x + y + z = 0$ हो तो $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान क्या होगा देखें।

जैसा कि $x + y + z = 0$, इसलिए, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$,

$$\therefore\ x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad \text{——— XI}$$

16 हम X न० अभेद की सहायता से निम्न बहुपदी व्यंजकों को गुणनखण्ड के रूप में प्रकट करें।

(i) $1 + b^3 + 8c^3 - 6bc$ (ii) $a^3 - b^3 + 1 + 3ab$

(iii) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ (iv) $a^6 + 5a^3 + 8$

(i) $1 + b^3 + 8c^3 - 6bc = (1)^3 + (b)^3 + (2c)^3 - 3.1.b.2c$

$= (1 + b + 2c) \{(1)^2 + b^2 + (2c)^2 - 1.b - b.2c - 2c.1\}$

[X न० से पाते हैं]

$= (1 + b + 2c) (1 + b^2 + 4c^2 - b - 2bc - 2c)$

(ii) $a^3 - b^3 + 1 + 3ab = (a)^3 + (-b)^3 + (1)^3 - 3.a.(-b).1$

$= (a - b + 1) \{a^2 + (-b)^2 + (1)^2 - a.(-b) - (-b).1 - 1.a\}$

$= (a - b + 1) (a^2 + b^2 + 1 + ab + b - a)$

(iii) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

माना कि $a - b = x$, $b - c = y$ और $c - a = z$

अत: $x + y + z = a - b + b - c + c - a = 0$

$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

$= x^3 + y^3 + z^3$

$= 3xyz$ [जैसा कि, $x + y + z = 0$, इसलिए $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$]

$= 3 (a - b) (b - c) (c - a)$

(iv) $a^6 + 5a^3 + 8$

> **$a^6 + 5a^3 + 8$**
> **$= (a^2)^3 + (?)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(?).2$**
> **बीच का पद $5a^3$,**
> **है '?' $a \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \pm 4a$....... इनमें से एक होगा।**
> **यदि '?' = a रखें तब, $(a^2)^3 + (a)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(a).2$**
> **किन्तु यहाँ $+ 5a^3$ न होकर $- 5a^3$ हो रहा है।**
> **यदि '?' = – a रखें तब, $(a)^2 + (-a)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(-a).2$**
> **अब बीच का पद $(+ 5a^3)$ हो रहा है।**

$a^6 + 5a^3 + 8$

$= (a^2)^3 + (-a)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(-a).2$

$= \{a^2 + (-a) + 2\} \{(a^2)^2 + (-a)^2 + (2)^2 - a^2(-a) - (-a).2 - 2.a^2\}$

$= (a^2 - a + 2) (a^4 + a^2 + 4 + a^3 + 2a - 2a^2)$

$= (a^2 - a + 2) (a^4 + a^3 - a^2 + 2a + 4)$

हल करें —8.4

1. $8x^3 - y^3 + 1 + 6xy$
2. $8a^3 - 27b^3 - 1 - 18ab$
3. $1 + 8x^3 + 18xy - 27y^3$
4. $x^3 + y^3 - 12xy + 64$
5. $(3a - 2b)^3 + (2b - 5c)^3 + (5c - 3a)^3$
6. $(2x - y)^3 - (x + y)^3 + (2y - x)^3$
7. $a^6 + 32a^3 - 64$
8. $a^6 - 18a^3 + 125$
9. $p^3 (q - r)^3 + q^3 (r - p)^3 + r^3 (p - q)^3$
10. $p^3 + \frac{1}{p^3} + \frac{26}{27}$

गुणनखण्ड निकालते समय

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ लिखि।

17 इस अभेद को इसी आकार $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ में न लिखकर दूसरे आकार या रूप में लिखा जा सकता है -क्या देखें।

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2} \times 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\}$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

18 मैंने निषाद से $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान निकालने को कहा जबकि

$$a = 999, b = 998, c = 997$$

निषाद ने लिखा, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\ \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$$= \frac{1}{2}(999 + 998 + 997)\{(999 - 998)^2 + (998 - 997)^2 + (997 - 999)^2\}$$
$$= \frac{1}{2} \times 2994 \times (1 + 1 + 4)$$
$$= \frac{1}{2} \times 2994 \times 6 = 8882$$

जाकिर ने बोर्ड पर लिखा, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	—— XII

19 पल्लव ने चार बहुपदी व्यंजक बोर्ड पर लिखा।

(i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $x^2 - 5x + 6$ (iii) $x^2 + 5x - 6$ (iv) $x^2 - 5x - 6$
हम इन व्यंजकों को गुणनखण्ड के रूप में प्रकट करते हैं।

(i) $x^2 + 5x + 6$
$= x^2 + 3x + 2x + 6$
$= x(x + 3) + 2(x + 3)$
$= (x + 3)(x + 2)$

(ii) $x^2 - 5x + 6$
$= x^2 - 3x - 2x + 6$
$= x(x - 3) - 2(x - 6)$
$= (x - 3)(x - 2)$

(iii) $x^2 + 5x - 6$
$= x^2 + 6x - x - 6$
$= x(x + 6) - 1(x + 6)$
$= (x + 6)(x - 1)$

(iv) $x^2 - 5x - 6$
$= x^2 - 6x + x - 6$
$= x(x - 6) + 1(x - 6)$
$= (x - 6)(x + 1)$

20 जाकिर ने श्यामपट्ट (ब्लैक बोर्ड) पर कुछ और बहुपदी व्यंजक लिखा।

(i) $p^2 + p - (a+1)(a+2)$
(ii) $x^2 + 3x - a^2 - a + 2$
(iii) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) + 6$
(iv) $x^2 + \left(p + \frac{1}{p}\right)x + 1$
(v) $(x^2+1)^2 - (x^2-1) - 4x^2$
(vi) $x^2 - bx - (a+3b)(a+2b)$
(vii) $2x^2 - 3ab - (a-6b)x$
(viii) $x^2 + 2(a^2+b^2)x + (a^2-b^2)^2$

पल्लव ने जाकिर द्वारा बहुपदी व्यंजकों को उत्पादकों के रूप में बदला।

(i) $p^2 + p - (a+1)(a+2)$

$= p^2 + \{(a+2) - (a+1)\}p - (a+1)(a+2)$
$= p^2 + (a+2)p - (a+1)p - (a+1)(a+2)$
$= p(p+a+2) - (a+1)(p+a+2)$
$= (p+a+2)\{p - (a+1)\}$
$= (p+a+2)(p-a-1)$

(ii) $x^2 + 3x - a^2 - a + 2$
$= x^2 + 3x - (a^2 + a - 2)$
$= x^2 + 3x - (a^2 + 2a - a - 2)$
$= x^2 + 3x - \{a(a+2) - 1(a+2)\}$
$= x^2 + 3x - (a+2)(a-1)$
$= x^2 + \{(a+2) - (a-1)\}x - (a+2)(a-1)$ $[\because (a+2) - (a-1) = a + 2 - a + 1 = 3]$
$= x^2 + (a+2)x - (a-1)x - (a+2)(a-1)$
$= x(x+a+2) - (a-1)(x+a+2)$
$= (x+a+2)\{x - (a-1)\}$
$= (x+a+2)(x-a+1)$

(iii) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) + 6$
$= (x-1)(x+3)(x-2)(x+4) + 6$
$= (x^2 - x + 3x - 3)(x^2 - 2x + 4x - 8) + 6$
$= (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 8) + 6$
$= (a-3)(a-8) + 6$ [जैसा कि $x^2 + 2x = a$]
$= a^2 - 3a - 8a + 24 + 6$
$= a^2 - 11a + 30$
$= a^2 - 6a - 5a + 30$
$= a(a-6) - 5(a-6)$
$= (a-6)(a-5)$

(iv) $x^2 + (p + \frac{1}{p})x + 1$

$= x^2 + px + \frac{x}{p} + \frac{p}{p}$ [जैसा कि, $\frac{p}{p} = 1$]

$= x(x + p) + \frac{1}{p}(x + p)$

$= (x + p)(x + \frac{1}{p})$

$= (x^2 + 2x - 6)(x^2 + 2x - 5)$ [जैसा कि, $a = x^2 + 2x$]

(v) $(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1) - 4x^2$

$= (x^2 - 1)^2 + 4.\ x^2.1 - (x^2 - 1) - 4x^2$ [जैसा कि, $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$]

$= (x^2 - 1)^2 + 4x^2 - (x^2 - 1) - 4x^2$

$= (x^2 - 1)(x^2 - 1 - 1)$

$= (x + 1)(x - 1)(x^2 - 2)$

(vi) $x^2 - bx - (a + 3b)(a + 2b)$

$= x^2 - \{(a + 3b) - (a + 2b)\}x - (a + 3b)(a + 2b)$ [जैसा कि, $(a + 3b) - (a + 2b)$

$= x^2 - (a + 3b)x + (a + 2b)x - (a + 3b)(a + 2b)$ $= a + 3b - a - 2b = b$]

$= x\{x - (a + 3b)\} + (a + 2b)\{x - (a + 3b)\}$

$= \{x - (a + 3b)\}\{x + (a + 2b)\}$

$= (x - a - 3b)(x + a + 2b)$

(vii) $2x^2 - 3ab - (a - 6b)x$

$= 2x^2 - 3ab - ax + 6bx$

$= 2x^2 - ax + 6bx - 3ab$

$= x(2x - a) + 3b(2x - a)$

$= (2x - a)(x + 3b)$

[जैसा कि, $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$]

(viii) $x^2 + 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2$

$= x^2 + 2(a^2 + b^2)x + \{(a + b)(a - b)\}^2$

$= x^2 + 2(a^2 + b^2)x + (a + b)^2(a - b)^2$

$= x^2 + \{(a + b)^2 + (a - b)^2\}x + (a + b)^2(a - b)^2$

$= x^2 + (a + b)^2x + (a - b)^2x + (a + b)^2(a - b)^2$

$= x\{x + (a + b)^2\} + (a - b)^2\{x + (a + b)^2\}$

$= \{x + (a + b)^2\}\{x + (a - b)^2\}$

$= (x + a^2 + 2ab + b^2)(x + a^2 - 2ab + b^2)$

हल करें —8.5

1. निम्न बहुपदी व्यंजकों का गुणनखण्ड निकालें।

(i) $(a+b)^2 - 5a - 5b + 6$

(ii) $(x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4)+12$

(iii) $x(x^2-1)(x+2)-8$

(iv) $7(a^2+b^2)^2 - 15(a^4-b^4) + 8(a^2-b^2)^2$

(v) $(x^2-1)^2 + 8x(x^2+1) + 19x^2$

(vi) $(a-1)x^2 - x - (a-2)$

(vii) $(a-1)x^2 + a^2xy + (a+1)y^2$

(viii) $x^2 - qx - p^2 + 5pq - 6q^2$

(ix) $2(a^2 + \frac{1}{a^2}) - (a - \frac{1}{a}) - 7$

(x) $(x^2-x)y^2 + y - (x^2+x)$

2. बहु विकल्पीय प्रश्न (M. C. Q):

(i) $a^2 - b^2 = 11 \times 9$ और a और b धनात्मक पूर्ण संख्यायें हों $(a > b)$ वो

(a) $a = 11, b = 9$ (b) $a = 33, b = 3$ (c) $a = 10, b = 1$ (d) $a = 100, b = 1$

(ii) यीद $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$ हो तो $a^3 + b^3$ का मान है।

(a) 1 (b) a (c) b (d) 0

(iii) $25^3 - 75^3 + 50^3 + 3\times25\times75\times50$ का मान है।

(a) 150 (b) 0 (c) 25 (d) 50

(iv) $a + b + c = 0$ हो तो $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$ का मान है।

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 3

(v) $x^2 - px + 12 = (x-3)(x-a)$ एक तादात्म्य हो तो a और p का मान क्रम से हैं।

(a) $a = 4, p = 7$ (b) $a = 7, p = 4$ (c) $a = 4, p = -7$ (d) $a = -4, p = 7$

3. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :

(i) $\frac{(b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3 + (a^2-b^2)^3}{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}$ का सरलतम मान लिखें।

(ii) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ और $a + b + c \neq 0$ हो तो a, b और c के बीच सम्बन्ध बता दें।

(iii) $a^2 - b^2 = 224$ एवं a और b धनात्मक पूर्ण संख्या $(a < b)$ a हो तो b और c के बीच सम्बन्ध लिखें।

(iv) $3x = a + b + c$ हो तो $(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 - 3(x-a)(x-b)(x-c)$ का मान लिखें।

(v) $2x^2 + px + 6 = (2x-a)(x-2)$ एक (Identity) हो तो a और p के मान लिखें।

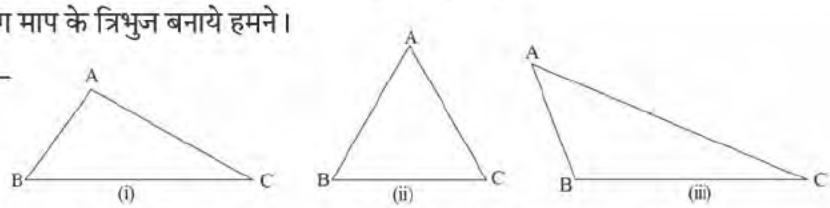
9 तिर्यक रेखा और मध्य बिन्दु युक्त प्रमेय
(TRANSVERSAL & MID-POINT THEOREM)

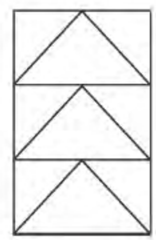
कॉलेज स्ट्रीट में मेरी बड़ी बुआ जी रहती हैं। पिछले दिन मैं बड़ी बुआ जी के घर घूमने गया था। गंगा पर बने पुल पर से गुजरते हुये पुल में बने विभिन्न ज्यामितीय आकारों को ध्यान से देखा। पुल देखने में बहुत सुन्दर लग रहा था। उसी समय निश्चय किया कि घर लौटकर विभिन्न माप की (काठ या बांस के) छड़ी (काठी)लेकर मैं पुल बनाने की कोशिश करुँगा।

इसीलिए मैं और मेरे तीन मित्र मिलकर पुल बनाने की चेष्टा करते हैं।

देखते हैं पुल में ढ़ेर सारा त्रिभुज का आकार हैं। इसलिए छड़ियों की सहायता से अलग-अलग प्रकार के और अलग-अलग माप के त्रिभुज बनाये हमने।

हमने बनाये—

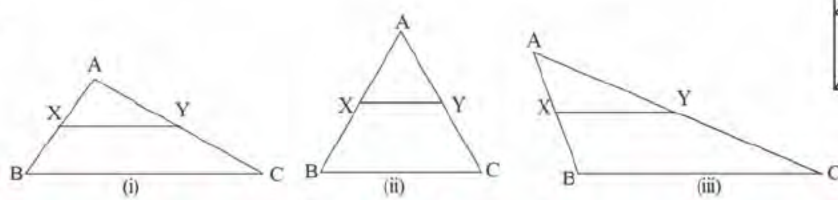




आयशा कई त्रिभुजों को जोड़कर कुछ-कुछ पुल जैसी आकृति तैयार करती हैं।

किन्तु तृषा ने दूसरी छड़ियों से बने त्रिभुजों के मध्य बिन्दुओं पर छड़ी रखकर बाँध देती हैं।

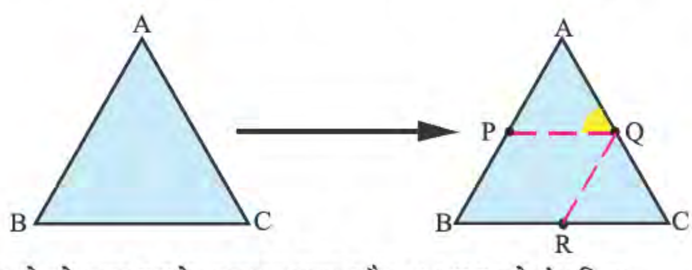
तृषा ने किया,



1. माप के देखा कि हरेक त्रिभुज में XY छड़ी की लम्बाई BC छड़ी की लम्बाई की आधी हैं। किन्तु इस तरह लगाने से क्या BC XY के समानान्तर हैं! आइयें स्वयं जाँच कर देखे।

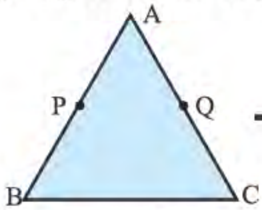
स्व-प्रयास

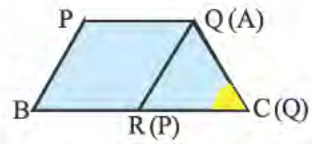
1. पहले एक सफेद कागज पर एक त्रिभुज ABC अंकित किया और त्रिभुजाकार क्षेत्र काट लिया।
2. अब कागज को मोड़कर ΔABC की AB और AC भुजा कें मध्य बिन्दु P और Q पाया।



3. फिर कागज को मोड़कर PQरेखा खण्ड पाया और $\angle AQP$ को रंग दिया।
4. अब कागज को मोड़कर BC भुजा कें मध्य बिन्दु R पाया,

5. अब APQ त्रिभुजाकार क्षेत्र को काटकर PBCQ चतुर्भज के ऊपर इस प्रकार रखा कि चित्र की तरह A बिन्दु Q बिन्दु पर पड़े और AQ , QC को ढ़क ले।





देखते हैं APQ त्रिभुजाकार क्षेत्र की PQ भुजाABC त्रिभुजाकार क्षेत्र की BC भुजा पर संपाती हो गयी हैं। किन्तु यहाँ PQ और B रेखा खण्ड के संपातिन होने के करण

$$PQ \,||\, BC$$

फिर पाते हैं P बिन्दु BC के मध्य बिन्दु R पर पड़ता हैं और इसे ढ़ँक लेता हैं।

$$\therefore PQ = RC = \frac{1}{2} BC$$

स्व प्रयास से पाते हैं, किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा खण्ड तृषा द्वारा रखी गयी छड़ी XY BC छड़ी के समानान्तर हैं।

प्रमेय 20 किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा इसकी तीसरी भुजा के समानान्तर और उसकी आधी होती हैं। तर्क सहित प्रमाणित करें।

दिया गया हैं : ABC त्रिभुज की AB भुजा का मध्य बिन्दु D और AC भुजा का मध्य बिन्दु E हैं; D और E को मिलाया।

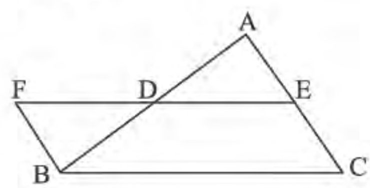
प्रमाणित करना हैं : (i) DE || BC और (ii) $DE = \frac{1}{2} BC$

अंकन (रचना) : ED को F बिन्दु तक इस प्रकार बढ़ाया कि ED = DF हो। B और F बिन्दुओं को मिलाया।

प्रमाण : Δ ADE और Δ BDF में AD = BD [D.AB का मध्य बिन्दु हैं]

∠ ADE =∠ BDF [सम्मुख कोण]

DE = DF [अंकन के अनुसार]



∴ Δ ADE ≅ ΔBDF [S-A-S शर्त्त से]

∴ AE = BF [सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाये]
किन्तु AE = CE [E, AC का मध्य बिन्दु हैं]

∴ BF = CE और ∠DAE = ∠DBF, किन्तु ये एकान्तर कोण हैं

∴ BF || AE अर्थात् BF || CE
BCEF चतुर्भुज में BF || CE और BF = CE

∴ BCEF एक समानान्तर चतुर्भुज हैं [BCEF चतुर्भुज की विपरीत भुजाओं की एक जोड़ी समान और समानान्तर हैं]

∴ DF || BC अर्थात् DE || BC (प्रमाणित)
और BC = EF = DE + DF = DE + DE = 2DE (∵ DE = DF)

∴ $DE = \frac{1}{2} BC$ (प्रमाणित)।

2 PQR त्रिभुज की PQ और PR भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: X और Y; X, Y हैं ; X और Y को मिलाया गया। तर्क सहित प्रमाणित करें कि $XY \parallel QR$ और $XY = \frac{1}{2}QR$ [स्वयं करे]

प्रयोग 1 आयशा ने एक समबाहु त्रिभुज ABC बनाया जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 8 cm. हैं। AB और AC के मध्य बिन्दु क्रमश: P और Q हैं; PQ की लम्बाई और $\angle APQ$ का मान लिखें।

त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा तीसरी

$PQ = \frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2} \times 8$ सेमि. = □ सेमि.

$PQ \parallel BC$.

$\angle APQ$ = संगत $\angle ABC = 60^\circ$ [$\because$ ABC समबाहु हैं]

प्रयोग 2 यदि ABC समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक भुजा की लम्बाई 6 से०मी० होती तो AB और AC के मध्य बिन्दुओं P और Q को मिलाने वाले रेखा खण्ड PQ ल० और $\angle APQ$ का मान लिखे।

[स्वयं करे]

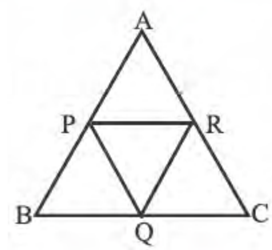
प्रयोग 3 जाकिर ने एक समबाहु त्रिभुज ABC बनाया हैं जिसकी AB, BC, CA तीनो भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: P, Q और R हैं। प्रमाणित करें कि PQR एक समबाहु त्रिभुज हैं।

प्रमाण : Δ ABC की AB और AC भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: P और R

$\therefore PR = \frac{1}{2}$ BC ....(i)

इसी प्रकार, $PQ = \frac{1}{2}$ CA ....(ii)

और $QR = \frac{1}{2}AB$ ....(iii)



$\because$ AB = BC = CA [$\because$ ABC समबाहु हैं]

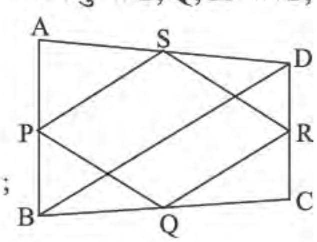
$\therefore$ AB = $\frac{1}{2}$ BC= $\frac{1}{2}$ CA $\frac{1}{2}$

$\therefore$ QR = PR= PQ

$\therefore$ PQR एक समबाहु त्रिभुज हैं।

प्रयोग 4 तर्क सहित प्रमाणित करे कि चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने बाकी रेखाये एक समानान्तर चतुर्भुज बनाती हैं।

दिया गया हैं : ABCD एक चतुभुर्ज हैं जिसकी AB, BC, CD और DA को मध्य बिन्दु जों P, Q, R और S; को मिलाने से बना □ PQRS हैं।



प्रमाणित करना हैं : PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।

अंकन : BD विकर्ण खींचा।

प्रमाण : Δ ABD में AB और AD भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: P और S ;

$\therefore PS \parallel BD$ और $PS = \frac{1}{2}BD$.

इसी प्रकार ΔCBD में CB और CD भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: □ और □

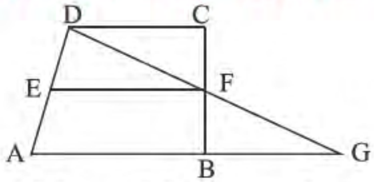
$\therefore QR \parallel BD$ और $QR = \frac{1}{2}$ BD.

$\because PS \parallel BD$ और $QR \parallel BD$, $\therefore PS \parallel QR$. $PS = \frac{1}{2}$□ और $QR = \frac{1}{2}BD$ $\therefore$ PS = QR

पाते हैं PQRS चतुर्भुज में $PS \parallel QR$ और PS = QR

PQRS एक □ [$\because$ PQRS की विपरीत भुजाओं की एक जोड़ी परस्पर समान और समानान्तर हैं]

प्रयोग 5 आयशा ने ABCD ट्रेपिजियम बनाया हैं जिसकी दो तिर्यक भुजाओं AD और BC के मध्य बिन्दु E और F हैं ; प्रमाणित करें कि EF || AB और $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$



दिया गया हैं : ABCD ट्रेपिजियम की तिर्यक भुजाओं AD और BC के मध्य बिन्दु और E और F हैं।

प्रमाण : EF || AB और (ii) $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

अंकन (रचना) : D, F को मिलाते हुये इस रेखा को आगे बढ़ाया ताकि यह AB के बड़े हुये भाग से बिन्दु G पर मिलती हैं।

प्रमाण : Δ DFC और Δ BFG में, $\angle CFD$ = सम्मुख $\angle BFG$

$\angle FCD$ = एकान्तर $\angle FBG$ [$\because$ DC||AB अर्थात DC || AG , BC इनसे मिलती हैं $\angle BCD$ = एवं $\angle CBG$]

CF = BF [$\because$ F, BC भुजा का मध्य बिन्दु हैं]

$\therefore \Delta DFC \cong \Delta BFG$ [सर्वांगसमता त्रिभुजो की A-A-S शर्त्त से]

$\therefore$ DC = BG और DF = FG [सर्वांगसमता त्रिभुजों की समान भुजायें]

ΔADG में AD और AG के मध्य बिन्दु क्रमशः E और F

$\therefore$ EF || AG अर्थात् EF || AB और $EF = \frac{1}{2}AG$

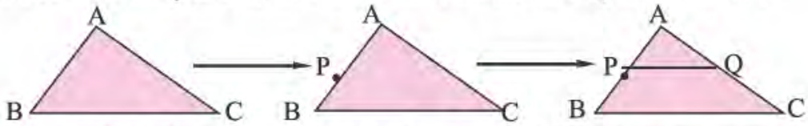
$= \frac{1}{2}(AB + BG) = \frac{1}{2}(AB + DC)$ (प्रमाणित)

प्रयोग 6 ABCD ट्रेपिजियम में AB || DC और E, AD के मध्य बिन्दु हैं। यदि E बिन्दु से AB के समानान्तर खींची गयी रेखा BC को F बिन्दु पर काटी थी। प्रमाणित करे कि (i) F, BC का मध्य बिन्दु हैं और (ii) $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$ [स्वयं करे]

हमलोग स्वप्रयास से विभिन्न प्रकार के त्रिभुज निर्मित करके मध्य बिन्दु वाले और दूसरे प्रमेय की जाँचने की चेष्टा करें।

स्वप्रयास

(1) पहले किसी भी तरह का एक त्रिभुजाकार क्षेत्र ABC की रचना करके इसे काट लिया।
(2) कागज को मोड़कर AB का मध्य बिन्दु P पाया।
(3) इसके बाद AB के P बिन्दु BC के समानान्तर सरल रेखा खण्ड PQ की रचना की।



(4) कागज को मोड़कर देखते हैं AC का मध्य बिन्दु और Q एक ही बिन्दु हैं अर्थात् Q, AC का मध्य बिन्दु हैं।
(5) पहले की तरह APQ त्रिभुजाकार क्षेत्र को काटकर PBCQ चतुर्भुज को ऊपर रखते हैं जिससे कि A बिन्दु Q बिन्दु पर और AQ और QC संपातित हो जाँय। पाया कि $PQ = \frac{1}{2}BC$

स्वप्रयास से पाते हैं कि किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी भुजा के समानान्तर खींची गयी रेखा इसकी तीसरी भुजा को समद्धिभाजित करती हैं और यह दूसरी भुजा की आधी होती हैं।

प्रमेय 21 तर्क सहित प्रमाणित करें कि किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी भुजा के समानान्तर खींची गयी रेखा खण्ड तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती हैं और यह दो भुजाओं के बीच घिरी रेखा दूसरी भुजा की आधी होती हैं

दिया गया हैं : ΔABC की AB भुजा का मध्य बिन्दु D के BC समानान्तर DE रेखा खींची गयी हैं जो AC भुजा E बिन्दु पर मिलती हैं।

प्रमाण : AE = CE और $DE = \frac{1}{2}BC$

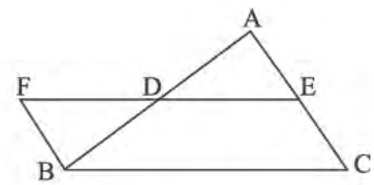
अंकन (रचना) : ED को इसकी में F बिन्दु तक इस प्रकार बढ़ाया ताकि ED=DF हो। B और F को मिलाया।

प्रमाण : ΔADE और ΔBDF में

AD = BD [दिया गया हैं]

$\angle ADE = \angle BDF$ [सम्मुख कोण]

DE = DF [रचना से]



$\therefore \Delta ADE \cong \Delta BDF$ [S-A-S शर्त से]

$\therefore$ AE = FB [सवांगसम त्रिभुजो को संगत भुजायें]

और $\angle DAE = \angle DBF$, किन्तु ये एकान्तर कोण हैं।

$\therefore AE \parallel BF$ या $CE \parallel BF$

फिर $EF \parallel BC$ [दिया गया हैं]

$\therefore$ BCEF एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।

$\therefore$ BC = FE और BF = CE किन्तु FB = AE

$\therefore$ AE = CE (प्रमाणित)

फिर, BC = EF = DF + DE = DE + DE [$\because$ DF = DE] = 2DE

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$ (प्रमाणित)।

शाकिल ने एक मजेदार काम किया। उसने अभी प्रमाणित किया 21 न० प्रमेय की सहायता से दूसरी पद्धति (अन्य प्रकार) से 21 न० प्रमेय को प्रमाणित किया।

अब हम अन्य प्रकार से प्रमाणित करते हैं कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा इसकी तीसरी भुजा समानान्तर और उसकी आधा होती हैं।

दिया गया हैं : ΔABC की AB और AC भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: D और E हैं; D, E को मिलाया गया हैं।

प्रमाण : (i) $DE \parallel BC$ (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$

अंकन (रचना) : AC का मध्य बिन्दु E से AB के समानान्तर एक रेखा खींचा जो BC से F बिन्दु पर मिलती है।

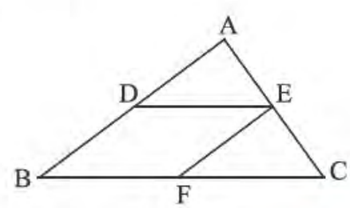
प्रमाण : E, AC का मध्य बिन्दु हैं और $EF \parallel AB$ [रचना के अनुसार]

$\therefore$ F, BC का मध्य बिन्दु हैं अर्थात् $BF = \frac{1}{2}BC$ एवं $EF = \frac{1}{2}AB$

फिर, $EF = \frac{1}{2}AB = DB$ [$\because$ D, AB का मध्य बिन्दु हैं]

चतुर्भुज DBFE में

EF = DB और $EF \parallel DB$ [रचना से]



$\therefore$ DBFE एक समानान्तर चतुर्भुज हैं

$\therefore DE \parallel BF$ अर्थात् $DE \parallel BC$ [(i) न० प्रमाणित]

$DE = BF = \frac{1}{2}BC$ [(ii) न० प्रमाणित]

प्रयोग : 7 आयशा ने एक समकोण त्रिभुज ABC बनाया जिसमें $\angle BAC$ समकोण और कर्ण BC का मध्य बिन्दु D है। तर्क सहित प्रमाणित करे कि $AD = \frac{1}{2}BC$

दिया गया है (प्रदत्त) : ΔABC मे $\angle BAC = 90^\circ$ और BC का मध्य बिन्दु D है।

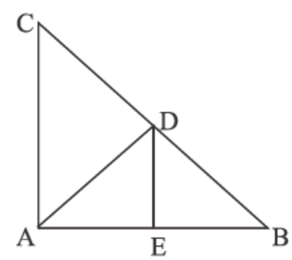
प्रमाणित करना है कि : $AD = \frac{1}{2}BC$

अंकन : D बिन्दु से AC के समानान्तर सरल रेखा खींचा जो AB से बिन्दु E पर मिलती है।

प्रमाण : ΔABC की भुजा BC का मध्य बिन्दु D है एवं $DE \| AC$ [रचनानुसार]

$\therefore$ E, AB का मध्य बिन्दु है।

अतः, $AE = EB$ —— (i)



फिर $AC \| DE$ और AB इनसे मिलती है

$\therefore \angle DEB =$ संगत $\angle CAB = 90^\circ$

ΔAED और ΔDEB में

$AE = EB$

$\angle AED = \angle DEB = 90^\circ$

और DE दोनो में उभयनिष्ठ भुजा है।

$\therefore \Delta AED \cong \Delta DEB$ [सर्वांगसमता की S-A-S शर्त से]

$\therefore AD = DB$ [सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजायें]

$\therefore AD = DB = \frac{1}{2} BC$ [$\because$ D, BC का मध्य बिन्दु है]

प्रयोग : 8 Δ ABC की AD मध्यिका का मध्य बिन्दु E है और BE को आगे बढ़ाने पर AC भुजा से बिन्दु F पर मिलती है तो प्रमाणित करें कि $AF = \frac{1}{3}AC$

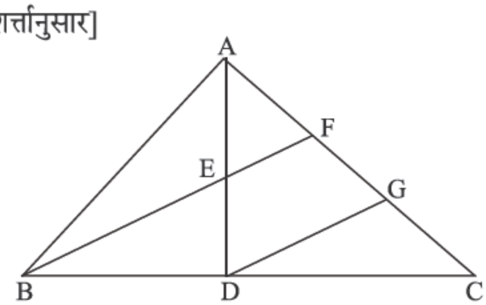
प्रदत्त : ΔABC को AD मध्यिका का मध्य बिन्दु E है और BE को आगे बढ़ाने पर AC से F बिन्दु पर मिलती है।

उद्देश्य : $AF = \frac{1}{3}AC$

अंकन : D बिन्दु से BF के समानान्तर सरल रेखा खींचा जो AC से बिन्दु G पर मिलती है।

प्रमाण : ΔBFC मे D, BC का मध्य बिन्दु है [$\because$ AD शर्त्तानुसार]

और $DG \| BF$ [रचनानुसार]



$\therefore$ G, FC का मध्य बिन्दु है।

$\therefore FG = GC$ —— (i)

फिर ΔADG में E, AD का मध्य बिन्दु है

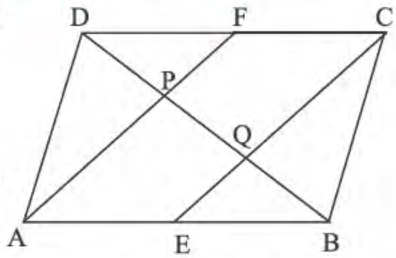
और $EF \| DG$ (रचनानुसार)

$\therefore$ F, AG का मध्य बिन्दु है।

$\therefore AF = FG$ —— (ii)

$\therefore AF = FG = GC$ $\qquad \therefore AF = \frac{1}{3}AC$ (प्रमाणित)

प्रयोग : **9** ABCD समानान्तर चतुर्भुज की AB और DC भुजाओं के मध्य बिन्दु E और F है। A, F और C, E को मिलाया गया है। AF और CE विकर्ण BD को क्रमश: P और Q बिन्दु पर काटते है। तो प्रमाणित करना है कि AF और CE विकर्ण BD को समद्विखण्डित करते है।



संकेत : ABCD समानान्तर चतुर्भुज में $AB \parallel DC$ और $AB = DC$

$\therefore AE \parallel FC$ और $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC$

अर्थात्, $AE = FC$

$\therefore$ AECF एक समानान्तर चतुर्भुज है ($\because AE \parallel FC$ और $AE = FC$)

$\therefore AF \parallel EC$

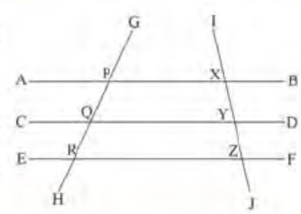
मध्य बिन्दु वाले प्रमेयों की सहायता से

$BQ = QP$ एवं $QP = PD$ यह स्वयं प्रमाणित करें—

$\therefore BQ = QP = PD$

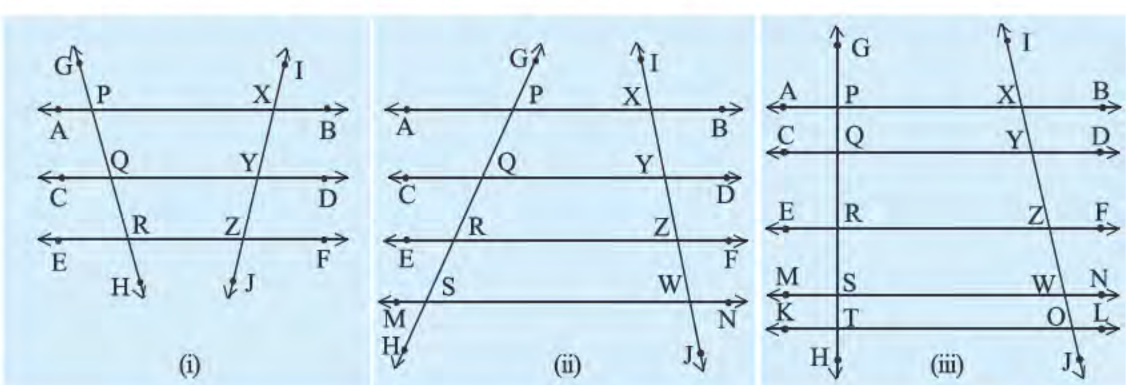
हम सभी मित्र मिलकर जब छड़ी से पुल बनाते त्रिभुज बनाते, त्रिभुजाकार क्षेत्र वाले, कागज को काटते इन्हे मोड़कर इनकी भुजाओं के मध्य बिन्दु जानने और Identify का सम्बन्ध स्व प्रयास से जानने में व्यस्त थे। उसी समय मेरा ममेरा भाई कुणाल घर के सामने मैदान में बनें पण्डाल देखकर आयताकार कागज को चार बार मोड़ता है। इसके बाद कागज को तिर्यक दिशा में मोड़ दिया तो नीचे के चित्र जैसा पाया।

देखते है AB, CD, EF तीन समानान्तर सरल रेखाये है और GH सरल रेखा खण्ड AB, CD, और EF द्वारा क्रमश: P, Q और R बिन्दु पर दो समान भागों में बाटी गयी है अर्थात् $PQ = QR$, और मापकर देखते है कि IJ सरल रेखा खण्ड भी इन तीन समानान्तर सरल रेखा खण्डो द्वारा XY और YZ दो समान-समान भागों में बँट गयी है।



किन्तु हर बार क्या यह संभव है ? अर्थात तीन या अधिक परस्पर समानान्तर सरल रेखाये किसी एक तिर्यक पर समान-समान अन्त खण्ड बनायें तो दूसरी तिर्यक पर भी क्या ये समान-समान खण्ड बनेंगे ? चित्र बनाकर स्वप्रयास से मापकर जाँच कर लें।

हमने कई समानान्तर रेखाओं और उन्हें काटने वाली तिर्यक रेखा बनाये है — वो है।



(i) (ii) (iii)

समानान्तर सरल रेखाओं द्वारा प्रत्येक तिर्यक पर बने अर्न्तखण्डों की लम्बाईयों को मापकर नीचे की सारणी में लिखों :

चित्र	समानान्तर सरल रेखा	GH तिर्यक पर अर्न्तखण्डों की ल० [माप कर पाया]	IJ तिर्यक पर अर्न्तखण्डों की ल० [मापकर पाया है]	निष्कर्ष
चित्र न०(i)	AB, CD और EF	PQ = QR = ☐	XY = YZ = ☐	AB, CD, EF तीन समानान्तर सरल रेखायें GH पर समान समान भाग काटती है तो IJ पर भी समान समान भाग काटती है।
चित्र न०(ii)	स्वयं लिखें	स्वयं लिखें	स्वयं लिखें	स्वयं लिखें
चित्र न० (iii)	AB, CD,EF, MN और KL	सभी अन्तर्खण्ड समान नहीं है।	सभी अन्तर्खण्ड समान नहीं है।	AB, CD, EF MN व KL 5 समानान्तर रेखायें GH तिर्यक पर समान समान अंश न काटे तो दूसरी तिर्यक IJ पर भी समान–समान अंश नहीं कटेगीं।
(iv) न० चित्र इसी प्रकार (तीन से अधिक) कई समानान्तर सरल रेखायें बनायें और दो तिर्यक लेकर जाँचें। [स्वयं करे]				

3 मैंने ऐसी ही 4 परस्पर समानान्तर सरल रेखायें खींचा जो एक तिर्यक रेखा पर समान समान खण्ड काटती है। यही 4 समानान्तर सरल रेखाओं पर दूसरी तिर्यक रेखा खींचकर और मापकर देखा कि अन्तर्खण्ड समान समान है — [स्वयं केर]

∴ स्वप्रयास से पाया यदि तीन या अधिक समानान्तर सरल रेखायें किसी तिर्यक रेखा पर समान–समान अन्तर्खण्ड बनायें तो ये दूसरी तिर्यक पर भी समान–समान अन्तर्खण्ड काटेगी।

प्रमेय 22 : तर्क सहित प्रमाणित करे कि यदि तीन या अधिक समानान्तर सरल रेखायें किसी तिर्यक पर समान समान अन्तर्खण्ड बनायें तो ये दूसरी तिर्यक रेखा पर भी समान–समान अण्तर्खण्ड बनायेगी।

प्रदत्त : AB, CD और EF तीन परस्पर समानान्तर सरल रेखाये PQ तिर्यक पर GH और HI समान–समान खण्ड बनाती है अर्थात् GH=HI; यही तीनो समानान्तर सरल रेखायें दूसरी तिर्यक रेखा XY पर JK और KL दो खण्ड काटती है।

उद्देश्य : JK= KL

अंकन : G और L बिन्दुओं को मिलाया जो CD को बिन्दु T पर काटती है।

प्रमाण : ΔGIL में H, GI का मध्य बिन्दु है [∵ GH = HI, प्रमाणित]
और HT || IL [दिया गया है]
∴ T, GL का मध्य बिन्दु है।
फिर ΔGLJ में T, GL का मध्य बिन्दु है और TK || GJ [प्रमाणित]
∴ K, JL का मध्य बिन्दु है
∴ JK = KL (प्रमाणित)

[प्रमेय 22 का प्रमाण पाठ्यक्रम में शामिल नहीं]

स्वयं हल करें — 9

1. ABC त्रिभुज की BC भुजा का मध्य बिन्दु D है। D बिन्दु से CA और BA भुजा के समानान्तर सरल रेखा खण्ड BA और CA भुजा को क्रमश: E और F बिन्दु पर मिलती है। प्रमाणित करें कि $EF = \frac{1}{2}BC$

2. D और E क्रमश: ABC त्रिभुज को इस प्रकार स्थित है कि $AD = \frac{1}{4}AB$ और $AE = \frac{1}{4}AC$; प्रमाणित करें कि $DE \parallel BC$ और $DE = \frac{1}{4}BC$

3. X और Z क्रमश: PQR त्रिभुज की QR और QP भुजाओं के मध्य बिन्दु है। QP भुजा की S बिन्दु तक इस प्रकार बढ़ाया गया कि PS = ZP हो SX, PR भुजा को Y बिन्दु पर काटती है। प्रमाणित करे कि $PY = \frac{1}{4}PR$

4. प्रमाणित करें कि किसी समानान्तर चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखायें एक समानान्तर चतुर्भुज बनाती है।

5. प्रमाणित करें कि एक आयताकार चित्र की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं की मिलाने वाली रेखाये जो चतुर्भुज बनाती है वह एक रोम्बस है लेकिन वर्ग नहीं।

6. प्रमाणित करे कि एक वर्गाकार चित्र की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना चतुर्भुज एक वर्गाकार चित्र है।

7. प्रमाणित करे कि किसी रोम्बस की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से जो चतुर्भुज बनता है वह एक आयताकार चित्र है।

8. ABC त्रिभुज में AB और AC भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: D और E है; P और Q क्रमश: CD और BD के मध्य बिन्दु है। प्रमाणित करे कि BE और PQ एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

9. ABC त्रिभुज में $\angle ABC$ के समद्विभाजक पर AD लम्ब है। बिन्दु D से BC के समानान्तर सरल रेखा खण्ड DE खींचा गया जो AC भुजा E बिन्दु पर मिलती है। प्रमाणित करे कि AE = EC.

10. ABC त्रिभुज की AD एक मध्यिका है। B और C बिन्दु से AD के समानान्तर सरल रेखा खण्ड BR और CT खींचे गये जो BA के बढ़े हुये भाग से और CA भुजा से क्रमश: T और R बिन्दुओं पर मिलते है। प्रमाणित करना है कि $\frac{1}{AD} = \frac{1}{RB} + \frac{1}{TC}$

11. ABCD ट्रेपिजियम में $AB \parallel DC$ और $AB > DC$; E और F क्रमश: विकर्ण AC और BD के मध्य बिन्दु है। प्रमाणित करे कि $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$

12. AB रेखा खण्ड का मध्य बिन्दु C है और PQ कोई सरल रेखा है। A, B और C बिन्दु से PQ सरल रेखा की न्यूनतम दूरी क्रमश: AR, BS और CT है। प्रमाणित करे कि AR + BS = 2CT

13. ABC त्रिभुज में BC भुजा का मध्य बिन्दु D है। A बिन्दु से PQ एक सरल रेखा है। B, C और D बिन्दुओं से PQ सरल रेखा खण्ड पर क्रमश: BL, CM और DN लम्ब है। प्रमाणित करे कि DL = DM.

14. ABCD एक वर्ग है। AC और BD विकर्ण एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते है। $\angle BAC$ का समद्विभाजक BO से P बिन्दु पर और BC से बिन्दु Q पर मिलता है। प्रमाणित करे कि $OP = \frac{1}{2}CQ$

15. बहुविकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.):

(i) PQR त्रिभुज में $\angle PQR = 90^\circ$ और PR = 10 cm। PR भुजा का मध्य बिन्दु S हो तो QS की लम्बाई (a) 4 cm (b) 5 cm (c) 6 cm (d) 3 cm

(ii) ABCD ट्रेपिजियम में AB || DC और AB = 7 cm और DC = 5 cm। AD और BC भुजाओ के मध्य बिन्दु क्रमशः E और F हो तो EF की लम्बाई है

(a) 5 cm (b) 6 cm (c) 7 cm (d) 12 cm

(iii) ABC त्रिभुज की मध्यिका AD का मध्य बिन्दु E है। BE का बढ़ा हुआ भाग AC से बिन्दु F पर मिलता है। AC = 10.5 cm हो तो AF की लम्बाई है

(a) 3 cm (b) 3.5 cm (c) 2.5 cm (d) 5 cm

(iv) ABC त्रिभुज की BC, CA और AB भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E और F है। BE और DF, X बिन्दु पर और DE और CF, Y बिन्दु पर काटे तो XY की लम्बाई है

(a) $\frac{1}{2}BC$ (b) $\frac{1}{4}BC$ (c) $\frac{1}{3}BC$ (d) $\frac{1}{8}BC$

(v) ABCD समानान्तर चतुर्भुज की BC भुजा का मध्य बिन्दु E है। DE और AB का बढ़ा हुआ भाग F बिन्दु पर मिलते है। AF की लम्बाई है

(a) $\frac{3}{2}AB$ (b) 2AB (c) 3AB (d) $\frac{5}{4}AB$

16. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :

(i) ABC त्रिभुज में AD और BE मध्यिकाये और BE के समानान्तर सरल रेखा DF, AC भुजा से F बिन्दु पर मिलते है। AC भुजा की लम्बाई 8 cm. हो तो CF भुजा को लम्बाई क्या होगी ?

(ii) ABC त्रिभुज की BC, CA और AB भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q और R है। यदि AC = 21 cm. BC = 29 cm. और AB = 30 cm. हो तो ARPQ चतुर्भुज की परिसीमा लिखें।

(iii) ABC त्रिभुज में AC भुजा पर D कोई बिन्दु है। P, Q, X, Y, क्रमशः AB, BC, AD और DC के मध्य बिन्दु है। PX = 5 cm. हो तो QY की लम्बाई कितनी होगी लिखें।

(iv) ABC त्रिभुज में BE और CF मध्यिकायें एक दूसरे को बिन्दु G पर काटती है। P और Q क्रमशः BG और CG के मध्य बिन्दु है। PQ = 3 cm. हो तो BC की लम्बाई क्या होगी लिखें।

(v) ABC त्रिभुज की BC, CA और AB भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E और F ; FE, AD को O बिन्दु पर काटती है। AD = 6 cm. हो तो AO की लम्बाई क्या है लिखें।

10 लाभ और हानि
(PROFIT AND LOSS)

हमारे विद्यालय का स्थापना दिवस 18 जनवरी हैं। हमलोगों ने एक प्रदर्शनी का आयेजन किया है। इस आयेजन में हमलोगो ने अपने हाथ से बनाई वस्तुओं को बेचने का भी निश्चय किया है।

सुप्रिया ने 4 रु० की दर से 10 चित्र बेचा।

गणना करके देखा कि एक चित्र बनाने में 2 रु० खर्च हुए थे।

∴ उन 10 चित्रों पर उत्पादन खर्च 10 × 2 रु० = 20 रु०

किन्तु उन्ही 10 चित्रों को बेचकर पाया 10 × 4 रु० = 40 रु०

बेचकर उत्पादन खर्च से ज्यादा रूपये पाने को क्या कहा जाएगा ?

किसी वस्तु को बेचकर उसे खरीदे जाने वाले मूल्य से ज्यादा रूपये पाने को लाभ कहा जाता है।

यहाँ चित्रों को खरीदे जाने वाले (उत्पादन) मूल्य (क्रय मूल्य) = 20 रु०, बेचकर पाया गया मूल्य (विक्रय मूल्य) = 40 रु०

∴ लाभ = 40 रु० - 20 रु० = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

लाभ = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य

किन्तु सजल ने शकील चाचा को 10 चित्र 1 रु० के चित्र को दर से ही दिया (बेचा)।

यहाँ 10 चित्रों का विक्रय मूल्य = 10 × 1 रु० = 10 रु०

किन्तु इन्ही 10 चित्रों का क्रय मूल्य 10 × 2 रु० = 20 रु०

सजल ने 10 चित्र बेचकर खरीदे गए मूल्य से कम से कम मूल्य पाया।

इस तरह बेचकर क्रय मूल्य से कम मूल्य पाने को क्या कहा जाएगा ?

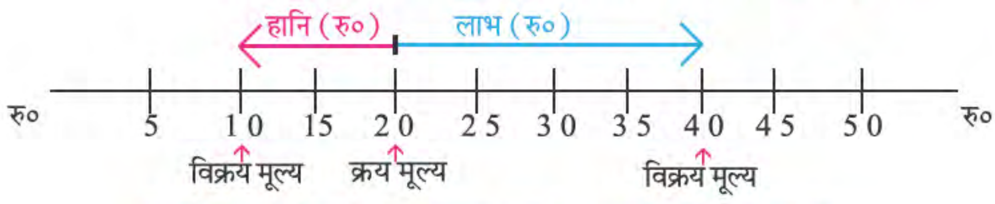
किसी भी वस्तु को बेचकर क्रय मूल्य से कम मूल्य पाने को हानि कहा जाता है।

यहाँ खरीद मूल्य (क्रय मूल्य) = 20 रु०। विक्रय मूल्य = ☐ रु०

∴ हानि = 20 रु० - 10 रु० = क्र०मू० - वि०मू०

हानि = क्रय मू० - विक्रय मू०

हम एक सरल रेखा पर लाभ और हानि को दिखाने का प्रयास करे।



देखते है विक्रय मूल्य ☐ क्रय मूल्य [>/<] हो तो लाभ होता है।

और विक्रय मूल्य ☐ क्रय मूल्य [>/<] हो तो हानि होता है।

1 आज विद्यालय में टिफिन के समय मैंने और जयन्त ने कुछ फल खरीद लाए। मैंने 6 अमरूद 25 रूपये में और जयन्त ने 6 केले 10 रु० में खरीदा। हमारे छः मित्रो ने हमारे द्वारा खरीदे गये फलों को बराबर-बराबर बाँट लिया अर्थात् प्रत्येक ने 1 अमरूद और 1 केला लिया और प्रत्येक ने 1 अमरूद के लिये 4 रु० और 1 केला के लिये 2 रु० हमें दिया।

1.1 अब गणना करके देखते है कि फलों को बेचकर हमने उनके खरीद मूल्य से अधिक रू० पाया या कम रूपये पाया।

मैंने अमरूद खरीदा ☐ रु० में किन्तु बेचकर पाया 4×6 रु० = ☐ रु०।

चूँकि विक्रय मूल्य ☐ क्रय मूल्य [>/<]

∴ मैंने अमरूद बेचकर 25 रु० – 24 रु० = ☐ रु० ☐ [लाभ/हानि] पाया।

1.2 गणना करके देखते है कि अमरूद बेचकर हमे कितना प्रतिशत हानि होती है।

25 रु० पर हानि 1 रु० है

1 रु० पर हानि $\frac{1}{25}$ रु० है

100 रु० पर हानि $\frac{1}{\cancel{25}} \times \overset{4}{\cancel{100}}$ रु० = 4 रु०

समझाते है, अमरूद बेचकर मुझे 4% हानि हुई।

∴ पाते हैं हानि प्रतिशत = $\frac{\text{कुलहानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

1.3 गणना करके देखते है कि केले बेचकर जयन्त को कितना प्रतिशत लाभ या हानि हुई।

जयन्त ने केले खरीदा था ☐ रु० में।

किन्तु केले बेचकर जयन्त ने ☐ × ☐ रु० = 12 रु० पाया।

∴ केले बेचकर जयन्त को (☐ रु० - ☐ रु०) = 2 रु० ☐ [लाभ/क्षति] हुआ।

जयन्त 10 रु० पर लाभ पाता है 2 रु०

∴ 1 रु० पर लाभ पाता है $\frac{1}{10}$ रु०

∴ 100 रु० पर लाभ पाता है $\frac{2 \times \overset{10}{\cancel{100}}}{\cancel{10}}$ रु० = 20 रु०

जयन्त ने केले बेचकर 20% लाभ पाया।

∴ पाते है, लाभ प्रतिशत = $\frac{\text{कुल लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

1.4 किन्तु जयन्त ने विक्रय मूल्य पर कितने रुपये लाभ किया-गणना करके लिखते है।

12 रुपये पर लाभ करता है 2 रुपये

1 रुपये पर लाभ करता है $\frac{2}{12}$ रुपये

$\therefore$ 100 रुपये पर लाभ करता है $\frac{\cancel{2}}{\cancel{12}_{\cancel{6}\,3}} \times \overset{50}{\cancel{100}}$ रु॰ $= \frac{50}{3}$ रु॰ $= 16\frac{2}{3}$ रु॰

अर्थात् विक्रय मूल्य पर लाभ करता है $16\frac{2}{3}\%$

अब हम इसे दूसरी विधि, समानुपात को विधि से गणना करते है।
गणित की भाषा में समस्या हैं-

विक्रय मूल्य	लाभ (रु॰)
12	2
100	?

$\because$ विक्रय मूल्य और लाभ में ☐ (सीधा/व्यस्त) संबन्ध है।

$\therefore$ सरल समानुपात है, 12:100::2: ?(अभीष्ट)

$\therefore$ अभीष्ट लाभ $= \frac{100}{12} \times 2\ \% = 16\ \frac{2}{3}\%$

1.5 नसरीन एक कलम बेचकर विक्रय मूल्य पर 20% लाभ करती हैं। तो उनको क्रय मूल्य पर कितना प्रतिशत लाभ हुआ-गणना करे।

विक्रय मूल्य 100 रु॰ हो तो लाभ = 20 रुपये

$\therefore$ क्रय मूल्य (100 – 20) रु॰ = 80 रु॰

80 रुपये पर लाभ 20 रु॰

1 रुपये पर लाभ $\frac{20}{80}$ रु॰

100 रुपये पर लाभ $100 \times \frac{20}{80}$ रु॰ = 25 रु॰।

$\therefore$ नसरीन को क्रय मूल्य पर 25% लाभ हुआ।

1.6 10 कलमों का क्रय मूल्य 8 कलमों के विक्रय मूल्य के समान हो तो लाभ या हानि का प्रतिशत बतायें।

10 कलमों का क्रय मूल्य 100 हो तो

8 कलमों का विक्रय मूल्य 100 रु॰ है।

1 कलम का विक्रय मूल्य $\frac{100}{8}$ रु॰

10 कलमों का विक्रय मूल्य $10 \times \frac{100}{8}$ रु॰ = 125 रु॰

$\therefore$ 10 कलमों को बेचकर लाभ ☐ रु॰ है। $\therefore$ लाभ प्रतिशत = ☐

1.7 सारणी में रिक्त स्थान की पूर्ति करे :

क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	लाभ/हानि	लाभ/हानि का प्रतिशत	विक्रय मू॰ पर लाभ/हानि का प्रतिशत
400 रु॰	475 रु॰			
125 रु॰		25 रु॰ लाभ		
750 रु॰		50 रु॰ हानि		

हमारे नसीबपुर गाँव की सोफिया बीबी घर पर आचार बनाकर छोटी-छोटी शीशीयो में भरकर गाँव के बाजार में बेचती हैं।

मैंने सोचा है कि सोफिया बीबी को आचार बनाने में कितना खर्च पड़ता हैं अर्थात् आचार उत्पादन-खर्च अथवा क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य जानूंगा।

मैंने गणना करके देखा कि 1 शीशी आचार का उत्पादन खर्च 20 रुपये है।
किन्तु सोफिया बीबी प्रति शीशी आचार 25 रु० में बेचती है।

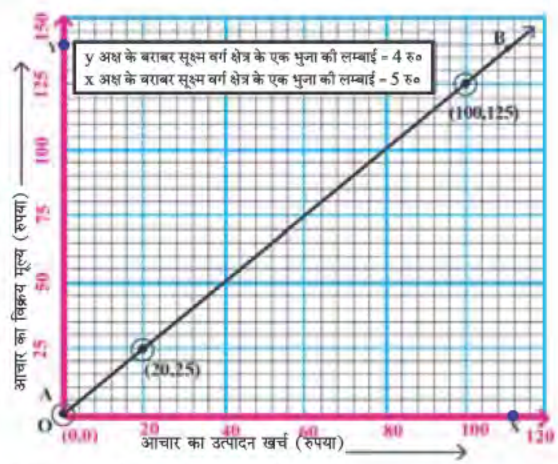
अब सोफिया बीबी के आचार के क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य की सारणी बनाते है।

आचार का क्रय मूल्य (रु०)	0	20
आचार का विक्रय मूल्य (रु०)	0	25

2 हम वर्गांकित कागज पर सोफिया बीबी के क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य के तथ्यों से एक लेखाचित्र अंकित करें।

(1) पहले वर्गांकित कागज पर दो परस्पर लम्बवत सरल रेखाये x अक्ष और y अक्ष अंकित किया।

(2) x अक्ष पर आचार का उत्पादन खर्च (रु० में) और y अक्ष पर आचार का विक्रय मूल्य (रु० में) निश्चित कर (0,0) और (20,25) बिन्दुओं को चिन्हित करके मिलाने पर OB किरण पाया।



लेखाचित्र से क्या-क्या तथ्य पा सकते हैं-

(1) देखते है, क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य का लेखाचित्र एक सरल रेखा है। अर्थात क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य ☐ (सीधा/व्यस्त) समानुपात हैं।

(2) सोफिया बीबी का यदि उत्पादन खर्च 100 रु० हो, तो लेखाचित्र से विक्रय मूल्य ज्ञात करें।

पाते हैं, उत्पादन खर्च 100 रु० होने पर विक्रय मूल्य 125 रुपये हैं।

अर्थात् इस स्थिति में सोफिया बीबी को लाभ होगा 125 रु० - 100 रु० = 25 रु०।

समझा, लेखाचित्र से आचार बेचकर सोफिया बीबी का लाभ प्रतिशत 25 या 25%

(3) फिर लेखाचित्र से पाते है, विक्रय मूल्य 100 रु० हो तो क्रय मूल्य ☐ रु० [स्वयं लिखे]

इस दशा में विक्रय मूल्य पर प्रतिशत लाभ क्या होगा देखें-

लेखाचित्र से पाते है विक्रय मूल्य 100 रु हो तो उत्पादन खर्च 80 रु० है।

$\therefore$ लाभ = ☐ रु० - 80 रु० = 20 रु० $\therefore$ विक्रय मूल्य पर लाभ प्रतिशत 20 हैं।

(4) लेखाचित्र से क्रय मूल्य 120 रु० हो तो विक्रय मूल्य ☐ रु० [स्वयं लिखे]
इस दशा में सोफिया बीबी को कितने रु० का लाभ होगा [गणना कर देखे]

(5) लेखाचित्र से विक्रय मूल्य 75 रु० हो तो सोफिया बीबी का उत्पादन खर्च कितने रुपये होंगे गणना करके लिखे। [स्वयं करे]

3 मैंने और मेरे मित्र सायन ने सोचा है कि खुला जिस्ता कागज खरीदकर छोटी-छोटी अभ्यास पुस्तिका बनाकर बेचेंगे। इस बिक्री से जितने रुपये लाभ मिलेगे उन्हे नि:शुल्क चिकित्सालय में दुखी लोगों की दवाओं के लिए दे देंगे। इसलिए यह निश्चित किया पुस्तिकाओं को 25% लाभ पर बेचेंगे लेखाचित्र खींचकर अपने द्वारा तैयार की गयी अभ्यास पुस्तिकाओं के क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य की गणना करें।

हम 25% लाभ पर पुस्तिका बेचेगे अर्थात्

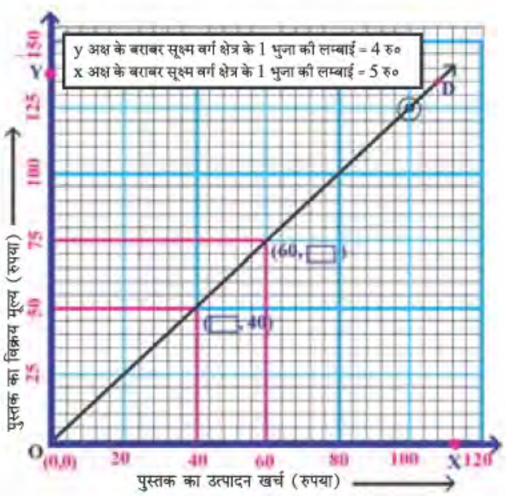
पुस्तिकाओं का क्रय मूल्य 100 रु० हो तो विक्रय मूल्य (100 + ☐) रु० = ☐ रु० होगा।

हमने क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य की एक सारणी बनाई–

पुस्तिका का क्रय मूल्य (रु०)	0	100
पुस्तिका का विक्रय मूल्य (रु०)	0	125

1. पहले वर्गांकित कागज पर x अक्ष और y अक्ष निश्चित करके सबसे छोटे वर्ग की एक भुजा के बराबर एक अंक माना।
2. x अक्ष पर पुस्तिका का क्रय मूल्य और y अक्ष पर पुस्तिका का ☐ लिया।
3. वर्गांकित कागज पर ☐ और ☐ बिन्दुओं को अंकित कर मिलाकर OD किरण पाया।

(i) लेखाचित्र में तैयार की गयी अभ्यास पुस्तिकाओं को तैयार करने पर खर्च यदि 60 रु० हो तब 25% लाभ पर विक्रय करने के लिये विक्रय मूल्य कितना रखना पड़ेगा।



(ii) लेखाचित्र से पुस्तिकाओं को तैयार करने के खर्च के साथ विक्रय मूल्य का संबंध लिखे।

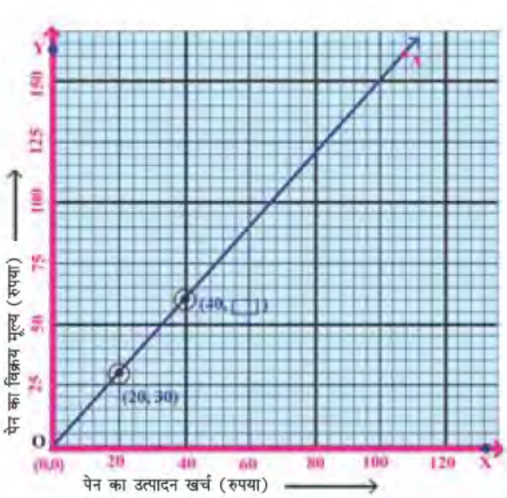
(iii) लेखाचित्र से 40 रु० विक्रय मूल्य हो तो पुस्तिका तैयार करने में कितना रुपया खर्च होगा-लिखे।

(iv) लेखाचित्र से, बताए कि 80 रु० पुस्तिका तैयार करने में खर्च हो तो विक्रय मूल्य कितना होगा। (स्वयं करें)

(v) लेखाचित्र से, बताए 150 रु० विक्रय मूल्य हो तो पुस्तिकाओं के तैयार करने में कितना खर्च होगा।

(vi) लेखाचित्र की सहायता से गणना करके देखें कि विक्रय मूल्य पर कितना प्रतिशत लाभ होगा।

4 लेखाचित्र देखे और निम्न प्रश्नों के उत्तर खोजें-



(i) कलमों के क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य के बीच संबंध लिखे।

(ii) कलम का विक्रय मूल्य जब 20 रुपये हो तो क्रय मूल्य कितना होगा लिखें और साथ ही लाभ या हानि होगी-देखें।

(iii) कलम का क्रय मूल्य 90 रु० हो तो विक्रय मूल्य कितने रुपये होगा लिखें।

(iv) जब कलम का क्रय मूल्य 60 रु० हो तब कलम को बेचकर कितनी हानि होगी लिखें।

(v) लेखाचित्र से कलम बेचकर हानि का प्रतिशत-दर लिखें।

5 कमाल ने 200 रुपये में एक घड़ी खरीदी। उस घड़ी को बेचकर वह 30% लाभ लेना चाहता है। तो गणना करके देखें कि कमाल ने उस घड़ी को कितने रुपये में बेचा है।

कमाल 30% लाभ करना चाहता है, अर्थात्

100 रु० क्रय मूल्य हो तो विक्रय मूल्य होगा (100+30) रु० = 130 रु०

$\therefore$ 100 रुपये क्रय मूल्य हो तो वि० मू० 130 रु० है

1 रुपया क्रय मूल्य हो तो विक्रय मूल्य $\frac{130}{100}$ रु० होगा

200 रु० क्रय मूल्य हो तो विक्रय मूल्य $\frac{130}{\not{1}\not{0}\not{0}} \times \overset{2}{\not{2}\not{0}\not{0}}$ रु० होगा = 260 रु० होगा

$\therefore$ 30% लाभ करने के लिए कमाल को वह घड़ी 260 रु० में बेचनी पड़ेगी।

दुसरी पद्धति से :

100 रु० क्रय मूल्य हो तो लाभ 30 रु० है

1 रु० क्रय मूल्य हो तो लाभ = $\frac{30}{100}$ रु० है

200 रु० क्रय मूल्य हो तो लाभ = $\frac{30 \times 200}{100}$ रु० है

= 60 रु० है

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ

= 200रु० + 60रु० = 260रु०

संक्षिप्त पद्धति :

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + क्रय मूल्य का लाभ प्रतिशत

= 200 रु० + $\overset{2}{\not{2}\not{0}\not{0}}$ रु० का $\frac{30}{\not{1}\not{0}\not{0}}$

= 260 रु०

6 झरना मौसी को 22.80 रुपये में 1 दर्जन केले बेचकर 5% हानि हुई। 1 दर्जन केला झरना मौसी ने कितने रूपये में खरीदा था, गणना करके देखें।

1दर्जन केले का मूल्य 100 रु० हो तो विक्रय मूल्य (100–5) रु० = 95 रु० होगा।

[कारण विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि]

केले का ☐ दिया हुआ है ☐ ज्ञात करना है।

केले का विक्रय मूल्य 95 रुपये हो तो क्रय मूल्य 100 रु० होंगे

केले का विक्रय मूल्य 1 रुपये हो तो क्रय मूल्य $\frac{100}{95}$ रु० होगा।

केले का विक्रय मूल्य 22.80 रुपये हो तो क्रय मूल्य $\frac{100 \times 22.80}{95}$ रु० = $\frac{\overset{\overset{24}{\not{1}\not{2}\not{0}}}{\not{2}\not{2}\not{8}\not{0}}}{\underset{\not{5}}{\not{9}\not{5}}}$ रु० = 24 रु०

$\therefore$ झरना मौसी ने 1 दर्जन केले 24 रुपये में खरीदा था।

7 श्रावणी ने एक साड़ी बेचकर देखा कि क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य का अनुपात 25:24 है। उसके लाभ या हानि के प्रतिशत का समानुपात ज्ञात कर लिखें।

माना कि उभयनिष्ठ उत्पादक = x रु० है।

साड़ी का क्रय मूल्य 25x रुपये हो तो विक्रय मूल्य 24x रु० है।

वहाँ, विक्रय मूल्य ☐ क्रय मूल्य (>/< लिखे)

$\therefore$ हानि (☐ – ☐) रु० = x रु०

क्रय मूल्य और हानि ☐ (सीधा / व्यस्त) समानुपाती संबंध है।

$\therefore$ गणित की भाषा में समस्या है :

क्रय मूल्य (रु०)	हानि (रु०)
25x	x
100	?

$\therefore$ सीधा समानुपात है, 25x : 100 :: x : ?(अभीष्ट हानि)

$\therefore$ अभीष्ट हानि = 4%

श्रावणी को विक्रय मूल्य पर कितना प्रतिशत हानि हुई है गणना करें [स्वयं करें]

8 सुरजित बाबू ने 660 रुपये में एक शॉल बेचा। शॉल बेचकर सुरजित बाबू को जितने रुपये का लाभ हुआ 640 रुपये में बेचने पर उतने रुपये की हानि होती। सुरजित बाबू ने कितने रुपये में शॉल खरीदा था गणना करें।

माना कि 660 रुपये में बेचकर सुरजित बाबू को x रु० लाभ हुआ

$\therefore$ उस शॉल का क्रय मूल्य = (660 – x) रु०

फिर 640 रुपये में बेचकर x रु० हानि हो तो

$\therefore$ शॉल का क्रय मूल्य (640 + x) रु०।

शर्त्तानुसार, $660 - x = 640 + x$

या, $-x - x = 640 - 660$

या, $-2x = -20$

$\therefore \quad x = 10$ $\quad \therefore$ सुरजित बाबू ने शॉल को (660–10) रु० = 650 रु० में खरीदा था।

9 रफीकूल चाचा को 178 रुपये में एक छाता बेचने पर 11 % की हानि हुई। छाता को कितने रुपये में बेचने पर रफीकूल चाचा को 11 % का लाभ होता। समानुपात में व्यक्त कर गणना करें और लिखें।

11 % हानि हुई है अर्थात्

छाता का क्रय मूल्य 100 रु० हो तो विक्रय मूल्य (100 – 11) रु० = 89 रु०

$\therefore$ गणित की भाषा में समस्या है

विक्रय मूल्य (रु०)	क्रय मूल्य (रु०)
89	100
178	?

विक्रय मूल्य और क्रय मूल्य ☐ (सीधा/व्यस्त) समानुपाती है।

$\therefore$ सीधा समानुपात है, 89 : 178 :: 100 : ?(अभीष्ट क्रय मूल्य)

$\therefore$ अभिष्ट क्रय मूल्य = $\frac{100 \times \cancel{178}^{2}}{\cancel{89}}$ रु० = 200 रु०।

रफीकूल चाचा 11 % लाभ करना चाहते है।

$\therefore$ गणित की भाषा में समस्या है

क्रय मूल्य (रु०)	विक्रय मूल्य (रु०)
100	100+11=111
200	?

क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य ☐ (सीधा/व्यस्त) समानुपाती हैं।

$\therefore$ सम्बन्ध है,

100 : 200 :: 111 : ?(अभीष्ट विक्रय मूल्य)

$\therefore$ अभीष्ट विक्रय मूल्य = $\frac{\overset{2}{\cancel{200}} \times 111}{\cancel{100}}$ रु० = 222 रु०

$\therefore$ 11 % लाभ करने के लिये रफीकूल चाचा को छाता 222 रुपये में बेचना पड़ेगा।

10 सितारा बेगम को एक झोला बेचकर 10% हानि हुई। यदि उस झोले का क्रय मूल्य 10 रुपये कम होता और विक्रय मूल्य 26 रुपये अधिक होता तो सितारा बेगम को 15% लाभ होता। तो गणना कर देखें कि सितारा बेगम ने कितने रुपये में झोला खरीदा था ?

माना कि सितारा बेचकर x रु० में झोला खरीदा था।

10% हानि पर बेचा, अर्थात्

100 रुपये क्रय मूल्य हो तो विक्रय मूल्य (100-10) रु० = 90 रु०

1 ,, ,, ,, ,, $= \frac{90}{100}$ रु०

x ,, ,, ,, ,, $= \frac{\cancel{90} \times x}{\cancel{100}}$ रु० $= \frac{9x}{10}$ रु०

क्रय मूल्य यदि 10 कम होता, तब क्रय मूल्य = (x - 10) रु०

विक्रय मूल्य यदि 26 रु० अधिक होता, तब विक्रय मूल्य = $(\frac{9x}{10} + 26)$ रु० .... (I)

तब 15% लाभ होता अर्थात् क्रय मूल्य (x -10) रु० पर 15% लाभ होता।

$\therefore$ तब विक्रय मूल्य = $[(x-10) + (x-10) \times \frac{15}{100}]$ रु०

$= [(x-10) + \frac{3}{20}\ (x-10)]$ रु० = ☐ रु० [स्वयं करें] .... (II)

(I) और (II) से पाते हैं, $\frac{9x}{10} + 26 = \frac{23x-230}{20}$

या, $\frac{9x+260}{10} = \frac{23x-230}{20}$

या, $2(9x+260) = 23x - 230$ या, $18x + 520 = 23x - 230$

या, $18x - 23x = -520 - 230$ या, $-5x = -750$

$\therefore x = 150$ $\therefore$ सितारा बेगम ने झोले को 150 रुपये में खरीदा था।

दूसरी पद्धति (विकल्प पद्धति)

माना कि क्रय मूल्य 100x रुपये है

विक्रय मूल्य (100x – 10x) रुपये 90x रूपये।

क्रय मूल्य 10 रु० कम हो तो क्रय मूल्य (100x – 10x) रु० है।

विक्रय मूल्य 26 रु० हो तो विक्रय मूल्य (90x + 26) रुपये।

अब लाभ 15% है अर्थात् वर्त्तमान क्रय मूल्य पर लाभ 15%

क्रय मूल्य 100 रु० हो तो विक्रय मूल्य = (100 + 15) रु०

क्रय मूल्य 1 रु० हो तो विक्रय मूल्य $\frac{115}{100}$ रु०

क्रय मूल्य (100x – 10) रु० हो तो विक्रय मूल्य $(100x - 10x) \times \frac{115}{100}$ रु०

फिर वर्त्तमान विक्रय मूल्य = (90x – 26) रु०

शर्त्तानुसार, $(100x - 10x) \times \frac{\cancel{115}}{\cancel{100}} = 90x + 26$

या, $2300x - 230 = 1800x + 520$

या, $2300x - 1800x = 520 + 230$

या, $500x = 750$

या, $x = \frac{\cancel{750}\ 23}{20\ \cancel{500}}$ 150

या, $100x = \frac{\cancel{750}}{\cancel{500}\ \cancel{5}} \times \cancel{100}$

$\therefore$ $100x = 150$

सितारा बेगम ने झोला 150 रुपये में खरीदा।

11 रनेन बाबू को 12 लार्जेस 5 रुपये में बेचने से 4% हानि हुई। वो कितने लार्जेस 10 रुपयें में बेचें ताकि उन्हे 28% लाभ हो गणना करके लिखें।

विक्रय मूल्य (100 – 4) रु० = 96 रु० हो तो क्रय मूल्य 100 रु०

विक्रय मूल्य 1 रु० हो तो क्रय मूल्य $\frac{100}{96}$ रु०

विक्रय मूल्य 5 रु० हो तो क्रय मूल्य $\frac{\cancel{100}^{25}}{\cancel{96}_{24}} \times 5$ रु० $= \frac{125}{24}$ रु०।

क्रय मूल्य 100 रुपये हो तो विक्रय मूल्य (100 + 28) रु० = 128 रु०

क्रय मूल्य 1 रु० हो तो विक्रय मूल्य $\frac{128}{100}$ रु०

क्रय मूल्य $\frac{125}{24}$ विक्रय मूल्य $\frac{128}{100} \times \frac{125}{24}$ रु० $= \frac{20}{3}$ रु०

$\frac{20}{3}$ रु० में बेचते हैं 12 लार्जेस।

1 रु० में बेचने हैं $\frac{12 \times 3}{20}$ लार्जेस।

10 रु० में बेचने हैं $\frac{\overset{6}{\cancel{12}} \times 3 \times \cancel{10}}{\cancel{20}_{2}}$ लार्जेस = 18 लार्जेस।

अत: रनेन बाबू 10 रु० में 18 लार्जेस बेचे तो 28% लाभ हो।

12 जयन्त बाबू एक टेलिविजन सेट 10% लाभ पर बेचते है। यदि क्रय मूल्य 10% कम और विक्रय मूल्य 180 रू० कम होता। तो जयन्त बाबू को 20% लाभ होता। टेलिविजन सेट का क्रय मूल्य कितना है–लिखें।

माना कि टेलिविजन सेट का क्रय मूल्य 100x रु० है।

$\therefore$ विक्रय मूल्य $100x \times \frac{110}{100}$ रु० = 110x रु०।

क्रय मूल्य 10% कम होता तो क्रय मूल्य 90x रु० है।

विक्रय मूल्य 180 रु० कम होता तब विक्रय मूल्य (110x – 180) रु०

किन्तु वर्तमान क्रय मूल्य पर 20% लाभ है।

$\therefore$ वर्तमान विक्रय मूल्य $\overset{9x}{\cancel{90x}} \times \frac{\cancel{120}^{12}}{\cancel{100}_{10}}$ रु० = 108x रु०।

शर्त्तानुसार, $110x - 180 = 108x$

या, $110x - 108x = 180$

या, $2x = 180$

या, $x = \frac{\cancel{180}^{90}}{\cancel{2}}$

$\therefore$ $x = 90$

अत: $100x = 9000$

$\therefore$ टेलिविजन सेट का क्रय मूल्य 9000 रु० है।

13 सुदीप चाचा 32 रु० प्रति किलो मूल्य वाली प्याज के साथ 25 रु० प्रति किलो वाली प्याज मिलाकर प्रति किलो मिश्रित प्याज 32.40 रुपये में बेचकर 20% लाभ पाते हैं। उन्होंने किस अनुपात में दोनों किस्म के प्याज मिलाया था –गणना करके लिखे।

माना कि सुदीप चाचा ने x कि० ग्रा० पहले किस्म की प्याज के साथ y कि० ग्रा० दूसरी किस्म की प्याज मिलाया था

x कि०ग्रा० पहले किस्म की प्याज का क्रय मूल्य 32x रु० है।

y कि०ग्रा० दूसरे किस्म की प्याज का क्रय मूल्य 25y रु० है।

(x +y) कि०ग्रा० मिश्रित प्याज का क्रय मूल्य (32x + 25y) रु० है।

प्रति किलो प्याज का विक्रय मूल्य 120 रु हो तो क्रय मूल्य 100 रु० है।

प्रति किलो प्याज का विक्रय मूल्य 1 रु० हो तो क्रय मूल्य $\frac{100}{120}$ रु० है।

प्रति किलो प्याज का विक्रय मूल्य 32.40 रु० हो तो क्रय मूल्य $\frac{100 \times 32.40}{120}$ रु० है $= \frac{\cancel{3240}^{\cancel{324}^{27}}}{\cancel{120}_{\cancel{12}}}$ रु० = 27 रु०

$\therefore$ (x + y) कि०ग्रा० मिश्रित प्याज का क्रय मूल्य 27(x + y) रु० है।

शर्त्तानुसार, $32x + 25y = 27(x + y)$

या, $32x + 25y = 27x + 27y$

या, $32x - 27x = 27y - 25y$

या, $5x = 2y$

या, $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$

$\therefore \quad x : y = 2 : 5$

अत: सुदीपचाचा ने पहली किस्म की प्याज के साथ दूसरी किस्म की प्याज को 2 : 5 अनुपात में मिलाया था।

14 रमेनचाचा अपनी दुकान में एक टेबल और एक कुर्सी 3000 रु० में खरीद कर लाए। उन्होने टेबल को 15% लाभ पर और कुर्सी को 10% हानि पर बेचकर पूरे क्रय मूल्य $8\frac{1}{3}$% लाभ पाया। टेबल और कुर्सी के रमेनचाचा ने कितने में खरीदा था लिखें।

माना कि रमेनचाचा ने x रु० में टेबल और y रु० में कुर्सी खरीदा था।

शर्त्तानुसार, $x + y = 3000$ .... (I)

$$\frac{15x}{100} - \frac{10y}{100} = \cancel{3000}^{10} \times \frac{25}{\cancel{300}}$$

या, $\frac{15x}{100} - \frac{10y}{100} = 250$ .... (II)

समीकरण सं० (II) से पाते है $15x - 10y = 2500\text{-}0$

समीकरण सं० (I) में 10 से गुण करके पाते हैं $10x + 10y = 30000$

$15x - 10y = 25000$

जोड़कर पाते हैं $25x = 55000$

या, $x = \frac{55000}{25} = 2200$

फिर समीकरण सं० (I) से पाते हैं, $y = 3000 - 2200 = 800$

अत: रमेनचाचा ने 2200 रु० में टेबल तथा 800 रु० में कुर्सी खरीदा था।

विद्यालय से घर लौटकर मैं अपनी माँ के साथ मीता चाची की किताबों की दुकान पर गया। कहानी की एक किताब मुझे पसन्द आई। किताब पर 50 रु० मूल्य लिखा था। किन्तु मीता चाची ने मुझे 45 रुपये में किताब दे दिया।

मीता चाची ने किताब (50 रु० – 45 रु०) = ☐ रु० कम में बेचा।

मीता चाची को 5 रु० की हानि हुई। किन्तु कुछ लाभ न रखकर मीता चाची दुकान के अन्य खर्च कैसे सम्हाल पाएगी।

मीता चाची ने 42 रुपये में किताब खरीदा था।

∴ किताब का विक्रय मूल्य ☐ क्रय मूल्य (>/< रखें)

∴ उस किताब को बेचकर मीता चाची ने (45 रु० – 42 रु०) = ☐ रु० ☐ (लाभ / हानि) किया।

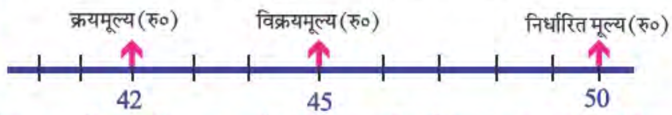
पाते है, किताब का क्रय मूल्य 42 रुपये
किताब का विक्रय मूल्य ☐ रुपये

किताब पर छपा मूल्य निर्धारित मूल्य है।
समझा, किताब का निर्धारित मूल्य 50 रुपये है।
मीता चाची ने 50 रु० की निर्धारित मूल्य वाली किताब को 45 रुपये में बेचा।

इस (50 रु० – 45 रु०) = 5 रु० कम करने को क्या कहा जाएगा ?
इसे छूट या डिसकाउण्ट कहा जाता है।

पाते है, 50 रु० निर्धारित मूल्य की किताब 5 रु० की छूट के बाद 45 रु० में बेची।

सरल रेखा पर पाते है



15 मेरे मित्र अयन ने उसी दुकान से एक किताब खरीदा जिसका निर्धारित मूल्य 140 रुपये था। मीता चाची ने अयन के लिये 10% छूट देकर किताब बेचा। '140 रु० पर 10% छूट' अर्थात् मीता चाची ने कितने रुपये की छूट दी – गणना करें।

10% छूट का अर्थ है 100 रु० निर्धारित मूल्य पर 10 रु० छूट

1 रु० निर्धारित मूल्य पर $\frac{\square}{\square}$ रु० छूट

140 रु० निर्धारित मूल्य पर $\frac{10}{100} \times 140$ रु० छूट = 14 रु० छूट

∴ 140 रु० पर 14 रु० की छूट पाकर (140 रु० – 14 रु०) = ☐ रु० में अयन ने किताब खरीदी

16 मीता चाची ने 120 रु० में किताब खरीदा था। गणना कर देखें कि उस किताब को अयन से बेचकर मीता चाची ने कितना लाभ लिया।

किताब का क्रय मूल्य = 120 रु० और विक्रय मूल्य = 126 रु०

∴ लाभ = 126 रु० – 120 रु० = 6 रु०

∴ लाभ प्रतिशत = $\frac{\cancel{6}}{\underset{20}{\cancel{120}}} \times \overset{5}{\cancel{100}}$ रु० = 5 रु०

∴ उस किताब के निर्धारित मूल्य पर 10% छूट देकर मीता चाची को 5% लाभ मिला।

17 एक पुस्तक प्रकाशक ने उत्पादन व्यय पर 30% बढ़ाकर एक किताब का मूल्य 286 रु० अंकित किया। किन्तु बेचते समय लिखित (अंकित) मूल्य पर 10% की छूट देते है। पुस्तक प्रकाशक के लाभ प्रतिशत की दर गणना करें।

माना कि किताब का उत्पादन व्यय 100 रुपये है।

$\therefore$ किताब पर अंकित मूल्य (100 + 30) रु० = 130 रु० है।

किताब का अंकित मूल्य 130 रु० हो तो उत्पादन व्यय 100 रु०

किताब का अंकित मूल्य 1 रु० हो तो उत्पादन व्यय $\frac{100}{130}$ रु०

किताब का अंकित मूल्य 286 रु० हो तो उत्पादन व्यय $\frac{100 \times 286}{130}$ रु० = 220 रु०

$\therefore$ किताब का उत्पादन व्यय = 220 रु०

किन्तु प्रकाशक बेचते समय अंकित मूल्य पर 10% छूट देते हैं।

$\therefore$ प्रकाशक किताब बेचते हैं $(286 - \frac{286 \times 10}{100})$ रु० में

(286 – 28.60) रु० मे = 257.40 रु० मे

$\therefore$ प्रकाशक का लाभ 257.40 रु० — 220 रु० = 37.40 रु०।

प्रकाशक 220 रु० पर लाभ करते हैं 37.40 रु०

प्रकाशक 1 रु० पर लाभ करते हैं $\frac{37.40}{220}$ रु०

प्रकाशक 100 रु० पर लाभ करते हैं $\frac{37.40 \times 100}{220}$ रु० = $\frac{3740}{220}$ रु० = 17 रु०

$\therefore$ प्रकाशक के लाभ प्रतिशत 17

18 सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति करें :

क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	निर्धारित मूल्य	निर्धारित मूल्य पर छूट	लाभ / हानि प्रतिशत
140 रु०		160 रु०	10%	
260 रु०	285 रु०		5%	
350 रु०		400 रु०	15%	
420 रु०	480 रु०	500 रु०		
600 रु०		700 रु०		5 लाभ

19 मेरे मित्र मसूद की एक जूते और बैग की दुकान है। वे लोग चमड़े के जूते और बैग बनाते है और बेचते हैं। मैं उनकी दुकान से एक जूता खरीदूँगा। जूते का मूल्य 240 रु० है। मसूद के भैया ने 5% छूट देकर जूते का विक्रय मूल्य मुझे बाताया। किन्तु चाचाजी (मसूद के पिता) कुछ देर बाद आकर विक्रय मूल्य पर और 5% की छूट देकर जूता बेचा। जूता खरीद कर मूझे कितनी छूट मिली गणना करके देखें।

मसूद के बड़े भाई के 5% छूट देने पर छूट मिली

= 240 रु० × $\frac{5}{100}$ = ☐ रु०

विक्रय मूल्य = (240 – 12) रु० = 228 रु०

चाचा जी ने विक्रय मूल्य पर 5% छूट दिया।

छूट दिया = 228 × $\frac{5}{100}$ रु० = 11.40 रु०

कुल छूट मिली 12 रु० + 11.40 रु० = 23.40 रु०

पाते है, 240 रु० पर क्रम से दो बार 5% छूट देने पर जूते के मूल्य 23.40 रु० कम हो गया।

19.1 किन्तु जूता खरीदने में मुझे कितनी प्रतिशत छूट मिली देखें।

240 रू० पर छूट मिली 23.40 रु०

1 " " " $\frac{23.40}{240}$ रु०

100 " " " $\frac{23.40 \times 100}{240}$ रु० = $9\frac{3}{4}$ रु०

∴ मैंने $9\frac{3}{4}$% छूट पर जूता खरीदा।

पाते हैं, 240 रु० पर क्रम से दो बार 5% की छूट देकर जितने रूपये छूट मिलती है, 240 रु० पर सीधे $9\frac{3}{4}$ % की छूट देने पर वही छूट मिलती है।

19.2 240 रु० पर क्रम से दो बार 5% की छूट और '$9\frac{3}{4}$% की छूट देने पर वही छूट मिलती हैं

इन्हें समतुल्य छूट कहा जाता है।

अर्थात 240 रु० पर लगातार दो बार 5% छूट के समतुल्य है $9\frac{3}{4}$% छूट।

किसी निश्चित मूलधन पर समतुल्य छूट उस मूलधन पर लगातार एकाधिक बार छूट के समान है।

20 हम 20%, 10% और 5% लगातार छूटों के समतुल्य छूट की गणना करते है।

100 पर 20% की छूट के बाद शेष बचा 100 – 20 = 80

अब 80 पर 10% $= 80 \times \frac{10}{100} = 8$

∴ शेष बचा = 80 – 8 = 72

72पर 5% $= 72 \times \frac{5}{100} = \frac{18}{5} = 3.6$

∴ कुल छूट = 20 + 8 + 3.6 = 31.6

∴ 20%, 10% और 5% की लगातार छूट की समतुल्य छूट 31.6 %

21 सायन्तन एक हारमोनियम बेचेगा जिसका निर्धारित मूल्य 4000 रु० है। यदि वह निर्धारित मूल्य पर लगातार क्रमशः 20%, 10% और 10% छूट दे तो हारमोनियम का विक्रय मूल्य क्या होगा? और समतुल्य छूट गणना करके लिखें। [स्वयं करें]

हल करें— 10.1

1. निम्न सारणी को पूरा करें—

क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	लाभ/हानि	लाभ/हानि प्रतिशत
500 रु०			25 लाभ
300 रु०			7 हानि
1250 रु०			8 हानि
	23000 रु०		15 लाभ

2. लेखचित्र से निम्न प्रश्नों के उत्तर दें —

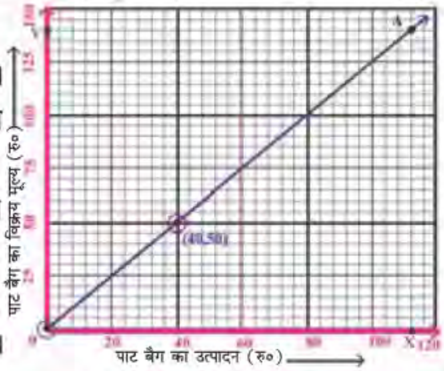
(a) लेखाचित्र देखकर क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य में संबंध लिखें।

(b) पाट से बने जिस बैग का उत्पादन खर्च 60 रुपये है उसका विक्रय मूल्य क्या होगा ?

(c) पाट के जिस बैग का विक्रय मूल्य 125 रु० हो उसका उत्पादन खर्च क्या होगा ?

(d) लेखाचित्र से लाभ या हानि का प्रतिशत गणना कर लिखें।

(e) लेखाचित्र से विक्रय मूल्य पर लाभ या हानि का प्रतिशत लिखें।



3. सुबीर चाचा ने 176 रु० की एक घड़ी बेची है। यदि घड़ी बेचकर सुबीर चाचा को 12% हानि हुई हो तो उन्होंने घड़ी कितने में खरीदी थी।

4. अनोवरी बेगम ने 10 नीबू 30 रुपये में खरीद कर प्रति दर्जन 42 रु० में बेचती है। गणना करके देखें कि अनोवरी बेगम को कितना प्रतिशत लाभ या हानि होती है ?

[संकेत : 1नीबू का क्रय मूल्य = ☐ रु०; 1नीबू का विक्रय मूल्य = $\frac{42}{12}$ रु० = ☐ रु० ☐ पै]

5. अमल बाबू ने एक चित्र 20% हानि पर बेचा किन्तु और 200 रु० ज्यादा पर बेचते तो 5% लाभ होता। उन्होनें चित्र कितने रु० में खरीदा था ?

6. सुप्रिया ने एक घड़ी खरीदी है। यदि घड़ी को 370 रु० में बेचे तो उसे जितना लाभ होगा 210 रु० में बेचने पर उतनी ही हानि होगी। तो घड़ी के क्रय मूल्य की गणना करें।

7. मेरी बहन नें अरुण मामा की दुकान से 255 रु० में एक छाता खरीदा। अरुण मामा यदि छाता के निर्धारित मूल्य पर 15% की छूट दें तो उस छाता का निर्धारित मूल्य गणना कर लिखें।

8. मेरी मित्र कहानी की एक किताब 25% छूट पर खरीदता है। वह यदि किताब को निर्धारित मूल्य पर ही बेचें तो उसे कितना प्रतिशत लाभ या हानि होगी – गणना करके लिखें।

9. नियामत चाचा ने 5 रु० की दर से 150 अण्डे खरीदे। किन्तु दुकान में लाकर देखा कि 8अण्डे फूट गये है और 7अण्डे सड़ गये है। 6 रु० की दर से अण्डे को बेचकर नियामत चाचा को कितना प्रतिशत लाभ या हानि होगी।

10. आसिफ चाचा ने 5% लाभ पर एक खिलौना बेचा। यदि खिलौने का क्रय मूल्य 20% कम और विक्रय मूल्य 34 रु० कम होता तब आसिफ चाचा को 10% लाभ होता। खिलौने का क्रय मूल्य बताए।

11. एक रुपये में 12सामान बेचकर 4% हानि होती है। रु० मे कितना सामान बेचने पर 44% लाभ होगा ?

12. रमा बुआ ने दो साड़ियाँ तैयार करके एक की 15% और दूसरी को 20% लाभ पर बेचा उनका कुल लाभ 262.50 रु० है। साड़ियों उत्पादन व्यय का अनुपात 1:3 हो तो प्रत्येक साड़ी का उत्पादन व्यय ज्ञात करें।

13. एक व्यक्ति ने 2 रु० में 15 की दर कुछ लाजेंस खरीदें। उन्होने आधे 5रु० की दर से और शेष आधे को 10 रु० की दर से बेचा। तो लाभ या हानि का प्रतिशत ज्ञात करें।

14. अफसर चाचा ने लकड़ी की दो कुर्सियाँ बनायी और प्रत्येक का मूल्य 1250 रु० निर्धारित किया। एक कुर्सी वे 8% छूट पर बेचकर 15% लाभ पाया। यदि दूसरी कुर्सी को 1120 रु० में बेचें तो उन्हें कुल कितना प्रतिशत लाभ या हानि होगी।

15. एक विशेष प्रकार की कलम का निर्धारित मूल्य 36.50 रु० है। रफीक चाचा शुभम को एक कलम 2.90 रु० की छूट देकर बेचते हैं और 12% लाभ पाते हैं। यदि उसी प्रकार की एक और कलम वे मीता को 34.50 रु० में बेचते तो उन्हे कितना प्रतिशत लाभ या हानि हुई ?

16. एक पुस्तक प्रकाशक किसी पुस्तक की 2000 प्रतियां छापने के लिये 3,875 रु० कागज पर, 3,315 रु० छपाई पर और 810 रु० बँघाई पर खर्च करते है। पुस्तक विक्रेताओं को 20% की छूट देकर वे 20% लाभ करते है तो प्रत्येक पुस्तक का निर्धारित मूल्य ज्ञात करें।

17. हासिमा बीबी ने दो हस्त कलाओं में से प्रत्येक को 1248 रु० में बेचा। पहले पर 4% का लाभ और दूसरे पर 4% की हानि हुई। तो उन्हें कुल कितना लाभ या हानि हुई ?

18. करीम को मोहन के हाथ 4860 रु० में फोन बेचकर 19% हानि हुई। मोहन ने रहीम को जिस मूल्य पर फोन बेचा यदि उसी मूल्य पर करीम ने मोहन को बेचा होता तो उसे 17% लाभ होता। मोहन को कितने प्रतिशत लाभ हुआ ?

19. फिरोज चाचा ने एक पैन्ट 20% लाभ पर और एक शर्ट 15% लाभ पर बेचकर कुल 719.50 रु० पाया। वे यदि पैन्ट 25% और शर्ट 20% लाभ पर बेचते तो वे और 30.50 रु० अधिक पाते। पैन्ट और शर्ट के क्रय मूल्य ज्ञात करें।

20. रबीन चाचा ने 36000 रुपये में चावल खरीदा। उन्होनें $\frac{1}{3}$ भाग 20% हानि पर और $\frac{2}{5}$ भाग 25% लाभ पर बेचा। कितने प्रतिशत लाभ पर शेष भाग चावल बेचे ताकि पूरे पर 10% लाभ हो ?

21. एक व्यापारी एक प्रकार की चाय 80 रु० प्रति किलो की दर से बेचकर 20% हानि और दूसरे प्रकार की चाय 200 रु० प्रति किलो की दर से बेचकर 25% लाभ करते है। तो वे दोनो प्रकार की चाय को किस अनुपात में मिलाए कि प्रति किलो 150 रु० की दर से बेचकर 25% लाभ हो ?

शकील चाचा साड़ी बना रहे हैं।

शकील चाचा रतन को साड़ी बेचते हुए।

रतन अमीमा बीबी को साड़ी बेचते हुए।

अमीना बीबी फातिमा को साड़ी बेचते हुए।

22 शांतिपुर में शकील चाचा के हथकरघे हैं। वे प्रत्येक साड़ी 25% लाभ पर थोक विक्रेता रतन चाचा को देते है। रतन चाचा 20% लाभ रखकर खुदरा व्यापारी अमीना बीबी को बेचते हैं। अमीना बीबी 25% लाभ लेकर फातिमा को साड़ी बेचती है। अब अमीना बीबी से जो साड़ी फातिमा ने 300 रुपये में खरीदा है यदि वही साड़ी शकील चाचा से खरीद पाती तो कितने रुपये बचते और शकील चाचा के लिये साड़ी का उत्पादन व्यय ज्ञात करें।

पहले एक सरल रेखीय चित्र बनाकर समझने का प्रयास करते है —

शकील चाचा साड़ी तैयार करके 25% लाभ पर बेचते है → रतन चाचा साड़ी खरीद कर 20% लाभ पर बेचते है → अमीना बीबी वही साड़ी खरीद कर 25% लाभ पर बेचती है

क्रय मूल्य [ ] विक्रय मूल्य [ ] = क्रय मूल्य [ ] विक्रय मूल्य [ ] = क्रय मूल्य [ ] विक्रय मूल्य [ ]

हम पहले ज्ञात करते हैं कि अमीना बीबी ने कितने रुपये में नयी साड़ी रतन चाचा से खरीदा था।

अमीना बीबी साड़ी खरीदकर 25% लाभ करती हैं।

साड़ी का विक्रय मूल्य 125 रु० हो तो क्रय मूल्य 100 रु था

साड़ी का विक्रय मूल्य 1 रु० हो तो क्रय मूल्य $\frac{100}{125}$ रु० था

साड़ी का विक्रयमूल्य 300 रु० हो तो क्रय मूल्य $\frac{\overset{4}{\cancel{100}} \times \overset{60}{\cancel{300}}}{\underset{5}{\cancel{125}}}$ था = 240 रु० था

अमीना बीबी द्वारा उसी साड़ी को 25% लाभ पर बेचने से → क्रय मूल्य [240 रु०], विक्रय मूल्य [300 रु०]

अमीना बीबी ने 240 रु० में साड़ी रतन चाचा से खरीदा था।

∴ अमीना बीबी के लिए उस साड़ी का क्रय मूल्य = रतन चाचा के लिये उस साड़ी का विक्रय मूल्य।

22.1 किन्तु रतन चाचा ने 20% लाभ पर 240 रु० में अमीना बीबी को साड़ी बेची थी। ज्ञात करें कि रतन चाचा ने साड़ी को कितने रुपये में शकील चाचा से खरीदा था।

रतन काका ने साड़ी 20% लाभ पर बेचा।

अर्थात् साड़ी का विक्रय मूल्य 120 रु हो तो क्रय मूल्य 100 रु०

साड़ी का विक्रय मूल्य 240 रु० हो तो क्रय मूल्य = ☐ रु० [स्वयं करें]

रतन काका ने साड़ी 20% लाभ पर बेचने से → क्रय मूल्य: 200 रु० ; विक्रय मूल्य: 240 रु०

फिर पाते है, रतन चाचा ने वही साड़ी 200 रु० में शकील चाचा से खरीदा था। अर्थात् शकील चाचा ने साड़ी 200 रु० में बेचा था।

शकील चाचा द्वारा 200 रु० में साड़ी रतन चाचा को बेचने से → क्रय मूल्य: ☐ [स्वयं कर] ; विक्रय मूल्य: 200 रु०

पाते है, शकील चाचा को उस साड़ी के तैयार करने में 160 रु० खर्च हुए।

शकील चाचा से साड़ी खरीदने पर (300 रु० – 200 रु०) = 100 रु० बचत होता।

पाते है,

शकील चाचा का 25% लाभ पर बेचने से		रतन चाचा का 20% लाभ पर बेचने से		आमीना बीबी का 25% लाभ पर बेचने से	
क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य
160 रु०	200 रु०	200 रु०	240 रु०	240 रु०	300 रु०

अब रतन चाचा से खरीदने पर कितनी बचत होती – देखें

रतन चाचा से खरीदने पर बचत होती = ☐ रु० – ☐ रु० = ☐ रु०।

23 1 दर्जन टेबल लैम्प का उत्पादन खर्च और विभिन्न पर्याय में क्रय मूल्य है —

उत्पादन खर्च (रु०)	थोक विक्रेता का क्रय मूल्य (रु०)	खुदरा विक्रेता का क्रय मूल्य(रु०)	क्रेता का क्रय मूल्य (रु०)
2700	3000	3300	3795

गणना करके देखे कि खुदरा विक्रेता टेबल लैम्प बेचकर कितना प्रतिशत लाभ पाते हैं।

खुदरा व्यवसायी के लिए 1 दर्जन टेबल लैम्प का क्रय मूल्य 3300 रु० और विक्रय मूल्य 3795 रु० हैं।

वे लाभ करते है 3795 रु० – 3300 रु० = 495 रु०

∴ खुदरा व्यवसायी का लाभ प्रतिशत $\frac{\cancel{495}^{\cancel{45}\,15}}{\cancel{3300}_{\cancel{33}\,\cancel{3}}} \times \cancel{100} = 15$ खुदरा व्यवसायी 15% लाभ करते हैं।

23.1 ज्ञात करे की थोक विक्रेता कितना प्रतिशत लाभ करते है।

थोक विक्रेता के लिये टेबल लैम्प का क्रय मूल्य 3000 रु०

और बेचते है ☐ रु० मे

∴ वे लाभ करते है (3300 रु० – 3000 रु०) = ☐ रु०

∴ थोक विक्रेता का लाभ प्रतिशत ☐ [स्वयं करें]

इसी प्रकार हम ज्ञात कर देखते है कि टेबल लैम्प बेचकर उत्पादक को लाभ ☐ रु० होता है।[स्वयं करें]

23.2 कोई क्रेता यदि उत्पादक से सीधे खरीदता तो उसकी बचत कितनी होती ज्ञात करें।

उत्पादक से सीधे खरीदने पर क्रेता को (3795 – 3000) रु० = 795 रु० की बचत होती हैं।

24 जोसेफ को एक टार्च बनाने में 560 रुपये खर्च हुये। जोसेफ ने उस टार्च को दुकानदार राणा को 22% लाभ पर बेचा। राणा यदि उसी टार्च को 854 रु० में बेचे तो राणा को कितना प्रतिशत लाभ होगा।

पहले जोसेफ राणा को 22% लाभ पर बेचता है तो विक्रय मूल्य कितना होगा ज्ञात करते हैं।

100 रु० क्रयमूल्य हो तो विक्रय मूल्य (100 + 22) रु० =122 रु०

1 रु० क्रयमूल्य हो तो विक्रय मूल्य $= \frac{122}{100}$ रु०

560 रु० क्रयमूल्य हो तो विक्रय मूल्य $= \frac{122 \times \cancel{560}^{56}}{\cancel{100}_{10}}$ रु०

$= \frac{6832}{10}$ रु० = 683.20 रु०

राणा 683.20 रु० मे वह टार्च खरीदता है। किन्तु राणा 854 रु० में वही टार्च बेचता है।

∴ राणा का लाभ = 854 रु० – 683.20 रु०= 170.80 रु०

∴ उस टार्च को बेचकर राणा का लाभ प्रतिशत = $\frac{170.80 \times 100}{683.20}$ = ☐

हल करें — 10.2

1. आँतपुर के सुबल बाबू धान उत्पन्न करके एक थोक विक्रेता साहाना बीबी को 20% लाभ पर चावल बेचते हैं। साहाना बीबी दुकानदार उत्पल बाबू को 10% लाभ पर वही चावल बेचती हैं। किन्तु उत्पल बाबू यदि 12 % लाभ लेकर चावल बेचे तब एक सरल रेखा में चित्र बनाकर निम्न प्रश्नो के उत्तर दें।
   (i) सुबल बाबू को चावल उत्पन्न करने में 7500 रु० खर्च हो उसी चावल को साहाना बीबी ने कितने रुपये में खरीदा है ?
   (ii) सुबल बाबू को जिस चावल को उत्पन्न करने में 2500 रु० खर्च हो। उसे उत्पल बाबू कितने रुपये में बेचेंगे।
   (iii) उत्पल बाबू हमलोगो को जिस मूल्य पर चावल बेचते है सुबल बाबू यदि सीधे उसी दाम पर चावल बेचते तब सुबल बाबू को कितना लाभ होता ?

2. किसी एक बाजार में पाट के बैग बेचते समय उत्पादनकर्त्ता, थोक विक्रेता और खुदरा व्यवसायी क्रमशः 15%, 20% और 25% लाभ करते है। यदि कोई एक बैग उत्पादनकर्त्ता, थोक विक्रेता और खुदरा व्यवसायी से होते हुये क्रेता के पास पहुँचे तो निम्न प्रश्नों के उत्तर दें —
   (i) जिस बैग को क्रेता 138 रु० में खरीदे उसका उत्पादन खर्च ज्ञात करें।
   (ii) जिस बैग पर खर्च 140 रु० है उस बैग को क्रेता कितने में खरीदेगा ?
   (iii) खुदरा व्यवसायी जिस बैग को 98 रु० में खरीदता है उसे खरीदने में क्रेता को कितना देना होगा।
   (iv) थोक विक्रेता ने जिस बैग को 175 रु० में खरीदा है उस बैग को खरीदने में क्रेता को कितने रु० देने होंगे

(v) क्रेता जिस बैग को 276 रु० में खरीदता है उसी बैग को सीधे थोक विक्रेता से खरीदने पर उसे कितनी बचत होती है?

3. एक साइकिल का उत्पादन खर्च और विभिन्न पर्याय के क्रय मूल्य है —

उत्पादन खर्च (रु०)	थोक विक्रेता का क्रय मूल्य (रु०)	खुदरा व्यवसायी का क्रय मूल्य (रु०)	क्रेता का क्रय मूल्य (रु०)
1050	1260	1449	1666.35

(i) ज्ञात करें कि साइकिल बेचकर खुदरा व्यवसायी को कितना प्रतिशत लाभ हुआ?
(ii) ज्ञात करें कि साइकिल बेचकर थोक विक्रेता को कितना प्रतिशत लाभ हुआ।
(iii) ज्ञात करे कि साइकिल बेचकर उत्पादनकर्त्ता को कितना प्रतिशत लाभ हुआ।
(iv) एक साइकिल खरीदने में क्रेता को साइकिल के उत्पादन खर्च पर कितना प्रतिशत ज्यादा देना पड़ा?
(v) यदि कोई क्रेता उत्पादनकर्त्ता से सीधे साइकिल खरीदे जहां उत्पादनकर्त्ता का लाभ 30% हो तो क्रेता की बचत कितनी है।

4. **बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.):**

(i) क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य का अनुपात 10:11 हो तो लाभ प्रतिशत है
(a) 9 (b) 11 (c) $10\frac{1}{9}$ (d) 10

(ii) एक किताब को 40 रु० में खरीदकर 60 रु० में बेच दिया गया तो लाभ प्रतिशत है
(a) 50 (b) $33\frac{1}{3}$ (c) 20 (d) 30

(iii) एक कमीज को 360 रु० में बेचने पर 10% हानि होती है। कमीज का क्रय मूल्य है
(a) 380 रु० (b) 400 रु० (c) 420 रु० (d) 450 रु०

(iv) 20% छुट देकर बेचने से एक ज्यामिति के बक्से का विक्रय मूल्य 48 रु० है तो इनका निर्धारित मूल्य है
(a) 60 रु० (b) 75 रु० (c) 80 रु० (d) 50 रु०

(v) एक खुदरा विक्रेता निर्धारित मूल्य पर 20% छूट पर दवा खरीदकर निर्धारित मूल्य पर इसे बेचता है तो उसका लाभ प्रतिशत
(a) 20 (b) 25 (c) 10 (d) 30

5. **संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :**

(i) क्रय मूल्य पर 20% लाभ होने पर विक्रय मूल्य पर कितना प्रतिशत लाभ होगा?
(ii) विक्रय मूल्य पर 20% लाभ होतो क्रय मूल्य पर कितना प्रतिशत लाभ होगा?
(iii) 110 आम बेचकर 120 आमो का क्रय मूल्य मिले तो लाभ प्रतिशत कितना है?
(iv) समय पर बिजली का बिल चुकाने पर 15% छूट पायी जाती है। सुमन बाबू ने समय पर बिल चुका कर 54 रु० छूट पाए तो उनकी बिजली का बिल कितना था?
(v) विक्रय मूल्य पर 20% हानि पर एक वस्तु 480 रु० में बेची गई तो उसका क्रय मूल्य बताए।
(vi) एक वस्तु को लगातार 20% और 10% छूट देकर बेचा गया तो समतुल्य छूट कितनी है?

11 सांख्यिकी STATISTICS

हर वर्ष की भाँति इस वर्ष भी हम ग्रामवासियों की अर्थिक स्थिति जानने के लिए अपने मुहल्ले (टोले) की ग्राम उन्नयन समिति के कुछ सदस्य ग्रामवासियों के बारे में कुछ तथ्य एकत्रित करेंगे। इस समय विद्यालय का ग्रीष्मावकाश हैं। अत: मैंने और मेरे कुछ मित्रों ने सोचा है कि इस काम में समिति के भाईयों और बहनों की हम मदद करेंगे।

इसलिए हमलोगों ने गाँव के 50 परिवारों के भोजन पर दैनिक खर्चों की **कच्चे तथ्य (Raw data)** इकट्ठे किये हैं।

गाँव के 50 परिवारों की भोजन के लिये दैनिक खर्च (रु० में)

145,	150,	200,	175,	75,	90,	250,	125,	190,	175,
110,	175,	90,	150,	145,	125,	190,	200	225,	110,
75,	225,	200,	125,	190,	110,	145,	175,	125,	150,
190,	110,	150,	175,	145,	125,	75,	275,	150,	225,
125,	150,	225,	110,	90,	145,	190,	125,	110,	75

1 अब हम टैलीमार्क लगाकर इस कच्चे तथ्य की आवृति-विभाजन तालिका तैयार करें।

सारणी - 1

दैनिक खर्च (x) रुपये	टैलीमार्क	आवृत्ति (f)
75	IIII	4
90	III	3
110	~~IIII~~ I	6
125	~~IIII~~ II	7
145	~~IIII~~	5
150	~~IIII~~ I	6
175	~~IIII~~	5
190	~~IIII~~	5
200	III	3
225	IIII	4
250	I	1
275	I	1
कुल		50

संख्यात्मक लक्षण को चल (Variable) कहते हैं। जैसे परिवार का दैनिक खर्च एक चलराशि है। चूँकि परिवार का दैनिक खर्च परिवर्तनशील है और इसके परिभाषा की परिमाप होती है, इसलिए दैनिक खर्च एक चलराशि है।

चल विच्छिन्न (Discrete) और अविच्छिन्न (Continuous) दोनों प्रकार के हो सकते हैं। जैसे देश की नदियों की संख्या, परिवार के सदस्यों की संख्या इत्यादि विच्छिन्न चल है और छात्रों का भार ऊँचाई आदि अविच्छिन्न चल हैं।

जिस चल का दो संख्याओं के बीच कोई भी मान हो सकता है उसे अविच्छिन्न चल कहते है एवं यदि चल उन दो संख्याओं के बीच के सभी मान ग्रहण कर पाए उसे विच्छिन्न चल कहते हैं।

जैसे छात्राओं की दैनिक उपस्थिति कभी भी $33\frac{1}{2}$ या 47.3 नहीं हो सकती है। यहाँ चल का मान सिर्फ अखण्ड संख्या है, अत: छात्राओं की दैनिक उपस्थिति विच्छिन्न चल है।

किसी छात्र या छात्रा का भार 10 कि०ग्राम से लेकर 150 कि०ग्राम के बीच का कोई भी मान हो सकता है। किसी छात्र का भार 58.73 कि०ग्राम और किसी छात्रा का भार 56.4 कि०ग्राम हो सकता है। अत: छात्र या छात्रा का भार अविच्छिन्न चल है।

ऐसा परिवर्तनशील गुण को जिसकी परिमाप न की जा सके क्या कहा जाता है ?

सांख्यिकी (Statistics) में इस परिवर्तनशील लक्षण को गुण-लक्षण या गुण (Attribute) कहा जाता है। जैसे किसी घर में जितने भी इलेक्ट्रिक स्वीच होते हैं उनकी दो अवस्था होती हैं — विद्युत प्रवाह खोलना (on) और विद्युत प्रवाह बन्द करना (off)। किसी घर के सदस्यों को महिला और पुरुष जैसे दो भागों में बाँटना।

2 पहले की गयी आवृत्ति विभाजन तालिका से चल के वृहत्तम मान 275 और न्यूनतम मान 75 पाया गया हैं। हम चल के वृहत्तम और न्यूनतम मानों के अन्तर को क्या कहा जाता है लिखें।

किसी प्रदत्त राशि-तथ्य के चल के वृहत्तम और न्यूनतम मान के अन्तर को विस्तार (Range) कहा जाता है।

यहाँ, विस्तार = 275 – 75 =200

हम प्राप्त तथ्यों को कई श्रेणियों में विभक्त करते हैं।

यदि प्राप्त तथ्यों को 6 श्रेणियों में विभक्त करें तो प्रत्येक श्रेणी की लम्बाई $\frac{200}{6} \approx 35$

तथ्यों को श्रेणीबद्ध करके पाते हैं —

सारणी - 2

दैनिक खर्च (x)	टैलीमार्क	आवृत्ति (f)
70 – 105	卌 II	7
105 – 140	卌 卌 III	13
140 – 175	卌 卌 I	11
175 – 210	卌 卌 III	13
210 – 245	IIII	4
245 – 280	II	2

∴ पाते हैं, विस्तृत प्रसार वाले चलों के मानों को कई श्रेणियों में विभक्त किया जाता है। ऐसी प्रत्येक श्रेणी को श्रेणी अन्तर (Class interval) कहा जाता है।

यहाँ विस्तार = (280 – 70) = 210

फिर किसी श्रेणी के अन्तर्गत जितने मान मिलते हैं उसे श्रेणी की आवृत्ति (Class frequency) कहते हैं।

किन्तु श्रेणी अन्तरों की संख्या कितनी ली जाएगी ?

श्रेणी अन्तर की संख्या 5 से कम और 30 से अधिक लेना उचित नहीं है। क्योंकि श्रेणी-अन्तर की संख्या बहुत कम होने पर भ्रम शून्यता मध्य मान नष्ट होने की संभावना होती है। फिर श्रेणी-अन्तर बहुत अधिक होने पर गणना करना श्रम साध्य हो जाता है।

फिर श्रेणी के चल के अन्तर के किनारों के मान को क्या कहतें हैं ?

किसी श्रेणी के चल के किनारों के दोनों मानों को श्रेणी सीमा (class-limit) कहा जाता है। किसी निर्दिष्ट श्रेणी के श्रेणी-सीमा के न्यूनतम मान को निम्न सीमा (Lower class-limit) और अधिकतम मान को उर्ध्व सीमा (Upper class-limit) कहा जाता है।

सारणी संख्या 2 को द्वितीय श्रेणी (अर्थात् 105 – 140) की निम्न सीमा 105 और उर्ध्वसीमा 140 है।

श्रेणी सीमा निर्धारित करते समय कच्चे आँकड़ों से चल के न्यूनतम मान से ही शुरु करता है अथवा वृहत्तम मान से शेष करता है ऐसा कोई निश्चित नियम नहीं है। सभी श्रेणी विस्तारों का मान समान-समान रखने के लिए चल के न्यूनतम मान से कम किसी उपयोगी संख्या को प्रथम श्रेणी की निम्न सीमा लिखा जा सकता है।

सारणी संख्या 2 में देखा गया है, (140 – 175) और (175 – 210) दो श्रेणियों में 175 संख्या को (175 – 210) श्रेणी के मध्य में लिया गया है किन्तु (140 – 175) श्रेणी में नहीं लिया गया क्यों ?

श्रेणी-सीमा दो तरह से ली जाती है।

(i) श्रेणी बाह्य पद्धति (Exclusive method)

(ii) श्रेणी अन्तर्गत पद्धति (Inclusive method)

(i) श्रेणी बाह्य पद्धति में प्रत्येक श्रेणी की वृहत्तम सीमा (उर्ध्व सीमा) अगले श्रेणी की न्यूनतम सीमा होती है और वृहत्तम सीमा के मान की गणना उस श्रेणी में शामिल नहीं होती। ठीक अगली श्रेणी में इसकी गणना शामिल रहती है। जैसे सारणी 2 में 70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, 175 – 210 इत्यादि।

(ii) श्रेणी अन्तर्गत पद्धति में प्रति श्रेणी की न्यूनतम सीमा और वृहत्तम सीमा वाले अंक श्रेणी के अंतर्गत गणनीय होते हैं। जैसे 60 – 69, 70 – 79, 80 – 89 इत्यादि।

श्रेणी अन्तर्गत पद्धति दो लगातार श्रेणियों के श्रेणी सीमा की बीच के अन्तर को कैसे पूरा किया जाता है, अर्थात्, 60 – 69 और 70 – 79 दो श्रणियों के 69 और 70 के बीच के अन्तर को कैसे पूरा किया जाता है।

किसी तथ्यात्मक राशियों के क्रमिक (लगातार) श्रेणियों की श्रेणी सीमा के बीच के अन्तर को पूरा करने के लिए दोनों सीमाओं को जिन दो सीमाओं तक श्रेणी को बढ़ाया या प्रसारित किया जाता है उन सीमाओं को श्रेणी की हद (Class-boundaries) या श्रेणी सीमान्त कहा जाता है। न्यूनतम मान को निम्न श्रेणी सीमान्त (Lower class boundary) और वृहत्तम मान को उच्च श्रेणी सीमान्त (Upper class boundary) कहा जाता है।

श्रेणी-सीमा से श्रेणी-सीमान्त कैसे पाया जाता है।

माना कि किसी श्रेणी की वृहत्तर सीमा और उसके तुरंत बाद की श्रेणी को न्यूनतम सीमा का अन्तर = d है

$\therefore$ इस दशा में श्रेणी की निम्न सीमा-सीमान्त = श्रेणी की न्यूनतम सीमा $-\frac{d}{2}$

और श्रेणी की उच्च श्रेणी सीमान्त = श्रेणी की वृहत्तम सीमा $+\frac{d}{2}$

समझा है, 60 - 69, 70 - 79, 80 - 89, ... श्रेणियों के श्रेणी सीमान्त के रूप में प्रकट करके पाते हैं।

59.5 – 69.5, □ – □, □ – 89.5, ... [स्वयं लिखें]

$[\because \frac{70-69}{2} = 0.5]$

फिर, 70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, ... श्रेणियों को श्रेणी-सीमान्त के रूप में प्रकट करें तो पाते है,

70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, ...

अर्थात्, पहले के समान ही मिलती है, क्योंकि $d = \frac{105 - 105}{2} = 0$

अर्थात् इस दशा में श्रेणी-सीमा और श्रेणी सीमान्त एक समान होते हैं।

किसी दो श्रेणी सीमान्त के बीच पाए गये अंक या संख्या को क्या कहते हैं ?

चल के जो मान दो श्रेणी सीमान्तों के बीच होते हैं उन्हें श्रेणी का मध्यमान या श्रेणी की मध्यमा (Mid - value or Class-mark) कहा जाता है।

∴ किसी श्रेणी की मध्यमा = $\frac{\text{वृहत्तम श्रेणी सीमा - न्यूनतम श्रेणी सीमा}}{2}$

$= \frac{\text{उच्च श्रेणी सीमाना + न्यूनतम श्रेणी सीमाना}}{2}$

फिर किसी श्रेणी के दो श्रेणी सीमान्तों के बीच के अन्तर को श्रेणी की लम्बाई कहते हैं।

∴ श्रेणी की लम्बाई = उच्च श्रेणी सीमान्त - निम्न श्रेणी सीमान्त।

पाते हैं, 60 - 69 श्रेणी के बीच श्रेणी की मध्यमा = $\frac{60 + 69}{2}$ (या, $\frac{59.5 + 69.5}{2}$) = 64.5

और 60 - 69 श्रेणी की लम्बाई = 69.5 - 59.5 = 10

2 न० सारणी से पाते हैं, 70 - 105, 105 - 140, 140 - 175, 175 - 210, 210 - 245 और 245 - 280 के श्रेणी की आवृत्तियों क्रमशः ☐, ☐, ☐, ☐, ☐ और ☐ है।

सारणी सं० 2 को कुल आवृत्ति = 7 + 13 + ☐ + ☐ + 4 + ☐ = 50

3 हम सारणी संख्या 2 की आवृत्ति और श्रेणी की लम्बाई का अनुपात लेते हैं- देखें क्या पाते हैं।

70 - 105 श्रेणी की आवृत्ति = ☐

70 - 105 श्रेणी की लम्बाई = 105 - 70 = 35

∴ (70 - 105) श्रेणी की $\frac{\text{श्रेणी की आवृत्ति}}{\text{श्रेणी की लम्बाई}} = \frac{7}{35} = 0.2$

श्रेणियों में (...) हुए तथ्यों की किसी श्रेणी की आवृत्ति और श्रेणी की लम्बाई के अनुपात को उस श्रेणी का आवृत्ति घनत्त्व (Frequency density) कहा जाता है।

∴ अतः आवृत्ति घनत्त्व = $\frac{\text{श्रेणी की आवृत्ति}}{\text{श्रेणी की लम्बाई}}$

पाते हैं, सारणी संख्या 2 की श्रेणी-सजावट में, (70 - 105) श्रेणी का आवृत्ति घनत्व = 0.2 है।

इसी प्रकार 105 - 140 श्रेणी का आवृत्ति घनत्व = ☐ (स्वयं लिखें)

किन्तु किसी श्रेणी की आवृत्ति और आवृत्ति के कुल योग के अनुपात को क्या कहा जाता है ?

सजायें हुये तथ्यों की किसी श्रेणी की आवृत्ति और आवृत्तियों के कुल योग के अनुपात को उस श्रेणी की आपेक्षिक आवृत्ति (Relative frequency) कहा जाता है।

$\therefore$ आपेक्षिक आवृत्ति = $\dfrac{\text{श्रेणी की आवृत्ति}}{\text{कुल आवृत्ति (आवृत्तियों का योग)}}$

पाते हैं, 70 – 105 श्रेणी की आपेक्षिक आवृत्ति = $\dfrac{7}{50}$ = 0.14

105 – 140 श्रेणी की आपेक्षिक आवृत्ति = □ [स्वयं लिखें]

यदि आपेक्षिक आवृत्ति को प्रतिशत के रूप में प्रकट किया जाए तो उसे क्या कहा जाएगा ?

आपेक्षिक आवृत्ति को प्रतिशत के रूप में प्रकट किया जाए तो उसे आवृत्ति-प्रतिशत दर (Percentage frequency) कहा जाता है। अर्थात्,

आवृत्ति प्रतिशत दर = $\dfrac{\text{श्रेणी आवृत्ति}}{\text{आवृत्तियों का योग}} \times 100$

हम सारणी 2 के तथ्यों से नयी सारणी बनाते हैं।

(रिक्त स्थानों पर स्वयं गणना कर लिखें)

सारणी 3

दैनिक खर्च	आवृत्ति	श्रेणी-सीमा		श्रेणी सीमान्त (हद)		मध्यमा	श्रेणी की लम्बाई	आवृत्ति घनत्व	आपेक्षिक आवृत्ति	आवृत्ति का प्रतिशत (दर)
		न्यूनतम	वृहत्तम	निम्न	उच्च					
70 – 105	07	70	105	70	105	87.5	35	0.2	0.14	0.14× 100 = 14
105 – 140	13	□	□	105	140	□	□	$\frac{73}{35}$ = .37	$\frac{73}{50}$ = .26	□
140 – 175	11	□	□	□	□	□	35	□	$\frac{11}{50}$ = .22	□
175 – 210	13	□	□	□	□	192.5	□	□	□	□
210 – 245	04	□	□	□	□	□	□	□	□	□
245 – 280	02	□	□	□	□	□	□	□	□	□
कुल	50								□	□

हमारे विद्यालय में विद्यार्थी पूरे वर्ष भर विद्यालय के विभिन्न आयोजनों में भाग लेते रहते हैं और इन कार्यक्रमों में अपने-अपने अनुसार कुछ सृजनात्मक कार्य करते हैं इसलिए वर्ष के अन्त में उन्हें उनकी क्रियाशीलता के लिए कुछ अंक भी दिए जाते हैं।

4. इसी प्रकार दिये गये हमारे विद्यालय के 40 विद्यार्थियों के अंक नीचे लिखे गए हैं।

30	23	45	40	29	34	15	01	41	12
11	12	49	03	13	02	29	30	24	29
25	03	13	32	39	19	49	07	43	09
41	13	02	44	27	12	22	32	25	31

1 – 10, 11 – 20, ... , 41 – 50 श्रेणियों को लेकर अंको की आवृत्ति-विभाजन सारणी बनाएं।

सारणी 4

श्रेणी	श्रेणी आवृत्ति	श्रेणी-सीमा		श्रेणी सीमान्त		मध्यमा	श्रेणी की लम्बाई	आवृत्ति घनत्व
		न्यूनतम	वृहत्तम	निम्न	उच्च			
1 – 10	7	1	10	0.5	10.5	5.5	10	0.7
11 – 20	□	11	20	10.5	20.5	15.5	10	0.9
21 – 30	□	□	□	□	□	□	□	□
31 – 40	□	□	□	□	□	□	□	□
41 – 50	□	□	□	□	□	□	□	□
कुल	40							

मिहिर ने एक टोकरी सेब लेकर इसमें से 35 सेबों का वजन (ग्राम में) लिखा।

82	109	107	141	165	115	93
172	92	86	70	150	126	130
129	100	119	84	99	113	106
111	136	90	115	110	78	90
107	131	104	110	118	80	128

हम ऊपर दिए गए तथ्यों से एक ऐसी आवृत्ति तालिका (सारणी) बनाते हैं ताकि इसके प्रथम श्रेणी का मध्यमा 70 ग्राम हो और प्रत्येक श्रेणी की लम्बाई 20 हो।

प्रथम श्रेणी की मध्यमा 70 और श्रेणी की लम्बाई 20 हो तो

$\therefore$ प्रथम श्रेणी की न्यूनतम सीमा $= 70 - \frac{20}{2} = 60$

और वृहत्तम सीमा $= 70 + \frac{20}{2} = 80$

$\therefore$ प्रथम श्रेणी = (60 – 80)

सारणी – 5

श्रेणी वजन (ग्राम)	टैली मार्क	आवृत्ति
60 – 80	||	2
80 – 100	卌 ||||	9
100 – 120	卌 卌 ||||	14
120 – 140	卌 |	6
140 – 160	||	2
160 – 180	||	2

नीचे 40 दुकानों के मासिक किराए लिखे हैं 80 श्रेणी की लम्बाई के साथ आवृत्ति-विभाजन की तालिका (सारणी) बनाएं।

380	420	490	370	820	370	755	620	540	790
840	750	630	440	740	440	480	540	690	360
510	820	770	720	740	470	520	570	620	670
770	470	640	840	810	310	380	430	750	670

[स्वयं करें]

आज सातवीं कक्षा के 40 विद्यार्थियों के 100 पूर्णांक की गणित की परीक्षा में प्राप्त अंक बनाए गए हैं।
उनके प्राप्तांक नीचे लिखे गए।

32	40	45	92	83	48	56	71	77	49
61	97	36	44	52	67	85	70	45	56
81	73	39	50	74	60	48	64	80	44
45	64	42	71	70	42	75	41	78	60

हम ऊपर दिए तथ्यों की सहायता से आवृत्ति विभाजन की सारणी बनाते हैं जिसमें श्रेणी की लम्बाई 10 है।

सर्वाधिक प्राप्तांक = ☐, न्यूनतम प्राप्तांक = 31

आवृत्ति विभाजन सारणी जिसमें श्रेणी की लम्बाई 10 है।

सारणी 6

प्राप्त अंक	टैली मार्क	आवृत्ति (विद्यार्थियों की संख्या)
30-40	III	3
40-50	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
50-60	IIII	4
60-70	~~IIII~~ I	6
70-80	~~IIII~~ IIII	9
80-90	IIII	4
90-100	II	2

5 अब हम गणना करते हैं (पिछली सारणी की सहायता से) कि कितने विद्यार्थियों ने 50 से कम अंक पाया है और कितनों ने 50 से 60 अंकों के बीच अंक प्राप्त किया है।

पाते हैं, 4 विद्यार्थियों ने गणित में 50 से 60 के बीच के अंक प्राप्त किया है।

किन्तु कितने विद्यार्थी 50 से कम अंक प्राप्त किये यह कैसे पाएंगे।

पिछली सारणी से पाते हैं,

40 से कम अंक प्राप्त करने वालों की संख्या = 3

40 और 40 से अधिक किन्तु 50 से कम अंक प्राप्त करने वालों की संख्या = 12

$\therefore$ 50 से कम अंक प्राप्त करने वालों की कुल संख्या = (3+12)

= 15

सहज रूप से गणना करने के लिये आवृत्ति-विभाजन सारणी नीचे लिखते हैं।

सारणी 7

प्राप्त अंक	आवृत्ति (विद्यार्थियों की संख्या)
30 से कम	0
40 से कम	3
50 से कम	3 + 12 = 15
60 से कम	3 + 12 + 4 = 19
70 से कम	3 + 12 + 4 + 6 = 25
80 से कम	3 + 12 + 4 + □ + □ = □
90 से कम	3 + 12 + 4 + 6 + 9 + 4 = 38
100 से कम	3 + 12 + 4 + 6 + 9 + 4 + □ = □

इस प्रकार आवृत्ति विभाजन की बनाई गई सारणी को क्या कहते हैं ?

ऊपर के आवृत्ति विभाजन सारणी में क्रम से योग करके आवृत्ति पाए गई हैं। इस प्रकार की तालिका-विभाजन को निम्नतम सूचक क्रम बार योग आवृत्ति विभाजन तालिका (Less than type cumulative Frequency distribution table) कहा जाता है।

6 इसी प्रकार 50 या 50 से अधिक अंक कितने विद्यार्थियों (छात्र-छात्राओं) ने पाये, गणना करें।

पहले आवृत्ति विभाजन सारणी या सारणी 7 से पाते हैं

50 या 50 से अधिक अंक प्राप्त किये हो उनकी कुल संख्या = (2 + 4 + 9 + 6 + 4) = 25

सुविधा के लिये आवृत्ति-विभाजन निम्न ढंग से लिखा गया

प्राप्त अंक	आवृत्ति (छात्र-छात्राओं की संख्या)
30 या 30 से अधिक	3 + 12 + 4 + 6 + 9 + 4 + 2 = 40
40 या 40 से अधिक	12 + 4 + 6 + 9 + 4 + 2 = 27
50 या 50 से अधिक	4 + 6 + 9 + 4 + 2 = 25
60 या 60 से अधिक	□ + □ + □ + □ = 21
70 या 70 से अधिक	9 + 4 + 2 = 15
80 या 80 से अधिक	□ + □ = □
90 या 90 से अधिक	2
100 या 100 से अधिक	0

इस प्रकार बनाए गए आवृत्ति-विभाजन तालिका को क्या कहा जाता है ?

ऊपर के आवृत्ति-विभाजन तालिका को उच्चतम सूचक क्रम योग आवृत्ति विभाजन तालिका (More than type cumulative Frequency Distribution table) कहा जाता है।

ऊपर की तालिका से सहज ही पाते हैं कि 50 या 50 से अधिक अंक पाने वाले छात्र-छात्राओं की संख्या 25 है।

पाते हैं, जिस आवृत्ति-विभाजन में प्रत्येक श्रेणी की क्रम योग आवृत्ति दिखायी जाती है उसे आवृत्ति विभाजन कहा जाता है।

दो प्रकार से क्रम योग आवृत्ति विभाजन तालिका बनाई जाती है।

(i) निम्नतम सूचक क्रम योग आवृत्ति-विभाजन तालिका। (ii) उच्चतम सूचक क्रम योग आवृत्ति विभाजन तालिका।

ऊपर की तालिका से बना सकते हैं, 50-60 श्रेणी की न्यूनतर सूचक क्रम योग आवृत्ति = 19

और 50-60 श्रेणी की वृहत्तर सूचक क्रम योग आवृत्ति = 25

कितनी छात्र-छात्राओं ने 40 या 40 से अधिक अंक प्राप्त किए हैं- गणना कर लिखें (स्वयं करें)

7 अनुष्का और कुशल ने विद्यालय के 100 मित्रों के साप्ताहिक टिफिन खर्च की तालिका बनाई है।

साप्ताहिक टिफिन खर्च (रु०)	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
मित्रों की संख्या	13	12	20	13	23	19

अब इसका क्रम योग आवृत्ति-विभाजन तालिका बनाते हैं और निम्न प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास करते हैं।

(i) कितने मित्रों का टिफिन खर्च 80 रु० से कम है, लिखें।

(ii) कितने मित्रों का साप्ताहिक टिफिन खर्च 40 रु० या 40 रु० से अधिक है लिखें।

(iii) कितने मित्रों का साप्ताहिक टिफिन खर्च 60 रु० या 60 रु० अधिक किन्तु 100 रु० से कम है लिखें।

पहले हम क्रमयोग आवृत्ति विभाजन तालिका बनाते हैं।

श्रेणी सीमान्त साप्ताहिक खर्च (रु०)	निम्नतम सूचक क्रम योग आवृत्ति
0 से कम	0
20 से कम	13
40 से कम	25
60 से कम	45
80 से कम	58
100 से कम	81
120 से कम	100

श्रेणी सीमान्त साप्ताहिक खर्च (रु०)	उच्चतम सूचक क्रम योग आवृत्ति
120 या 120 से अधिक	0
100 या 100 से अधिक	19
80 या 80 से अधिक	42
60 या 60 से अधिक	55
40 या 40 से अधिक	75
20 या 20 से अधिक	87
0 या 0 से अधिक	100

पीछे के क्रम योग आवृत्ति विभाजन तालिका से पाते हैं,

☐ मित्रों का साप्ताहिक टिफिन खर्च 80 रु० से कम है।

☐ मित्रों का साप्ताहिक टिफिन खर्च 40 रु० या 40 रु० से अधिक है।

साप्ताहिक टिफिन खर्च 60 रु० या 60 रु० से अधिक किन्तु 100 रु० से कम हो ऐसे छात्र-छात्राओं की संख्या,

(81 – 45) = 36 अथवा (55 – 19) = 36

निम्नतम सूचक क्रम योग आवृत्ति-तालिका से

उच्चतम सूचक क्रम योग आवृत्ति तालिका से

8 हम निम्न क्रम योग आवृत्ति-विभाजन तालिका की सहायता से एक आवृत्ति-विभाजन तालिका बनाते है।

श्रेणी	क्रम योग आवृत्ति
0 — 7	5
7 — 14	14
14 — 21	25
21 — 28	42
28 — 35	50
35 — 42	61
42 — 49	65

दिये गये क्रम योग आवृत्ति की सहायता से क्रम योग आवृत्ति विभाजन तालिका तैयार की गयी जो नीचे दी गई है।

श्रेणी	आवृत्ति	क्रम योग आवृत्ति
0 — 7	5	5
7 — 14	14 – 5 = 9	14
14 — 21	25 – 14 = 11	25
21 — 28	42 – 25 = 17	42
28 — 35	50 – 42 = 8	50
35 — 42	61 – 50 = □	61
42 — 49	□ – □ = 4	65

स्वयं करें — 11.1

मृगांक ने अपने कारखाने के 30 कर्मचारियों की-उम्र लिखी।

उम्र (वर्ष)	21–23	23–25	25–27	27–29	29–31	31–33	33–35
कर्मचारियों की संख्या	3	4	5	6	5	4	3

उपरोक्त तालिका की सहायता से क्रम योग आवृत्ति तालिका बनाए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दें।

(i) कारखाने में 27 वर्ष से कम उम्र के कितने कर्मचारी है?

(ii) 25 वर्ष या 25 वर्ष से अधिक उम्र के कितने कर्मचारी है?

(iii) 25 वर्ष या 25 वर्ष से अधिक किन्तु 33 वर्ष से कम उम्र के कितने कर्मचारी है?

हल करें — 11.1

1. मुहल्ले के 40 परिवारों में से प्रत्येक परिवार में शिशुओं की संख्या लिखी गयी है।

1	2	6	5	1	5	1	3	2	6
2	3	4	2	0	4	4	3	2	2
0	0	1	2	2	4	3	2	1	0
5	1	2	4	3	4	1	6	2	2

इन तथ्यों का आवृति-विभाजन तालिका तैयार करे जिसकी श्रेणियाँ 0–2, 2–4, इत्यादि ही इस आवृत्ति विभाजन तालिका से (i) श्रेणी-अन्तर (ii) श्रेणी की ल० (iii) श्रेणी की आवृत्ति (iv) श्रेणी सीमा से क्या समझते है लिखें।

2. किसी विद्यालय के 40 छात्रों द्वारा प्राप्त किये गये अंको की तालिका नीचे दी गई है?

34	27	45	21	30	40	11	47	01	15
03	40	12	47	48	18	30	24	25	28
32	31	25	22	27	41	12	13	02	44
43	07	09	49	13	19	32	39	24	03

1–10, 11–20, ..., 41–50 श्रेणियों को लेकर प्राप्तकों की एक आवृत्ति विभाजन तालिका बनाएं।

3. एक टोकरी में ढेर सारे कमला नीबू रखे हुए है। इस टोकरी से किन्ही 40 नीबुंओं की लेकर उनका भार नीचे लिखा गया है।

45, 35, 30, 55, 70, 100, 80, 110, 80,75, 85, 70, 75, 85, 90, 75, 90, 30, 55, 45, 40, 65, 60, 50, 40, 100, 65, 60, 40, 100, 75, 110, 30, 45, 84, 70, 80, 95, 85, 70.

इसकी सहायता से एक आवृत्ति विभाजन तालिका और एक निम्नतम सूचक क्रम योग आवृत्ति विभाजन तालिका बनाएं।

4. मीताली और महिदुल ने गाँव के 45 घरों के इस माह के बिजली-बिल की राशियों का परिमाण नीचे लिखा।
116, 127, 100, 82, 80, 101, 91, 65, 95, 89, 75, 92, 129, 78, 87, 101, 65, 52, 59, 65, 95, 108, 115, 121, 128, 63, 76, 130, 116, 108, 118, 61, 129, 127, 91, 130, 125, 101, 116, 105, 92, 75, 98, 65,110.

ऊपर दिये गये तथ्यों की सहायता से एक आवृत्ति विभाजन तालिका बनाएं।

5. मारिया ने एक अस्यताल के 300 रोगियों की उम्र नीचे की तालिका में लिखा।

उम्र (वर्ष)	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
रोगियों की संख्या	80	40	50	70	40	20

इस तालिका की सहायता से उच्चतम-सूचक क्रम योग आवृत्ति-विभाजन तालिका बनाएं।

6. नीचे दिये गये क्रमयोग आवृत्ति-विभाजन तालिका देखे और एक आवृत्ति विभाजन तालिका बनाएं।

श्रेणी	10 से कम	20 से कम	30 से कम	40 से कम	50 से कम	60 से कम
छात्र-छात्राओं की सं०	17	22	29	37	50	60

7. निम्न क्रम योग आवृत्ति-विभाजन तालिका देखे और आवृत्ति-विभाजन तालिका बनाएं।

प्राप्तांक	छात्र-छात्राओ की संख्या
60 से अधिक	0
50 से अधिक	16
40 से अधिक	40
30 से अधिक	75
20 से अधिक	87
10 से अधिक	92
0 से अधिक	100

8. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.):

i) निम्न में से कौन तथ्यों का चित्र के रुप में प्रदर्शन है ?

(a) दण्ड लेखाचित्र (b) कच्चे तथ्य (c) क्रम योग आवृत्ति (d) आवृत्ति विभाजन।

ii) 12, 25, 15, 18, 17, 20, 22, 26, 6, 16, 11, 8, 19, 10, 30, 20, 32 तथ्यों का विस्तार है

(a) 10 (b) 15, (c) 18. (d) 26

iii) 1-5, 6-10 , ... श्रेणी में श्रेणी की लम्बाई है

(a) 4 (b) 5 (c) 4.5 (d) 5.5

iv) एक आवृत्ति-विभाजन तालिका के श्रेणी के मध्य बिन्दु है 15, 20, 25, 30 ....। जिस श्रेणी का मध्यबिन्दु 20 है वह है

(a) 12.5 – 17.5 (b) 17.5 – 22.5 (c) 18.5 – 21.5 (d) 19.5 – 20.5

v) किसी आवृत्ति विभाजन तालिका के एक श्रेणी का मध्य बिन्दु 10 है और प्रत्येक श्रेणी की लम्बाई 6; है ती श्रेणी की न्यूनतम सीमा है

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 12

9. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :

a) एक अविच्छिन्न आवृत्ति विभाजन तालिका के एक श्रेणी का मध्य बिन्दु m है और यदि उच्च श्रेणी सीमान्त u हो तो निम्न श्रेणी सीमान्त क्या होगा गणना करें।

b) किसी एक अविच्छिन्न आवृत्ति विभाजन तालिका के एक श्रेणी का मध्य बिन्दु 42 और श्रेणी की लम्बाई 10 हो तो श्रेणी की वृहत्तम सीमा और न्यूनतन सीमा लिखें।

c)

श्रेणी सीमा	70 – 74	75 – 79	80 – 84	85 – 89
आवृत्ति	3	4	5	8

उपरोक्त आवृत्ति-विभाजन तालिका के पहली श्रेणी का आवृत्ति-घनत्व क्या है लिखें।

d) (c) प्रश्न के अन्तिम श्रेणी की आपेक्षिक-आवृति क्या है लिखें।

e) निम्न उदाहरणो में कौन गुण-लक्षण और कौन चल है, निर्देश करें।

i) परिवार की जनसंख्या ii) दैनिक तापमात्रा iii) शिक्षागत मान iv) मासिक आय

v) माध्यमिक परीक्षा में प्राप्त ग्रेड

आज ध्रुव और अहाना ने निश्चिय किया है कि सारणी-3 के आवृत्ति-विभाजन तालिका को लेखाचित्र के रूप में प्रकट करेंगे और ग्रामबासियों की आर्थिक स्थिति को प्रदर्शित करेंगें।

9 सारणी-3 के अविच्छिन्न चल के तथ्यों के लेखाचित्र के रूप में प्रकट करने का प्रयास करें और देखें कि क्या मिलता है?

(i) पहले x अक्ष पर सबसे छोटे वर्ग की भुजाओं की ल० = 35 रु० [या 0.5 से०मी० = 35 रु०] लेकर आवृत्ति विभाजन के श्रेणी सीमान्तों के मानों में कोई अन्तर न रखते हुए क्रमशः अंकित करते है अर्थात् क्षितिज रेखा की 70–105, 105–140....... श्रेणी विभागों के अनुसार बाँट लेते हैं।

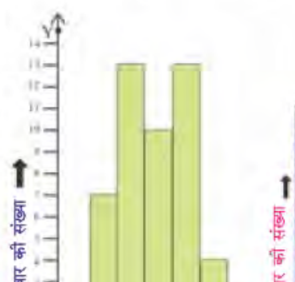
दैनिक खर्च श्रेणी	श्रेणी सीमान्त		श्रेणी की लम्बाई	श्रेणी की आवृत्ति
	निम्न	उच्च		
70 – 105	70	105	35	7
105 – 140	105	140	35	13
140 – 175	140	175	35	11
175 – 210	175	210	35	13
210 – 245	210	245	35	4
245 – 280	245	280	35	2
			कुल =	50

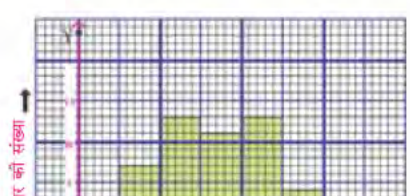
युक्ति 0 से प्रारम्भ न करके 70 से प्रारम्भ करना है इसलिए x अक्ष पर या क्षितिज रेखा पर (-ᐱᐱᐱ-) एक टूटी हुई रेखा को प्रकट करेगा।

इसी प्रकार y अक्ष पर सबसे छोटे वर्ग की भुजा की लम्बाई = 1 परिवार [अर्थात् 0.5 से०मी० = 1 परिवार] लेकर अगले पृष्ठ पर दिखाए गए चित्र की भाँति कई संलग्न आयत क्षेत्र अंकित किया जिनकी चौड़ाई श्रेणी की ल० और लम्बाई अर्थात् इस दशा में ऊँचाई संगत श्रेणी की आवृत्ति या आवृत्ति घनत्व के समान लम्बाई की ईकाई के रूप में है। जब श्रेणियों की लम्बाईयाँ समान नही होतीं तब ऊँचाईयों को लम्बाइयों के अनुरूप आवृत्ति घनत्व के साथ समानुपाती माना जाता है। वर्गांकित कागज पर 70-105 श्रेणी के लिए अंकित आयत क्षेत्र की चाँड़ाई 5 इकाई और लम्बाई 7 इकाई है।

ध्रुव ने वर्गांकित कागज पर और अहाना ने अपनी अभ्यास पुस्तिका पर अंकित किया।

हम लोगों ने इस प्रकार लेखाचित्र अंकित कर कई आयत क्षेत्र पाये जिनके बीच कोई अन्तर (Gap) नही और इन आयत क्षेत्रों का क्षेत्रफल संगत श्रेणियों की आवृत्ति के सीधा समानुपाती है।





अविच्छिन्न चल के श्रेणी-विन्यसित (सजी हुई श्रेणी) आवृत्ति-विभाजन की इस प्रकार आयत क्षेत्र के माध्यम से लेखाचित्र के रूप में प्रदर्शित करने की क्या कहा जाता है?

अविच्छिन्न चल के श्रेणी विन्यसित आवृत्ति विभाजन से लेखाचित्र को आयत लेखाचित्र (Histogram) कहा जाता है।

आयत लेखाचित्र परस्पर संलग्न आयत क्षेत्रों का समूह है। प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल संगत श्रेणी की आवृत्ति-घनत्व के सीधा समानुपाती होता है।

हमारे मुहल्ले के एक छोटे लोहे के यंत्र बनाने वाले कारखाने में उनके कर्मचारी काम करते है। हमने उनमे से कुछ के दैनिक मजदूरी (रुपये में) की एक तालिका तैयार की है।

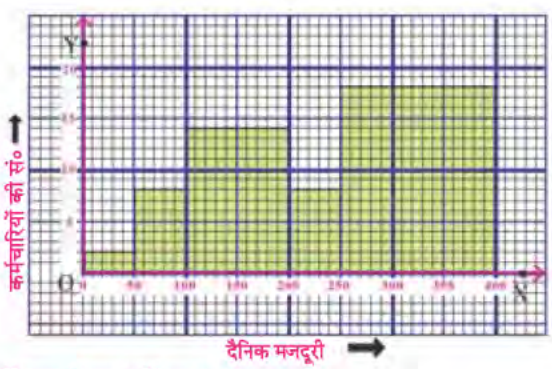
वह तालिका है —

दैनिक मजदूरी (रु०)	0 – 50	50 – 100	100 – 200	200 – 250	250 – 400
कर्म चारियों की सं०	2	8	14	8	18

हम इस उपरोक्त तथ्य की एक लेखाचित्र के रूप में प्रकट करें।

पहले ऊपर के तथ्यों से निम्न आवृत्ति विभाजन तालिका बनाएं।

दैनिक मजदूरी (रु० में) श्रेणी	श्रेणी–सीमान्त द्वारा निर्दिष्ट श्रेणी	श्रेणी की लम्बाई	आवृत्ति
0 – 50	0 – 50	50	2
50 – 100	50 – 100	50	8
100 – 200	100 – 200	100	14
200 – 250	200 – 250	50	8
250 – 400	250 – 400	150	18
कुल			50



आवृत्ति-विभाजन की तालिका के श्रेणी-विभाजों का लेखाचित्र अंकित किया। x –अक्ष पर सबसे छोटे वर्ग की एकभुजा की ल० 10 इकाई और y अक्ष पर सबसे छोटे वर्ग की एक भुजा की लम्बाई 1इकाई मानकर अंकित किया।

पाते है कि लेखाचित्र में आयत क्षेत्रों का क्षेत्रफल आयत लेखाचित्र के श्रेणी के आवृत्ति के समानुपाती नहीं है।

किन्तु ऐसा क्यों हुआ ?

पाते है, पहले आवृत्ति विभाजन तालिका में श्रेणी की लम्बाईयाँ समान थी। किन्तु इस तालिका में श्रेणी की लम्बाईयाँ असमान है।

इस प्रकार की दशा में अर्थात आवृत्ति विभाजन में जब श्रेणियों की लम्बाईयाँ समान नहीं तो आयत लेखाचित्र के रूप में तथ्यों को कैसे प्रकट किया जाएगा ?

इस अवस्था में हमें निम्न दो बातों का अनुसरण करना पड़ेगा —

(i) पहले सुविधानुसार सबसे छोटी श्रेणी की लम्बाई वाले एक श्रेणी अन्तर को पुनः लेगें। ऊपर के उदाहरण में सबसे छोटी श्रेणी की लम्बाई 50 चुन लिया।

(ii) अब आयत क्षेत्र की लम्बाई (ऊँचाई) ऐसा करेंगे जिससे कि अन्य सभी आयत क्षेत्रों की ल० 50 श्रेणी की ल० के समानुपाती हो।

जैसे जब श्रेणी की लम्बाई 100 ही तब आयत क्षेत्र की लम्बाई 14 है

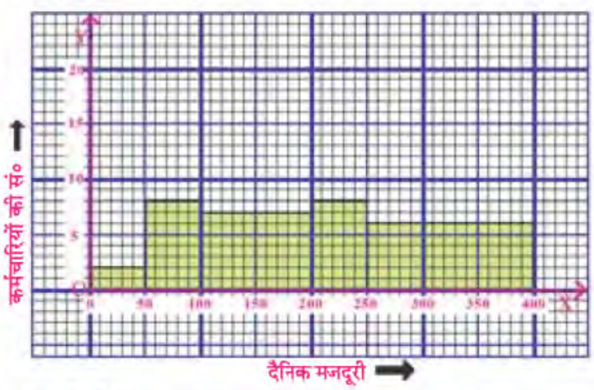
अत: जब श्रेणी की लम्बाई 50 ही तब आयत क्षेत्र की लम्बाई $\frac{14}{100} \times 50 = 7$ है

इसी प्रकार, आयत लेखाचित्र के आयत क्षेत्रों की लम्बाई की गणना कर लिखें।

श्रेणी (दैनिक मजदूरी) रु० में	आवृत्ति	श्रेणी की लम्बाई	आयत क्षेत्र की लम्बाई
0 – 50	2	50	$\frac{2}{50} \times 50 = 2$
50 – 100	8	50	$\frac{8}{50} \times 50 = 8$
100 – 200	14	100	$\frac{14}{100} \times 50 = 7$
200 – 250	☐	☐	$\frac{8}{50} \times 50 = 8$
250 – 400	☐	☐	$\frac{18}{150} \times 50 = 6$

ऊपर की तालिका से दैनिक मजदूरी 50 रूपये प्रति श्रमिक पाया है।

पूर्व पृष्ठ की तालिका के अनुसार दिये गये तत्थों के सटीक आयत लेखाचित्र अंकित करें, जिसकी चौड़ाई समान नहीं है।



यदि इकट्ठे किये गये तथ्य निम्न रूप में होते।

दैनिक मजदूरी (रु०)	0–50	50–150	150–200	200–300	300–350
कर्मचारियों की सं०	200	900	600	1200	1000

स्वयं आयत लेखाचित्र अंकित करें :

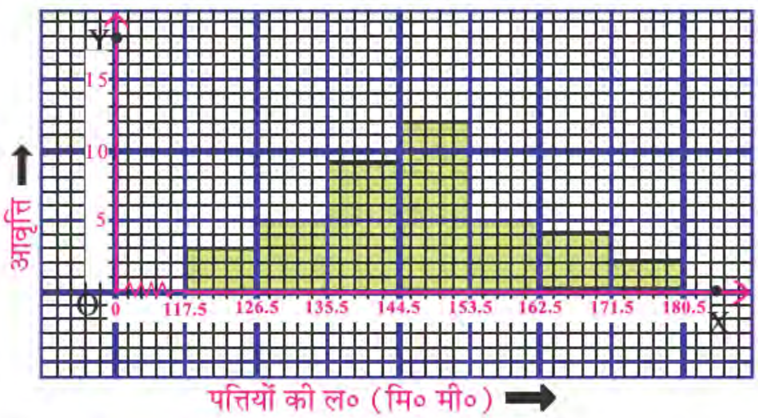
10 सिमरन और राहुल ने अनेक पत्तियों की लम्बाई मापकर जो तथ्य पाए उन्हें निम्न तालिका में लिखा —

पत्तियों की ल० [मि० मी०]	118–126	127–135	136–144	145–153	154–162	163–171	172–180
पत्तियों की संख्या	3	5	9	12	5	4	2

पिछले पृष्ठ तथ्यों से एक आवृत्ति विभाजन तालिका बनाएं।

पत्तियों की ल० श्रेणी (मि० मी०)	श्रेणी सीमान्तों द्वारा निर्दिष्ट श्रेणी	श्रेणी की ल०	आवृत्ति
118 – 126	117.5 – 126.5	9	03
127 – 135	126.5 – 135.5	9	05
136 – 144	135.5 – 144.5	9	09
145 – 153	144.5 – 153.5	9	12
154 – 162	153.5 – 162.5	9	05
163 – 171	162.5 – 171.5	9	04
172 – 180	171.5 – 180.5	9	02

ऊपर के आवृति विभाजन तालिका की आयत लेखाचित्र के रूप में प्रकट करें —



x अक्ष पर सबसे छोटे वर्ग की 5 भुजाओं की ल० = 9 मि० मी० y अक्ष पर सबसे छोटे वर्ग की 1 भुजा की ल० = 1 इकाई मानकर आवृति विभाजन तालिका का आयत लेखाचित्र अंकित किया।

किसी अविच्छिन्न चल के श्रेणी सजी आवृत्ति विभाजन की तालिका के आयत लेखाचित्र की अंकित करते समय किन विधियों का पालन किया या — लिखें।

आयत लेखाचित्र के अंकन पद्धति में पाया —

(i) अविच्छिन्न चल के मानों को साधारणत क्षितिज रेखा पर और श्रेणी-आवृत्तियों को अध्वरेखा पर अंकित किया जाता है। क्षितिज रेखा पर आवृत्ति-विभाजन के श्रेणी विभागों की श्रेणी सीमान्तों के मानों में कोई अन्तर न रखते हुए लगातार अंकित करते है। फलस्वरूप क्षितिज रेखा श्रेणी विभागों के अनुकूल कई अंशों में बँट जाती है।

(ii) यदि आवृत्ति विभाजन के श्रेणी विभागों की लम्बाईयाँ समान-समान हो तो प्रत्येक अंश पर निश्चित श्रेणी-विभाग की आवृत्ति के समान लम्बाई का एक-एक आयत क्षेत्र अंकित किया जाता है।

(iii) यदि आवृत्ति विभाजन के श्रेणी विभागों समान लम्बाई के न हो तब सुविधानुसार सबसे छोटी श्रेणी की लम्बाई का एक श्रेणी-अन्तर चुनकर प्रति श्रेणी विभाग की आवृत्ति के समानुपाती में जाता है और प्रत्येक अंश पर अंकित आयत क्षेत्र की लम्बाई के अनुरूप श्रेणी विभाग निश्चित आवृत्ति के समान होती है।

(नवम् कक्षा में असमान लम्बाई वाले श्रेणी विभागों की आवृत्ति विभाजन तालिका का आयत लेखाचित्र पाठ्यक्रम से बाहर है)।

11 मेघा ने एक छोटे कारखाने के मजदूरों के निश्चित समय की मजदूरी की तालिका बनाई।

दैनिक मजदूरी (रु०)	100	90	80	70	60	50
मजदूरों की संख्या	6	4	12	16	20	12

हम ऊपर दिए गए तत्थों की सहायता से आयत लेखाचित्र अंकित करते हैं —

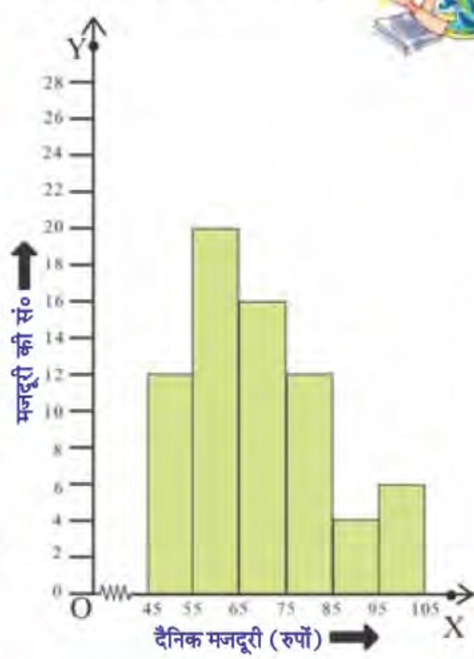
पाते है, मेधा के द्वारा एकत्रित किये गये तथ्य श्रेणी युक्त नहीं है। इस तरह के तथ्यों से लेखाचित्र कैसे अंकित किया जाता है — देखें।

$\therefore$ समान लम्बाई की श्रेणियाँ पाने के लिये 100, 90, 80, 70 मजदूरी समूह की 95 – 105, 85 – 95, 75 – 85, 65 – 75, ... जैसे श्रेणी अन्तरो के बिन्दु लिये जायेगे।

$[\therefore (100 - \frac{10}{2}) - (100 + \frac{10}{2}) \rightarrow (95 - 105)]$

$\therefore$ दिये गये तथ्यों का आयत लेखाचित्र अंकित करने के लिये आवृत्ति-विभाजन तालिका पाते हैं

श्रेणी (रुपये में मजदूरी)	आवृत्ति (मजदूरों की संख्या)
95 — 105	06
85 — 95	04
75 — 85	12
65 — 75	16
55 — 65	20
45 — 55	12
कुल	70

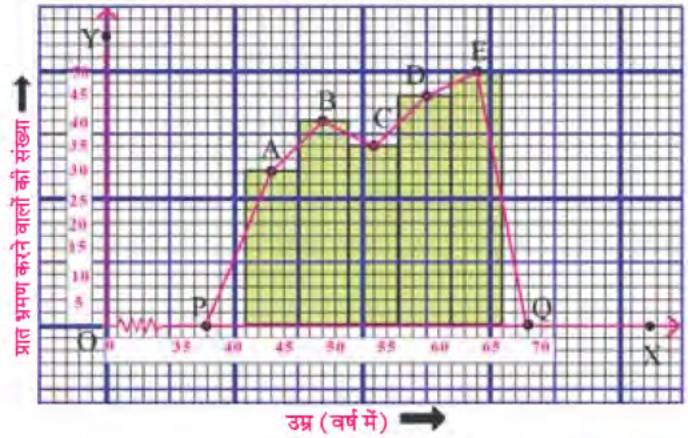


क्षितिज रेखा (x-axis) पर **1 से०मी० = 10 रु०** मजदूरी और उर्ध्व रेखा (y-axis) पर **0.5 से०मी० = 2 मजदूर** मानकर अविच्छिन्न चल की आवृत्ति विभाजन तालिका का आयत लेखाचित्र अंकित किया।

12 मैं अपने दादा जी के साथ एक दिन प्रात:काल भ्रमण के लिए बोटानिकल गॉर्डन में जाता हूँ। आज मैं और मेरी मित्र सहाना ने सोचा कि आज जितने लोग प्रात:काल भ्रमण के लिए जाते है उनकी उम्र के अनुसार एक तथ्य एकत्रित किया जाय। आज हमारे द्वारा एकत्रित किया गया तथ्य निम्न है।

श्रेणी उम्र (वर्ष में)	40–45	45–50	50–55	55–60	60-65
आवृत्ति	30	40	35	45	50

इस संग्रहित तथ्य को आयत लेखाचित्र के रूप में अंकित करें।



x अक्ष पर सबसे छोटे वर्गों की 4 भुजा ओ की ल० = 5 वर्ष और y अक्ष पर सबसे छोटे वर्गों की दो भुजाओं की ल० = 5 भ्रमण करने वाले लोग मानकर ऊपर के तथ्यों से आयत लेखाचित्र अंकित किया।

मेरे भाई रोहित ने एक मजेदार कर डाला उसने मेरे द्वारा बनाए गए आयत लेखाचित्र से लगे (संलग्न) आयत क्षेत्र की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को A,B,C,D और E नाम दे दिया।

श्रेणी	श्रेणी मध्यमा	आवृत्ति
40–45	42.5	30
45–50	47.5	40
50–55	52.5	35
55–60	57.5	45
60–65	62.5	50

पाते है, A,B,C,D, E के स्थानांक क्रम से (42.5, 30), (47.5, 40), (52.5, 35), (57.5, 45) और (62.5, 50) है।

मैंने A-B; B-C; C-D; D-E; की मिलाया और इन A,B,C,D चतुर्भुज बनाने के लिए x अक्ष पर P (37.5,0) और Q (67.5,0) दो बिन्दु लिया। A-P और E-Q को मिलाया।

37.5, (35-40) का मध्य बिन्दु है और 67.5 ☐ - ☐ का मध्य बिन्दु है।

पाते है, PABCDEQ एक बहुभुज मिलता है। इस बहुभुज को क्या कहा जाता है ?

PABCDEQ बहुभुज को दिए गए तथ्यों का आवृत्ति बहुभुज [Frequency Polygon] कहा जाता है।

किसी अविच्छिन्न चल की समान लम्बाई वाली श्रेणियों रुप में आवृत्ति विभाजन को लेखाचित्र के रुप में प्रकट करने के लिए आवृत्ति-बहुभुज अंकित किया जाता है। यहाँ यह मान लिया जाता है कि किसी भी श्रेणी में चल के मान संगत श्रेणी के मध्य बिन्दु पर केन्द्रित रहते है। [कभी-कभी विच्छिन्न चल के आवृत्ति विभाजन को प्रदर्शित करने के लिये भी आवृत्ति-बहुभुज अंकित किया जाता है।]

किसी आवृत्ति विभाजन के आवृत्ति-बहुभुज का क्षेत्रफल आवृत्ति विभाजन के आयत-लेखाचित्र के क्षेत्रफल के बराबर होता है। त्रिभुजों की सर्वांगसमता की सहायता से आयत लेखाचित्र के क्षेत्रफल और आवृत्ति-बहुभुज के क्षेत्रफल की समानता दिखाते है —

हमने अपने विद्यालय के 100 मित्रो का भार (कि०ग्रा० में) लिया है। वह है—

मित्रों का भार कि०ग्रा०	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	52–54
मित्रो की सं०	14	18	26	20	14	8

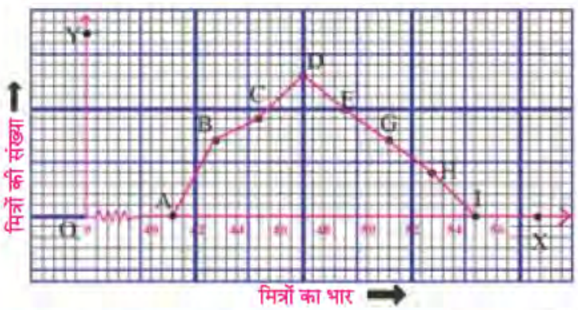
13 अब उपरोक्त तथ्य को आवृत्ति-बहुभुज के रूप में प्रकट करें।

1) पहले आवृत्ति विभाजन तालिका बनाते हैं —

2) अब x अक्ष पर वर्गांकित कागज (तल) पर बने सबसे छोटे 4 वर्गों की भुजाओं की ल० = 2 कि० ग्रा० और y अक्ष पर सबसे छोटे वर्ग की 1 भुजा की ल० = 2 मित्र लिया।

श्रेणी	मध्यमा	आवृत्ति
42–44	43	14
44–46	45	18
46–48	47	26
48–50	49	20
50–52	51	14
52–54	53	8
कुल		100

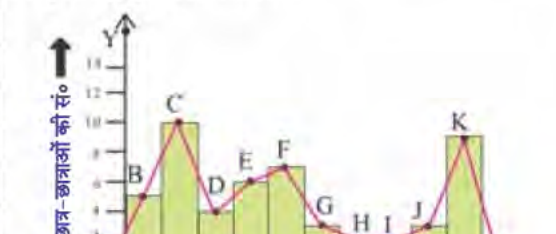
प्रत्येक श्रेणी की मध्यमा को भुज और आवृत्ति को कोटि लेकर (43,14), (45,18), (47,26), (49,20), (51,14), (53,8) बिन्दु अंकित किया। अब इन बिन्दुओं को मिलाया और बहुभुज का अंकन पूरा करने के लिए x अक्ष पर पहली श्रेणी-सीमान्त के पहले के श्रेणी सीमान्त का '0' आवृत्ति वाले मध्य बिन्दु और अन्तिम श्रेणी सीमान्त के '0' आवृत्ति वाले मध्यविन्दु को मिलाकर (यहाँ (41,0) और (55,0) बिन्दुओं को मिलाकर) अभिष्ट ABCDEFGHI बहुभुज पाया।



सबीना के विद्यालय के 51 छात्र-छात्राओं को 100 पूर्णांक में निम्न अंक मिले है —

अंक	छात्र-छात्रओं की संख्या
0-10	5
10-20	10
20-30	4
30-40	6
40-50	7
50-60	3
60-70	2
70-80	2
80-90	3
90-100	9
	कुल = 51

हम इस आवृत्ति तालिका से एक आयत लेखाचित्र और आवृत्ति बहुभुज अंकित करें।



वर्गांकित कागज पर XOX' और YOY' दो परस्पर लम्बवत् अक्ष अंकित किया। x अक्ष पर 0.5 से०मी० की ल० = 10 अंक y अक्ष पर 0.5 से०मी० की ल० = 1 छात्र या छात्रा मानकर आयत लेखाचित्र अंकित किया। अब आवृत्ति बहुभुज का अंकन करने के लिये पहली श्रेणी के ठीक पहले की एक श्रेणी –10-0 और अन्तिम श्रेणी के ठीक बाद वाली श्रेणी 100-110 लिया। इन दोनों की आवृत्ति '0' होगी।

अब (-5,0), (5,5), (15,10), (25,4), (35,6), (45,7), (55,3), (65,2), (75,2), (85,3), (95,9), (105,0) बिन्दुओं को मिलाने से ABCDEFGHIJKL आवृत्ति-बहुभुज अंकित किया।

हमारे मुहल्ले में A और B दो दलों के बीच क्रिकेट खेल हो रहा है। पहले 5 ओवर अर्थात् $5 \times 6 = 30$ गेंद पर किसी दल ने कितने रन बनाए - वह नीचे की तालिका में लिखा गया।

गेंद की संख्या	1-6	7-12	13-18	19-24	25-30
A दल के रन	2	1	8	9	4
B दल के रन	5	6	2	10	5

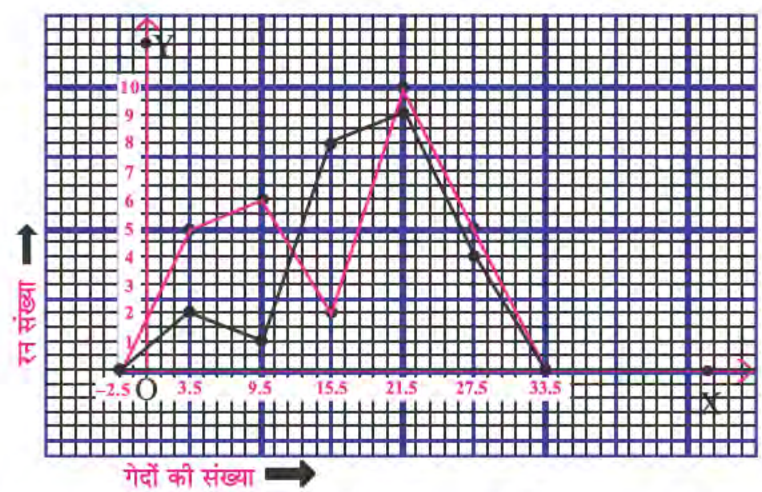
हम एक ही ग्राफ तल पर दोनों के तथ्यों से आवृत्ति बहुभुज बनायें और इनकी तुलना करें।

पहले तथ्यों की आवृत्ति-विभाजन तालिका बनाते हैं —

श्रेणी (गेद-संख्या)	श्रेणी-सीमान्त	मध्यमा	A दल के रन	B दल के रन
1–6	0.5–6.5	3.5	2	5
7–12	6.5–12.5	9.5	1	6
13–18	12.5–18.5	15.5	8	2
19–24	18.5–24.5	21.5	9	10
25–30	24.5–30.5	27.5	4	5

x अक्ष पर गेंद-संख्या और y अक्ष पर रनों की संख्या ली गयी। x अक्ष पर सबसे छोटे 5 -वर्गों की भुजाओं की ल० = 6 गेंद और y अक्ष पर सबसे छोटे 2 वर्गों की भुजाओं की ल० = 1 रन मान लिया।
A दल के लिये (3.5, 2), (9.5, 1), (15.5, 8), (21.5, 9), (27.5, 4) बिन्दुओं की अंकित कर क्षितिज रेखा के साथ मिलाकर A दल का आवृत्ति बहुभुज पाया।

इसी प्रकार, B दल के लिये (3.5, 5), (9.5, 6), (15.5, 2), (21.5, 10), (27.5, 5) बिन्दुओं को अंकित कर क्षितिज रेखा के साथ मिलाकर B दल का आवृत्ति बहुभुज पाया।



पाते है, आवृत्ति बहुभुज की सहायता से हम एक से अधिक तथ्यों की तुलना सहज रूप से कर पाते हैं।

हल करें — 11.2

1. पृथा के विद्यालय के 75 शिक्षार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का आवृत्ति-बहुभुज अंकित करें।

प्राप्तांक	30	40	50	60	70	80
शिक्षार्थियों की संख्या	12	18	21	15	6	3

वर्गांकित कागज पर क्षितिज और उर्ध्व रेखाओं पर सुविधानुसार पैमाना लेकर (20,0), (30,12), (40,18), (50, 21), (60,15), (70,6), (80,3) और (90,0) बिन्दुओं को वर्गांकृत कागज पर अंकित किए और इन्हें मिलाकर आवृत्ति-बहुभुज अंकन करें।

2. निम्न आवृत्ति-विभाजन तालिका का आवृत्ति-बहुभुज अंकित करें।

श्रेणी	0-5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
आवृत्ति	4	10	24	12	20	8

3. बकुलतल्ला के 50 दुकानों का दैनिक लाभ (रुपये में) निम्न तालिका में लिखा है।

दैनिक लाभ (रु०)	0–50	50–100	100–150	150–200	200–250
दुकानों की संख्या	8	15	10	12	5

मीता के अपने विद्यालय तालिका का आवृत्ति-बहुभुज अंकित करें।

4. मीता ने अपने विद्यालय के 75 मित्रों को ऊँचाई मापकर लिखा।

ऊँचाई (से०मी०)	136–142	142–148	148–154	154–160	160–166
मित्रों की संख्या	12	18	26	14	05

इस तथ्यों का आयत लेखाचित्र अंकित करें।

5. हम लोगों ने अपने मुहल्ले के 10 वर्ष से लेकर 45 वर्ष तक उम्र के हिन्दी भाषी नागरिकों की संख्या एकत्रित किया और तालिका बनाई।

उम्र (वर्ष)	10–15	16–21	22–27	28–33	34–39	40–45
हिन्दी भाषी लोगों की सं०	8	14	10	20	6	12

इस तथ्यों का आयत-लेखाचित्र अंकित करें।

6. निम्न आवृत्ति विभाजन तालिका का आयत-लेखाचित्र अंकित करें —

श्रेणी	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60
आवृत्ति	8	3	6	12	2	7

7. निम्न आवृत्ति विभाजन का आयत लेखाचित्र अंकित कर आवृत्ति-बहुभुज अंकित करें।

चंदे का परिमाण (रु०)	20	25	30	35	40	45	50
सदस्यों की संख्या	20	26	16	10	4	18	6

8. निम्न आवृत्ति विभाजन का आयत-लेखाचित्र बनाएं —

शिशु-संख्या	0	1	2	3	4	5
परिवारों की संख्या	120	85	50	25	15	5

संकेत : पहले तथ्यों का बहिर्भुत पद्धति के अनुसार श्रेणी-सीमान्त के साथ निम्न आवृत्ति विभाजन तालिका लिखेंगें —

शिशु-संख्या	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6
परिवारों की संख्या	120	85	50	25	15	5

9. नीचे वीर सिंह गाँव के विद्यासागर प्राथमिक पाठशाला के 32 शिक्षक-शिक्षिकाओं की उम्र लिखी गई है।

उम्र (वर्ष)	25–31	31–37	37–43	43–49	49–55
शिक्षक-शिक्षिकाओं की संख्या	10	13	05	03	01

उपरोक्त तथ्य का आयत लेखाचित्र और आवृत्ति-बहुभुज के रूप में चित्र प्रस्तुत करें।

10. निम्न आवृत्ति विभाजन से आवृत्ति-बहुभुज अंकित करें।

श्रेणी	75–80	80–85	85–90	90–100	100–105
आवृत्ति	12	18	22	10	8

11. निम्न आवृत्ति-विभाजन तालिका का आवृत्ति-बहुभुज अंकित करें।

श्रेणी	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50
आवृत्ति	8	3	6	12	4

12. हमारे गाँव की सभी औरतों को साक्षर बनाने के लिये विशेष व्यवस्था की जाएगी। इसीलिए हमने निम्न तथ्य एकत्रित किए।

उम्र	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
निरक्षरों की संख्या	40	90	100	60	160

उपरोक्त तथ्यों का आवृति-बहुभुज अंकित करें।

13. विगत माह में कोलकाता लीग के दौरान दिल्ली द्वारा दिए गए गोल की संख्या निम्न है।

गोल	0	1	2	3	4	5	6
आवृत्ति	15	20	12	8	6	3	1

उपरोक्त राशि तथ्यों की आवृत्ति-बहुभुज अंकित करें।

14. बहु विकल्पीय प्रश्न : (M. C. Q.)

(i) किसी आयत लेखाचित्र के प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल समानुपाती है —

(a) उसी श्रेणी के मध्य बिन्दु के

(b) उसी श्रेणी की श्रेणी-लम्बाई के

(c) उस श्रेणी की आवृत्ति के

(d) उस श्रेणी के क्रम योग आवृत्ति के

(ii) एक आवृत्ति बहुभुज का अंकन किया जाता है श्रेणी की आवृत्ति और —

(a) श्रेणी की ऊँचाई सीमान्त द्वारा

(b) श्रेणी की निम्न सीमान्त द्वारा

(c) श्रेणी की मध्यमा द्वारा

(d) श्रेणी के किसी भी मान द्वारा

(iii) आयत लेखाचित्र अंकन करते समय श्रेणी सीमान्त के रूप में लिया जाता है —

(a) y अक्ष को

(b) x अक्ष को

(c) x अक्ष और y अक्ष दोनों को

(d) x अक्ष और y अक्ष का बीच (मध्य)

(iv) आयत लेखाचित्र अंकित करते समय प्रति श्रेणी के आयत-क्षेत्र का आधार है —

(a) आवृत्ति

(b) श्रेणी सीमान्त

(c) विस्तार

(d) श्रेणी की ल०

(v) आयत लेखाचित्र सजे हुए तथ्यों का चित्र रूप है जिसकी श्रेणी-सीमान्त और आवृत्ति है - क्रम से

(a) उर्ध्व और क्षितिज अक्ष

(b) सिर्फ अर्ध्व अक्ष

(c) सिर्फ क्षितिज अक्ष

(d) क्षितिज और उर्ध्व अक्ष

12 क्षेत्रफल वाले प्रमेय
(THEOREMS ON AREA)

1 हमारे घर के फर्श पर आयताकार टाईल्स बिछायी गयी है। अभी भी समान माप की 18 टाईल्स अतिरिक्त बची हुई है। हमने निश्चय किया है कि इन 18 टाईल्स को अमरूद के पेड़ की जड़ के आस-पास चारों ओर बिछा दिया जायेगा। किन्तु इस 18 आयताकार टाईल्स से पेड़ की जड़ आधार का कितना भाग भरा जा सकेगा ? पहले गणना करके देख लें कि 1 टाईल्स कितनी जगह घेरती है। अर्थात् 1 आयताकार टाईल्स का क्षेत्रफल कितना है ?

मापकर पाते हैं, आयताकार टाईल्स की लम्बाई 15 सें०मी० और चौड़ाई 10 सें०मी०।

$\therefore$ 1 टाईल का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 15 सें०मी० × 10 सें०मी०

= 150 वर्ग सें०मी०

चूँकि, आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई (यह एक स्वत: सिद्ध तथ्य है)

$\therefore$ 18 टाईल्स समान माप की आयताकार टाईल्स हैं जिससे (150 × 18) वर्ग सें०मी० = ☐ वर्ग सें०मी० जगह भरी जा सकती है।

किन्तु यदि टाईल्स का आकार आयताकार न होकर बगल में दिए गए चित्र के आकार का होता तब क्या क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता था ?

तभी भी टाईल्स का क्षेत्रफल ज्ञात किया जाता किन्तु थोड़ी कठिनाई से।

क्षेत्रफल का क्या अर्थ है ?

क्षेत्रफल किसी क्षेत्र की परिमाप (Magnitude or measure)है। यह परिमाप किसी इकाई (Unit) के साथ जाती है। जैसे 150 वर्ग सें०मी० किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल है।

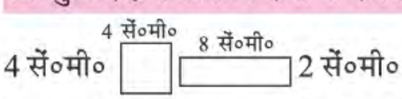
— इस समतलीय क्षेत्र का क्षेत्रफल।

= नीले अंश का का क्षेत्रफल + लाल अंश का का क्षेत्रफल

यदि प्रत्येक टाईल्स की माप (size) और आकार (shape) एक जैसी हो अर्थात् प्रत्येक टाईल को एक दूसरे के ऊपर रखा जाए तो वे सम्पूर्ण रूप से मिल जाए तब उनके क्षेत्रफल समान होते हैं।

यदि दो समतलीय क्षेत्रों के आकार और माप समान-समान हो अर्थात् वे सर्वांगसम हो तो उनके क्षेत्रफल भी समान होगें।

किन्तु यदि हो समतलीय क्षेत्रों के क्षेत्रफल समान हों तो क्या ये दो समतलीय क्षेत्र सर्वांगसम होंगे ?



इन दो समतलीय क्षेत्रों के क्षेत्रफल समान है, किन्तु ये सर्वांगसम नहीं हैं। अर्थात् एक के ऊपर दूसरे को रखने पर हर तरह से एक दूसरे से मिलते नहीं।

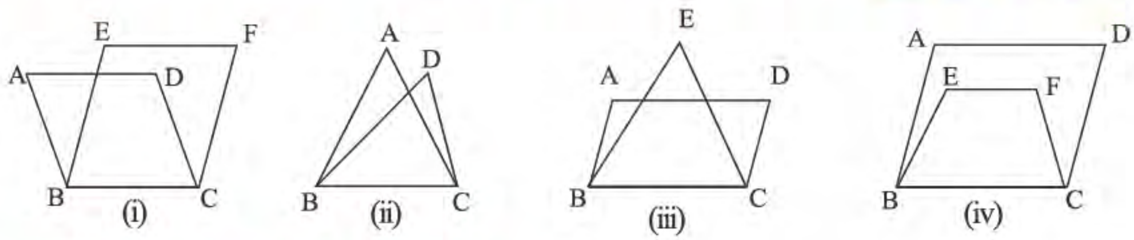
अतः हमने किसी समतलीय क्षेत्र के क्षेत्रफल के बारे में कौन-कौन से गुण पाया - लिखते हैं।

(i) A और B दो समतलीय क्षेत्रफल सर्वांगसम हो तो A का क्षेत्रफल = B का क्षेत्रफल होगा।

(ii) किसी समतलीय क्षेत्र को दो अलग-अलग खण्डों A और B में बाँटा जाय (जबकि एक दूसरे की कोई जगह न लें)

तो सम्पूर्ण समतलीय क्षेत्र का क्षेत्रफल = A खण्ड का क्षेत्रफल + B खण्ड का क्षेत्रफल

कई प्रकार की मापों और आकारों की टाईल को क्षेत्रफल के बारे में जानकारी के लिए हमारे बड़े भैया ने अपनी पुस्तिका में अनेक बहु भुजाकार चित्र बनाए। वे हैं—



आइए भैया द्वारा बनाए गए चित्रों में समानता ढूढें।

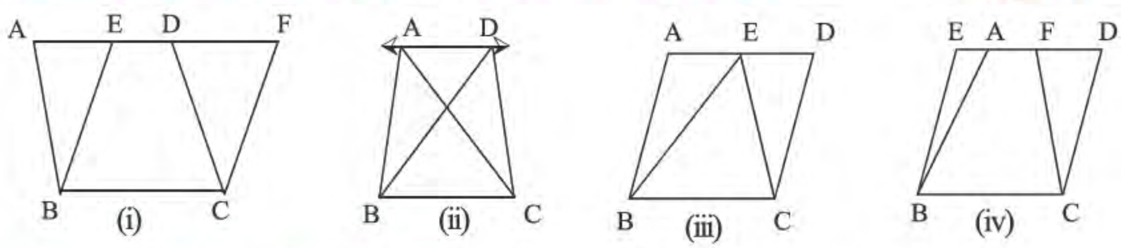
(i) न० चित्र में ABCD और EBCF दो समानान्तर चतुर्भुज है जिसका आधार BC एक ही है। किन्तु A, D, F और E एक ही सरल रेखा में नहीं है, अर्थात् एक रेखीय नहीं है।

फिर (ii) न० चित्र में, ΔABC और ΔDBC के एक ही आधार ☐ है।

(iii) न० चित्र में, ☐ और ☐ एक ही आधार ☐ पर है किन्तु A, E, D समरेखीय नहीं है।

(iv) न० चित्र में समानान्तर चतुर्भुज ABCD और टैपिजियम EBCF एक ही आधार ☐ पर लें किन्तु E, F, D, A एक रेखीय नहीं हैं।

भैया के द्वारा बनाए गए चित्रों को मैं दूसरी तरह बनाता या अंकित करता हूँ।



बहन द्वारा बनाये गये (i) न० चित्र में देखते हैं।

ABCD और EBCF दो समानान्तर चतुर्भुज एक BC, पर है, किन्तु उभयनिष्ट आधार से ऊपर की ओर शीर्ष बिन्दुएं A, D, E और F, हैं और AF सरल रेखा में स्थित है और AF ॥ BC है।

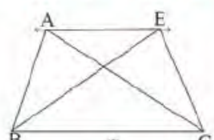
अर्थात्, कह सकते है कि ABCD और EBCD दो समानान्तर **चतुर्भुज एक ही आधार BC पर एवं समानान्तर रेखाद्वय BC और AF के बीच स्थित हैं।**

शेष चित्रों को देखें और सारणी में लिखें—

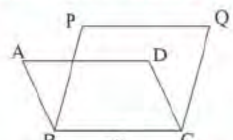
चित्र	समतलीय चित्र	उभयनिष्ठ आधार	उभयनिष्ठ आधार से ऊपर की ओर शीर्ष बिन्दु वे कैसी सरल रेखा में स्थित है और उस रेखा का आधार से क्या सम्बंध है।	निष्कर्ष
(ii) न०	Δ ABC और Δ DBC	BC	BC के ऊपर की ओर के शीर्षबिन्दु A और D हैं एवं AD ।। BC	Δ ABC और Δ DBC एक ही आधार BC पर और समानान्तर रेखा द्वारा BC और AD के बीच स्थित है।
(ii) न०			BC के ऊपर की ओर शीर्ष बिन्दुएं A, E और D हैं जो एक ही सरल रेखा AD में स्थित हैं और AD ।। BC	स्वयं लिखें
(ii) न०	स्वयं लिखें	स्वयं लिखें	स्वयं लिखें	स्वयं लिखें

पाते हैं, दो समतलीय चित्र एक ही आधार पर और समानान्तर सरल रेखा द्वय के बीच स्थित कहे जायेएं जबकि उनका एक उभयनिष्ठ आधार हो और आधार के ऊपर की ओर शीर्ष बिन्दु स्थित हों और एक ही सरल रेखा में स्थित हो जो आधार के समानान्तर हो।

हमारी मित्र रिया ने हमारे चित्रों को देखकर अपनी पुस्तिका में उसने भी कई चित्र बना डालें।



(i)



(ii)

हम रिया द्वारा बनाए गए चित्रों को देखते हैं और कौन समतलीय चित्र एक ही आधार पर और समानान्तर सरल रेखा द्वारा के बीच स्थित है — लिखते हैं।

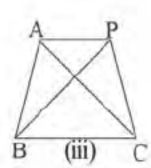
देखते हैं (i) न० चित्र में, Δ ABC और Δ EBC एक ही आधार BC पर और समानान्तर सरल रेखा द्वारा **BC और AE** के बीच स्थित हैं।

किन्तु (ii) न० चित्र में समानान्तर चतुर्भुज ABCD और समानान्तर चतुर्भुज PBCQ एक ही आधार BC पर स्थित है किन्तु समानान्तर सरल रेखा द्वय के बीच नहीं हैं।

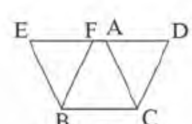
2 निम्न समतलीय चित्रों में से कौन कौन समतलीय दो चित्र एक ही आधार और समानान्तर सरल रेखा द्वय के बीच स्थित हैं — लिखें, और स्थिति में आधार और समानान्तर सरल रेखाओं के नाम लिखें।

(i)

(ii)



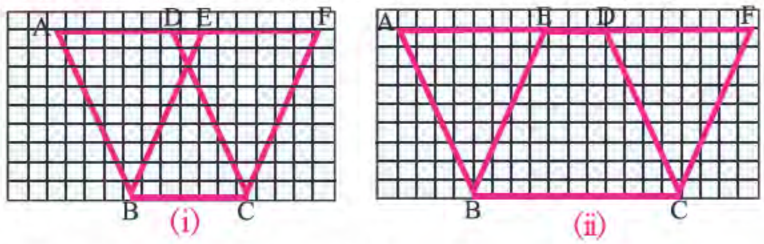
(iii)



(iv)

स्वप्रयास से

भैया ने वर्गांकित कागज पर एक ही आधार पर और समानान्तर देखा द्वय के बीच स्थित समानान्तर चतुर्भुज बनाया।



(i) न० चित्र के समानान्तर चतुर्भुज के आधार के दो क्षेत्रों के क्षेत्रफल वर्गांकित कागज पर घरों की संख्या गिनकर ज्ञात करें और तुलना करें।

वर्गांकित कागज पर घर गिनकर पाते हैं,

समानान्तर चतुर्भुज के आकार के ABCD का क्षेत्रफल = ☐ वर्ग इकाई (लगभग)

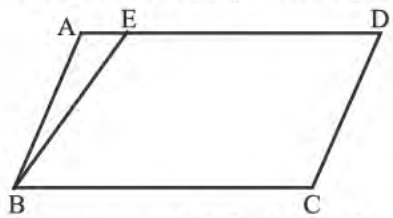
समानान्तर चतुर्भुज के आकार के EBCF का क्षेत्रफल = ☐ वर्ग इकाई (लगभग)

∴ वर्गांकित कागज पर घर गिनकर पाया कि (i) न० चित्र के दो समानान्तर चित्रों का क्षेत्रफल समान है। इसी प्रकार (ii) न० के चित्र में वर्गांकित कागज पर घरों को गिनकर समानान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ☐ इकाई पाया। (स्वयं करें)

स्वप्रयास से पाया कि, एक ही आधार पर और समानान्तर रेखाद्वय के बीच स्थित समानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल समान होते हैं।

स्वप्रयास से मैंने और रिया ने दूसरे ढंग से स्वप्रयास द्वारा इसे जाँचा।

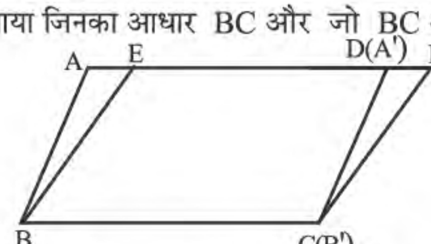
(i) हमने एक मोटे आर्ट पेपर पर समानान्तर चतुर्भुज ABCD का अंकन किया। और एक सरल रेखा BE खींचा।



(ii) अब ट्रेसिंग पेपर की सहायता से ΔABE के सर्वांगसम एक त्रिभुजाकार क्षेत्र ΔA'B'E' अंकित करके काट लिया।

(iii) अब A'B'E' त्रिभुजाकार क्षेत्र को ABCD समानान्तर चतुर्भुज के साथ बगल में दिये गये चित्र की भाँति इस तरह से सटाया जिससे कि DC के साथ A'B' संपाती हो जाए।

देखते हैं, दो समानान्तर चतुर्भुज ABCD और EBCE' पाया जिनका आधार BC और जो BC और AE' समानान्तर रेखा द्वय के बीच स्थित हैं।



स्वप्रयास से इनका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

ΔABE ≅ ΔA'B'E'

∴ ΔABE = ΔA'B'E'

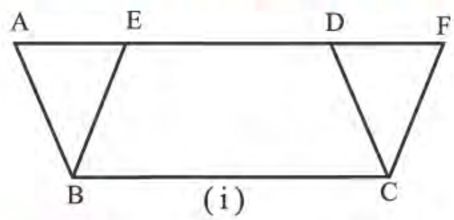
∴ समानान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔABE का क्षेत्रफल + ☐ EBCD का क्षेत्रफल

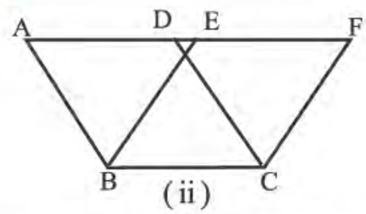
= Δ A'B'E' का क्षेत्रफल + ☐ EBCD का क्षेत्रफल

= EBCE' समानान्तर ☐ का क्षेत्रफल

∴ स्वप्रयास से कागज काटकर पाया कि एक ही आधार पर और समानान्तर रेखा द्वय के बीच स्थित समानान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल समान होता है।

प्रमेय 23 तर्क सहित प्रमाणित करे कि 'जितने समानान्तर चतुर्भुज एक ही आधार पर और समानान्तर रेखा द्वय के मध्य स्थित है, उनके क्षेत्रफल समान होते हैं।





दिया गया है: कि समानान्तर चतुर्भुज ABCD और समानान्तर चतुर्भुज EBCF एक ही आधार BC पर और समानान्तर रेखा द्वय BC और AF के बीच स्थित हैं।

प्रमाणित करना है कि : समानान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = समानान्तर चतुर्भुज EBCF का क्षेत्रफल

प्रमाण : समानान्तर चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel DC$ और AF इनसे मिलती है।

$\angle BAE =$ संगत $\angle CDF$..............(i)

फिर समानान्तर चतुर्भुज EBCF में $EB \parallel FC$ और AF इनसे मिलती है

$\angle AEB =$ संगत $\angle DFC$ ....(ii)

Δ ABE और Δ DCF में

$\angle BAE = \angle CDF$ [(i) से]

$AB = DC$ [$\because$ ABCD समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजाएं हैं]

$\angle AEB = \angle DFC$ [(ii) से]

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DCF$ (A-S-A के शर्तानुसार)

$\therefore \Delta ABE = \Delta DCF$

चतुर्भुजाकार क्षेत्र ABCF – ABE चतुर्भुजाकार क्षेत्र ABCF – DCF

समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र EBCF = समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र ABCD (प्रमाणित)

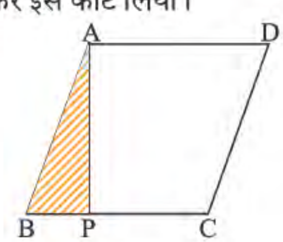
3 संजल ने समानान्तर चतुर्भुज PQRS और MQRN अंकित किया है जिनकी आधार भुजा QR और ये समानान्तर रेखा द्वय PN और QR के मध्य स्थित हैं। अब हमें तर्क देते हुये प्रमाणित करें कि समानान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल = MQRN समानान्तर चतुर्भुज का आकार।

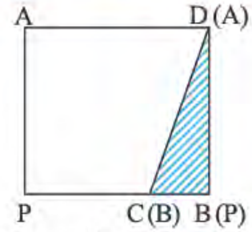
रिया ने एक आर्ट पेपर पर ABCD समानान्तर चतुर्भुज का अंकन कर इसे काट लिया।

किन्तु मेरे भाई ने कागज मोड़ दिया।

ABCD समानान्तर चतुर्भुज आकार के क्षेत्र के A बिन्दु एवं BC पर AP लम्ब डाला।

जो BC पर P बिन्दु पर मिलता है।





मैंने ABP त्रिभुजाकार क्षेत्र काट लिया
और दिये गये चित्र की तरह इस तरह सटा दिया कि
DC भुजा के साथ AB भुजा संपाती हो जाए।
APBD आयत क्षेत्र पाया।

देखते हैं समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र ABCD का क्षेत्रफल = आयत क्षेत्र APBD का क्षेत्रफल
= लम्बाई × चौड़ाई
= AB × AP
= BC × AP = आधार × AP

BC, समानान्तर चतुर्भुज क्षेत्र ABCD का आधार है। किन्तु AP के समानान्तर चतुर्भुज को क्या कहेंगें ?

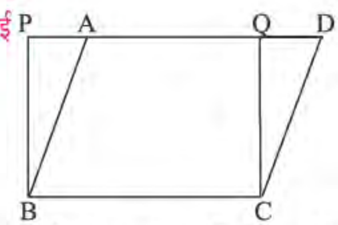
AP, समानान्तर चतुर्भुज ABCD की ऊँचाई है।

समझा है, समानान्तर चतुर्भुज की एक भुजा को आधार मानकर विपरीत भुजा के किसी बिन्दु से आधार पर अंकित लम्ब की लम्बाई ही समानान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई है।

पाते हैं, ABCD समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

मैंने दूसरा एक समानान्तर चतुर्भुज बनाया और इसी प्रकार मोड़कर और काटकर स्वप्रयास से प्रमाणित किया कि समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

उपसिद्धान्त : (1) तर्क सहित प्रमाणित चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई



दिया गया है: माना कि, ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है

प्रमाणित करना : कि ABCD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल
= आधार × ऊँचाई

अंकन : BC को आधार मान कर और BC तथा AD समानान्तर रेखाद्वय के बीच आयताकार चित्र PBCQ अंकित किया जो DA को और DA के बढ़े हुये भाग को क्रमश: Q और P बिन्दुओं पर काटती है।

प्रमाण : समानान्तर चतुर्भुज ABCD और आयत क्षेत्र PBCQ एक ही आधार BC पर और समानान्तर रेखा द्वय BC और PD के बीच स्थित हैं।

समानान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = आयत PBCQ का क्षेत्रफल
= लम्बाई × चौड़ाई
= BC × PB
= आधार × ऊँचाई

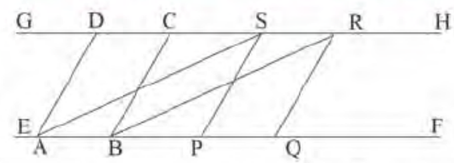
[PB, BC आधार के सापेक्ष समानान्तर चतुर्भुज ABCD की ऊँचाई है]

∴ समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

प्रयोग : 1 जिस समानान्तर चतुर्भुज क्षेत्र का आधार 10 सें०मी० किन्तु ऊँचाई 6 सें०मी० हो तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

प्रयोग : 2 समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्रों का क्षेत्रफल 10 सें०मी० × 6 सें०मी० ☐ वर्गा सें०मी०। यदि समानान्तर चतुर्भुज का आधार 15 सें०मी० और ऊँचाई 8.2 सें०मी० हो तो समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें। (स्वयं करें)

उपसिद्धान्त : 2 राशिद ने एक जोड़ी समानान्तर रेखा खण्डों के बीच कई समानान्तर चतुर्भुज ऐसे बनाए हैं जिसका आधार की लम्बाई समान-समान है। तर्क सहित प्रमाणित करें कि सभी समानान्तर चतुर्भुज क्षेत्रफल में समान हैं।



दिया गया है: समानान्तर चतुर्भुज ABCD और PQRS समान आधार AB और PQ पर और समानान्तर रेखाद्वय EF और GH के बीच स्थित है।

प्रमाणित करना है : ABCD समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = PQRS समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

अंकन : A,S और B,R को मिलाया।

प्रमाण : ABRS चतुर्भुज में AB=SR ($\because$ PQ = SR और AB = PQ)

और AB || SR ($\because$ EF || GH)

$\therefore$ ABRS एक समानान्तर चतुर्भुज है।

ABCD और ABRS समानान्तर चतुर्भुज दोनों एक ही आधार AB पर और समानान्तर रेखाद्वय AB और DR के बीच स्थित है।

$\therefore$ ABCD समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= ABRS समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

फिर PQRS और ABRS दो समानान्तर चतुर्भुज एक ही आधार SR पर और समानान्तर रेखा द्वय SR और AQ के बीच स्थित हैं।

$\therefore$ PQRS समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= ABRS समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

अत: ABCD समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= PQRS समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

प्रयोग : 3 पृथा ने AB रेखा खण्ड के विपरीत और ABCD और ABEF दो समानान्तर चतुर्भुज इस प्रकार बनाए है कि D, A और F बिन्दु एक रेखीय नहीं है। तर्क सहित प्रमाणित करें कि DCEF एक समानान्तर चतुर्भुज है और ABCD समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल + ABEF समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = DCEF समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल है।

दिया गया है : ABCD और ABEF समानान्तर चतुर्भुज AB पर और इसके विपरीत ओर स्थित है।

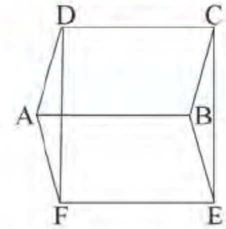
प्रमाणित करना है : (i) DCEF एक समानान्तर चतुर्भुज है।

(ii) ABCD समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल + ABEF समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = DCEF समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

प्रमाण : समानान्तर चतुर्भुज ABCD को AB और DC भुजायें विपरीत भुजाए हैं।

$\therefore$ AB || DC और AB = DC ....(i)

फिर ABEF समानान्तर चतुर्भुज की AB और FE विपरीत भुजाए हैं



$\therefore$ AB || FE और AB = FE ....(ii)

$\therefore$ (i) और (ii) से पाते हैं DC || FE और DC = FE

$\therefore$ DCEF एक समानान्तर चतुर्भुज है।

अत: DF = CE

Δ ADF और Δ BCE में, AD = BC, AF = BE और DF = CE

अत: Δ ADF $\cong$ ΔBCE (S-S-S सर्वांसमता की शर्त से) $\therefore$ Δ ADF = Δ BCE

DAFEC बहुभुज का क्षेत्रफल – Δ BCE

= DAFEC बहुभुज का क्षेत्रफल – ΔADF

$\therefore$ ABCD समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल + ABEF समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= DCEF समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल। (प्रमाणित)

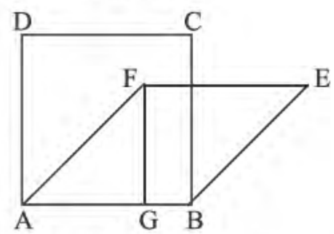
प्रयोग : 4 तर्क सहित प्रमाणित करें कि ABCD वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल ABEF रोम्बस के क्षेत्रफल से अधिक है।

दिया गया है : ABCD वर्ग क्षेत्र और ABEF रोम्बस क्षेत्र का आधार = AB है।

प्रमाणित करना है : ABCD वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल > ABEF रोम्बस क्षेत्र का क्षेत्रफल।

अंकन : बिन्दु F से AB पर FG लम्ब खींचा। FG रोम्बस ABEF की ऊँचाईं है।

प्रमाण : वर्ग क्षेत्र ABCD का क्षेत्रफल = AB.AB और ABEF रोम्बस का क्षेत्रफल = AB.FG



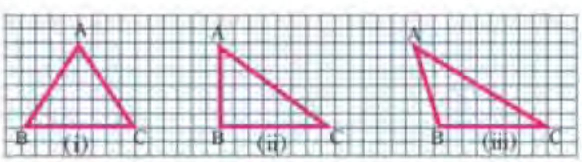
Δ FGA में $\angle$FGA = 1 समकोण

$\therefore$ कर्ण AF > FG और AF = AB ($\because$ रोम्बस की भुजायें हैं)

अत: AB > FG

$\therefore$ AB. AB > AB.FG

$\therefore$ ABCD वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल > ABEF रोम्बस का क्षेत्रफल



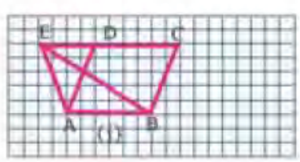
हमलोग जब विभिन्न प्रकार के समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्रों के बीच क्या सम्बन्ध हैं। कभी स्वप्रयास से, कभी लेखाचित्र की सहायता से कभी तर्क देकर प्रमाणित कर रहे थे तब मेरे भैया और मेरे मित्र तिथि ने वर्गांकित कागज पर अनेक त्रिभुज बनाये थे। उन्होंने बनाया था

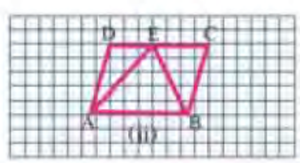
हम ग्राफ पेपर पर घरों को गिनकर स्वप्रयास से त्रिभुजों का क्षेत्रफल मापें।

ग्राफ पेपर पर घर गिनकर देखते हैं (i) न० त्रिभुज का क्षेत्रफल = 21 वर्ग इकाई (लगभग)

ग्राफ पेपर पर घर गिनकर (ii) न० और (iii) न० त्रिभुजों के क्षेत्रफल क्रम से ☐ और ☐ पाया। (स्वयं लिखें)

यदि एक ही आधार पर और समानान्तर रेखा द्वय के बीच एक त्रिभुज और एक त्रिभुज और एक समानान्तर चतुर्भुज स्थित हो तो उनके क्षेत्रफल में कोई संबंध होता है या नहीं ? वर्गांकित कागज पर जाँचें।





वर्गांकित कागज पर घरों को गिनकर पाते हैं

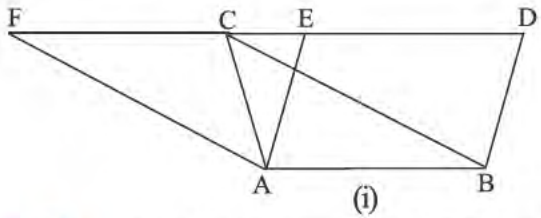
(i) न० चित्र के त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = 15 वर्ग इकाई (लगभग)

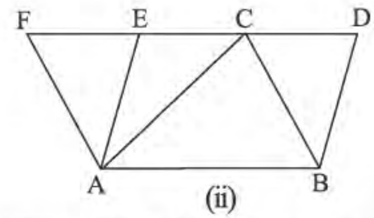
(ii) न० चित्र के समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = 33 वर्ग इकाई (लगभग)

वर्गांकित कागज पर (ii) न० चित्र के त्रिभुज का क्षेत्रफल पाते हैं ☐ वर्ग इकाई समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ☐ वर्ग इकाई ।

पाया कि, एक ही आधार पर और समानान्तर सरल रेखाद्वय के बीच स्थित त्रिभुज का क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र के क्षेत्र के क्षेत्रफल का आधा होता है। (स्वयं करें)

प्रमेय : **24** तर्क सहित प्रमाणित करें कि ' त्रिभुज और समानान्तर चतुर्भुज एक ही आधार पर और समानान्तर रेखा द्वय के बीच स्थित हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।





दिया गया है : ΔABC और समानान्तर चतुर्भुज ABDE एक ही आधार AB पर और समानान्तर रेखा द्वय AB और CD के बीच (i) न० चित्र में) या AB और ED के बीच (ii) न० चित्र में स्थित हैं।

प्रमाणित करना है कि $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज ABDE का क्षेत्रफल

अंकन : A बिन्दु से BC के समानान्तर सरल रेखा खींचा जो DC के बढ़े हुये भाग से बिन्दु DE के F पर मिलती है।

प्रमाण : ∴ ABCF चतुर्भुज में

AB ∥ FC (दिया गया है)

AF ∥ BC (अंकानुसार)

∴ ABCF एक समानान्तर चतुर्भुज है।

समानान्तर चतुर्भुज ABCF और समानान्तर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार AB पर और समानान्तर रेखाद्वय AB और FD के बीच स्थित है।

∴ ABCD समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ABCF समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

फिर, समानान्तर चतुर्भुज का विकर्ण AC है।

$\Delta ABC = \frac{1}{2}$ समानान्तर ☐ABCF

$= \frac{1}{2}$ समानान्तर ☐ ABDE

∴ ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

= ABDE समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र के क्षेत्रफल का आधा।

B बिन्दु से AC समानान्तर सरल रेखा खींचकर प्रमेय को स्वयं प्रमाणित करें।

स्वयं करें– 12.1

1. एक त्रिभुज और एक आयत एक ही आधार पर और समानान्तर सरल रेखा द्वय के बीच स्थित हो तो तर्क सहित प्रमाणित करें कि त्रिभुज का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल का आधा होगा।
2. कोई त्रिभुज और कोई समानान्तर चतुर्भुज समान-समान आधारों पर और एक जोड़ी समानान्तर सरल रेखाओं के मध्य स्थित हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होगा।

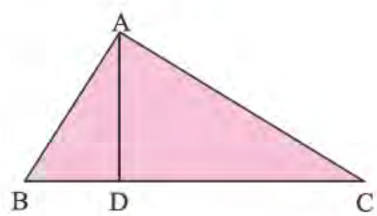
किन्तु ग्राफ पेपर की सहायता लिए बिना हम इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे ?

किन्तु ग्राफ पेपर सारे छोटे बड़े रंगीन त्रिभुजाकार पिचबोर्ड काटकर मॉडल बनाए हैं।

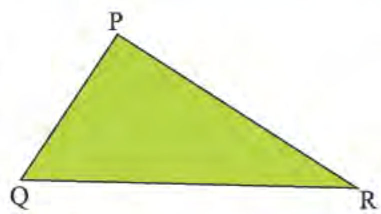
हम रिया द्वारा बनाए गए त्रिभुजों का क्षेत्रफल ग्राप पेपर के बिना ज्ञात करने का प्रयास करते हैं।

स्वप्रयास से

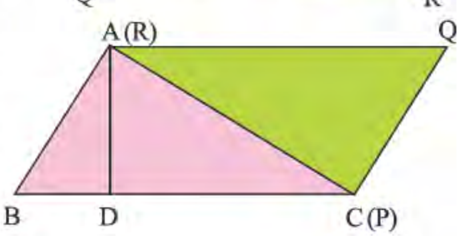
1. पहले कागज को मोड़कर (i) न० ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र के आधार BC पर A बिन्दु से लम्ब AD खींचा जो BC से बिन्दु D पर मिलता है। अर्थात् त्रिभुजाकार क्षेत्र ABC की ऊँचाई AD लिया। A पहले कागज मोड़कर BC भुजा को मोड़ा ताकि B बिन्दु BC पर पड़े। मोड़ को सीधा करके BC पर मोड़ के चिन्ह पर पेंसिल से दाग लगाकर लम्ब पाया।



2. ट्रेसिंग पेपर की सहायता से ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र के बराबर हरे रंग का एक और त्रिभुजाकार क्षेत्र PQR बनाया और काटकर रख लिया।



3. अब दिए हुए चित्र की तरह ΔABC और ΔPQR को एक साथ एक बड़े पिचबोंड पर लगा दिया ताकि ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र की AC भुजा और PQR त्रिभुजाकार क्षेत्र की PR भुजा एक दूसरे पर संपाती हों और Q बिन्दु और B बिन्दु AC के विपरीत ओर पड़ें।



पाते हैं ABCQ एक समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र मिलता है।

$\therefore$ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ ABCQ समानान्त चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

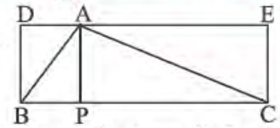
$= \frac{1}{2}$ BC $\times$ AD

$= \frac{1}{2}$ AC आधार $\times$ ऊँचाई

$\therefore$ स्वप्रयास से हम पातें हैं ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

मैंने दूसरा त्रिभुज बनाकर और काटकर इसी प्रकार स्वप्रयास से जाँच करके पाया कि ABC ग्राप पेपर त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × ऊँचाईं (स्वयं करें)

उपसिद्धान्त : 3 तर्क सहित प्रमाणित करें कि किसी त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × ऊँचाईं



प्रदत्त : माना कि ABC एक त्रिभुज है जिसका आधार BC और $AP \perp BC$.

प्रमाणित करना है : $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AP$

अंकन : BC को आधार मान कर एक आयत क्षेत्र DBCE निर्मित किया जिससे कि D, A और E एक रेखीय हैं।

प्रमाण : ΔABC और आयत क्षेत्र DBCE एक ही आधार BC पर और समानान्तर रेखाद्वय BC और DE को के बीच स्थित हैं।

$\therefore$ $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ आयत क्षेत्र DBCE $= \frac{1}{2} \times BC \times DB = \frac{1}{2} \times BC \times AP$ [∵ APBD एक समानान्तर □ है।
]

प्रयोग : 5 रिया द्वारा बनाए गए नीले रंग के त्रिभज की भूमि की लम्बाई 7 से०मी० लेकिन उच्चता 6 से० मी० त्रिभुज का क्षेत्रफल हिसाब करके लिखें।

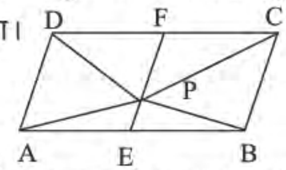
त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 7$ **से०मी०** $\times 6$ **से०मी०** $= 21$ **वर्ग से०मी०**

प्रयोग : 6 ABCD समानान्तर चतुर्भुज के अन्दर कोई बिन्दु P स्थित है। प्रमाणित करें कि APD त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल + BPC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ समानान्तर चतुर्भुज ABCD क्षेत्र का क्षेत्रफल

प्रदत्त : ABCD समानान्तर चतुर्भुज के अन्दर P कोई बिन्दु है।

प्रमाणित करना है : APD त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल + BPC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ ABCD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

अंकन : बिन्दु P से AD के समानान्तर एक सरल रेखा खींचा जो AB भुजा से बिन्दु E पर और DC भुजा से बिन्दु F पर मिलती है। P-A, P-B, P-C और P-D को मिलाया।



प्रमाण : AEFD चतुर्भुज में AD || EF और AE || DF ;
अत: AEFD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

ΔAPD और समानान्तर चतुर्भुज AEFD एक ही आधार AD पर और समानान्तर रेखाद्वय AD और EF के बीच स्थित है।

अत: APD त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ AEFD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल।

ΔBPC और समानान्तर चतुर्भुज BEFC एक ही आधार BC पर और समानान्तर रेखाद्वय BC और EF के बीच स्थित है।

अत: BPC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ BEFC समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल।

APD त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल + BPC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

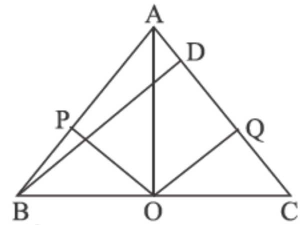
$= \frac{1}{2}$ (AEFD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल। + BEFC समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल।

$= \frac{1}{2} \times$ ABCD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल।

प्रयोग : 7 समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC ; BC भुजा पर O कोई बिन्दु है। O बिन्दु से AB और AC भुजाओं की लम्बवत् दुरियां OP और OQ; है, B बिन्दु से AC भुजा की लम्बवत् दूरी BD; है, प्रमाणित करें कि OP + OQ = BD

प्रदत्त : ABC त्रिभुज है BC भुजा पर O कोई बिन्दु है और AB = AC ; O बिन्दु से OP और OQ क्रमशः AB और AC पर लम्ब है। B बिन्दु से AC पर BD लम्ब है।

प्रमाणित करना है : OP + OQ = BD.



अंकन : A, O मिलाया।

प्रमाण : AOB त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$AB .OP

AOC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ AC. OQ

AOB त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल + AOC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}AB.OP + \frac{1}{2}AC.\ OQ$

ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}AC.\ OP + \frac{1}{2}AC.\ OQ\ [\because AB = AC]$

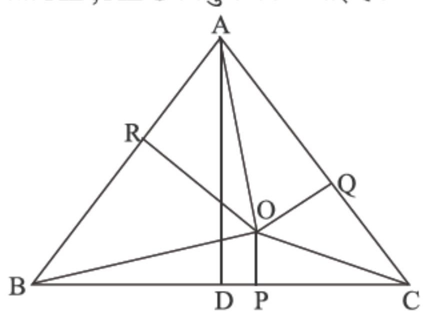
$\frac{1}{2}AC.\ BD = \frac{1}{2}AC.\ (OP + OQ)$

OP + OQ = BD (प्रमाणित हुआ)

प्रयोग : 8 ABC समबाहु त्रिभुज के अन्दर कोई बिन्दु O स्थित है। O बिन्दु से BC, AC और AB भुजाओं पर क्रमशः OP, OQ और OR; लम्ब है। प्रमाणित करें कि त्रिभुज की ऊँचाई = OP + OQ + OR.

प्रदत्त : ABC त्रिभुज के अन्दर O कोई बिन्दु है। O बिन्दु से OP, OQ और OR क्रमशः BC, CA और AB भुजाओं पर लम्ब हैं। बिन्दु A से AD, BC पर लम्ब है। अतः AD, ABC त्रिभुज की ऊँचाई है।

प्रमाणित करना है : OP + OQ + OR = AD



अंकन : O, A ; O, B और O, C को मिलाया।

प्रमाण : BOC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ BC. OP

COA त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ CA. OQ

AOB त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ AB. OR

BOC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल + Δ COA त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल +

AOB त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}BC.\ OP + \frac{1}{2}CA.\ OQ + \frac{1}{2}AB.OQ$

ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}BC.\ OP + \frac{1}{2}BC.OQ + \frac{1}{2}BC.OR$

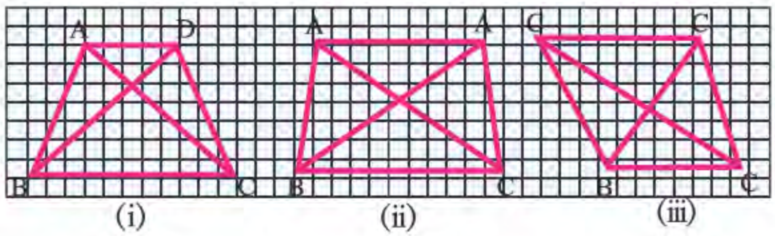
(... BC = CA = AB)

$$\frac{1}{2}BC.\ AD = \frac{1}{2}BC\ (OP+OQ + OR)$$

$\therefore$ OP + OQ + OR = AD

समबाहु त्रिभुज की तीनों ऊँचाई समान होती हैं। ∴ त्रिभुज की ऊँचाई = OP + OQ + OR

हमने वर्गांकित कागज पर एक ही आधार पर और समानान्तर रेखा द्वय के बीच दो त्रिभुज अंकित किया है। वर्गांकित कागज पर घरों को गिनकर इन त्रिभुजों के क्षेत्रफल स्वप्रयास से ज्ञात करें और इनके मध्य सम्बन्ध जानने की चेष्टा करें।



वर्गांकित कागज पर (i) न० चित्र में ABC त्रिभुजाकार क्षेत्रों के क्षेत्रफल = 36 वर्ग इकाई (लगभग)

फिर, DBC त्रिभुजाकार क्षेत्रों के क्षेत्रफल = 36 वर्ग इकाई (लगभग)

$\therefore$ स्वप्रयास से पाते हैं, $\Delta ABC = \Delta DBC$

(ii) न० और (iii) न० चित्र के त्रिभुजाकार क्षेत्रों के क्षेत्रफल स्वप्रयास से वर्गांकित कागज पर घरों को गिन कर देखते हैं कि $\Delta ABC = \Delta DBC$ [स्वयं करें]

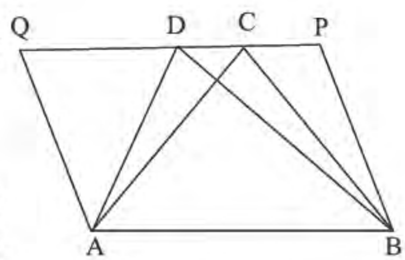
$\therefore$ स्वप्रयास से पाते हैं कि एक-एक ही आधार पर और समानान्तर रेखा द्वय के बीच स्थित दो त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होता है।

प्रेमय : **25** तर्क सहित प्रमाणित करें कि 'एक ही आधार पर और एक जोड़ी समानान्तर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुजाकार क्षेत्रों के क्षेत्रफल समान होते हैं।

प्रदत्त : ΔABC और ΔABD एक ही आधार AB पर और एक जोड़ी समानान्तर रेखाओं AB और DC के मध्य स्थित हैं।

प्रमाणित करना है कि $\Delta ABC = \Delta ABD$

अंकन : AB आधार पर और AB और DC रेखाद्वय के बीच समानान्तर चतुर्भुज ABPQ अंकित किया



प्रमाण : ΔABC और समानान्तर चतुर्भुज ABPQ एक ही आधार AB पर और एक जोड़ी समानान्तर रेखाओं AB और PQ के बीच स्थित है।

$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज ABPQ

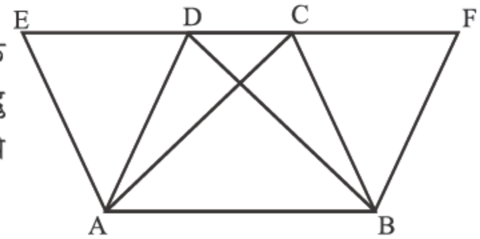
इसी प्रकार, $\Delta ABD = \frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज ABPQ

$\therefore \Delta ABC = \Delta ABD$ [प्रमाणित]

अब इसे दूसरे प्रकार से प्रमाणित करें

प्रदत्त : ΔABC और ΔABD एक ही आधार AB पर और समानान्तर रेखाद्वय AB और CD के मध्य स्थित हैं।

प्रमाणित करना है कि : $\Delta ABC = \Delta ABD$



अंकन : A बिन्दु से BC के समानान्तर रेखा खींचा जो CD के बढ़े हुये भाग से E बिन्दु पर मिलती है। फिर B बिन्दु से AD के समानान्तर रेखा खींचा जो DC के बढ़े हुये भाग से बिन्दु F पर मिलती है।

प्रमाण : चतुर्भुज ABCE में AB || CE [$\because$ AB || CD] और AE || BC [रचनानुसार]

$\therefore$ ABCE एक समानान्तर चतुर्भुज है।

इसी प्रकार ABFD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

फिर समानान्तर चतुर्भुज ABCE और समानान्तर चतुर्भुज ABFD एक ही आधार AB पर और समानान्तर रेखाद्वय AB और EF के बीच स्थित है।

$\therefore$ समानान्तर चतुर्भुजाकार ABCE का क्षेत्रफल = समानान्तर चतुर्भुजाकार ABFD का क्षेत्रफल

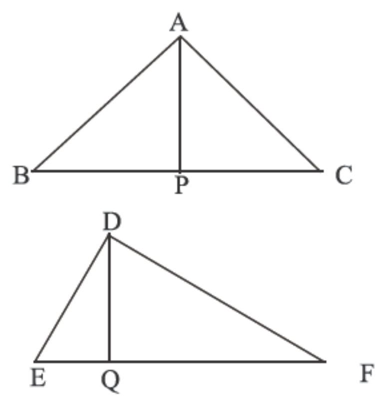
फिर, समानान्तर चतुर्भुज ABCE का एक विकर्ण AC है।

$\therefore$ $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज ABCE

इसी प्रकार $\Delta ABD = \frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज ABFD

$\therefore$ $\Delta ABC = \Delta ABD$ [$\because$ समानान्तर चतुर्भुज ABCE = समानान्तर चतुर्भुज ABFD] [प्रमाणित]

उपसिद्धान्त : 4 प्रमाणित करें कि समान समान लम्बाई के आधार पर स्थित और समान ऊँचाई वाले त्रिभुजाकार क्षेत्रों के क्षेत्रफल समान होते हैं।



प्रदत्त : ΔABC और ΔDEF के आधार BC और EF समान है अर्थात् BC = EF: है; AP, BC भुजा पर लम्ब है, और DQ, EF भुजा पर लम्ब है। अर्थात् AP और DQ क्रमश: ΔABC और ΔDEF के BC और EF आधार के सापेक्ष ऊँचाइयाँ है और AP = DQ है।

प्रमाणित करना है कि : $\Delta ABC = \Delta DEF$

प्रमाण : ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} BC \,.\, AP$

DEF त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} EF \,.\, DQ$

$= \frac{1}{2} BC \,.\, AP$ ($\because$ EF = BC और AP = DQ)

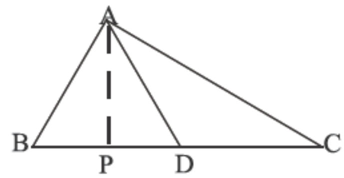
$\therefore \Delta ABC = \Delta DEF$

उपसिद्धान्त : 5 प्रमाणित करें कि किसी त्रिभुज को मध्यमा त्रिभुजाकार क्षेत्र को दो समान क्षेत्रफल विशिष्ट त्रिभुजाकार क्षेत्रो में बाँटती है।

प्रदत्त : ΔABC की मध्यमा AD है अर्थात् BD = DC

प्रमाणित करना है कि : ABD त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = ACD त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

अंकन : A बिन्दु से BC आधार पर AP लम्ब खींचा।



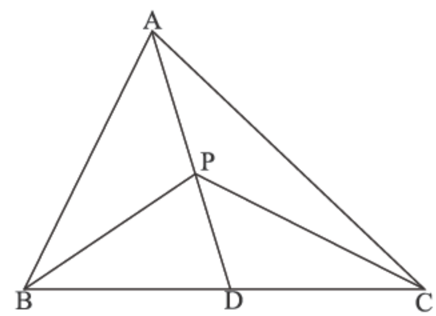
प्रमाण : ABD त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} BD.\ AP.$

ADC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} DC.\ AP.$

$= \frac{1}{2} BD\ .\ AP\ (\because BD = DC)$

$\therefore$ ABD त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = ADC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल [प्रमाणित]

प्रयोग : 9 ΔABC को मध्यमा AD पर P कोई बिन्दु हैं। प्रमाणित करें कि $\Delta ABP = \Delta ACP$



प्रदत्त : ΔABC की AD मध्यमा पर P कोई बिन्दु हैं।

प्रमाणित करना है कि : $\Delta ABP = \Delta ACP$

प्रमाण : ΔABC को AD मध्यमा हैं।

$\therefore \Delta ABD = \Delta ACD$ ——(i)

फिर, ΔBPC को मध्यमा PD हैं।

$\therefore \Delta BPD = \Delta CPD$ ——(ii)

(i)-(ii) से पाते हैं $\Delta ABD - \Delta BPD = \Delta ACD - \Delta CPD$ $\therefore \Delta ABP = \Delta ACP$ [प्रमाणित]

प्रयोग : 10 प्रमाणित करें कि किसी समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र के दोंनों विकर्ण समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र को चार समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजाकार क्षेत्रों में बाँटते हैं।

प्रदत्त : ABCD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र के AC और BD दो विकर्ण एक दूसरे को बिन्दु पर काटते हैं।

प्रमाणित करना है कि : $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD = \Delta AOD$

प्रमाण : ABCD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र के AC और BD दो विकर्ण एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते है।

$\therefore$ AO = OC और BO = OD [$\because$ समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे की समद्विभाजित करते है]

ΔABC को BO मध्यमा हैं,

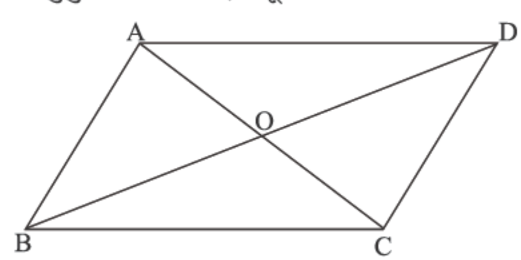
$\therefore \Delta AOB = \Delta BOC$ ——(i)

ΔBCD को CO मध्यमा हैं,

$\therefore \Delta BOC = \Delta COD$ ——(ii)

ΔACD को DO मध्यमा हैं,

$\therefore \Delta COD = \Delta AOD$ ——(iii)



(i), (ii) और (iii) से पाते हैं, $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD = \Delta AOD$ [प्रमाणित]

प्रयोग : 11 ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र की AD मध्यमा का मध्य बिन्दु E हो तो प्रमाणित करें कि $\Delta BED = \frac{1}{4}\Delta ABC$ [स्वयं करें]

प्रयोग : 12 ABCD ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र में AB || DC और AC और BD दोनों विकर्ण एक दूसरे को O बिन्दु पर काटते हैं। प्रमाणित करें कि $\Delta AOD = \Delta BOC$

प्रदत्त : ABCD ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र में AB || DC और AC और BD विकर्ण एक दूसरे को O बिन्दु पर काटते हैं।

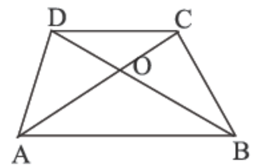
प्रमाणित करना है कि : $\Delta AOD = \Delta BOC$

प्रमाण : ΔADB और ΔACB एक ही आधार AB पर और समानान्तर रेखा द्वय AB और DC के मध्य स्थित हैं।

$\therefore \Delta ADB = \Delta ACB$

$\Delta ADB - \Delta AOB = \Delta ACD - \Delta AOB$

$\therefore \Delta AOD = \Delta BOC$ [प्रमाणित]



प्रयोग : 13 ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र को AB, BC और CA भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रम से D, E और F हैं; प्रमाणित करें कि $\Delta DEF = \frac{1}{4}\Delta ABC$

प्रदत्त : ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र की AB , BC और CA भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रम से D, E और F

प्रमाणित करना है कि : $\Delta DEF = \frac{1}{4}\Delta ABC$

प्रमाण : ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र की AB और AC भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रम से D और F;

$\therefore DF \parallel BC$ या $DF \parallel BE$

फिर ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र की AC और BC भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रम से F और E हैं।

$\therefore FE \parallel AB$ या $FE \parallel DB$

पाते हैं, BDEF चतुर्भुज में $DF \parallel BE$ और $BD \parallel EF$

$\therefore$ BDEF एक समानान्तर चतुर्भुज हैं और DE इसका विकर्ण हैं।

$\therefore \Delta DBE \cong \Delta DEF$

$\therefore \Delta DBE = \Delta DEF$ ....(i)

इसी प्रकार पाते हैं, $\Delta CEF = \Delta DEF$............ (ii)

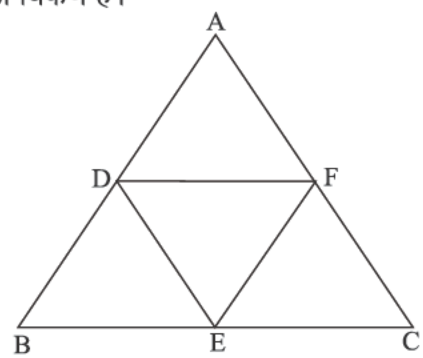
और $\Delta ADF = \Delta DEF$ .... (iii)

(i) (ii) और (iii) से पाते हैं।

$\Delta DEF = \Delta DBE = \Delta ADF = \Delta CEF$

$\therefore 4\Delta DEF = \Delta ABC$

$\therefore \Delta DEF = \frac{1}{4}\Delta ABC$ (प्रमाणित)



हमने तर्क सहित प्रमाणित किया और स्वप्रयास से पाया है कि एक ही आधार पर और समानान्तर रेखाद्वय के बीच स्थित त्रिभुजाकार क्षेत्रों के क्षेत्रफल समान होते हैं।

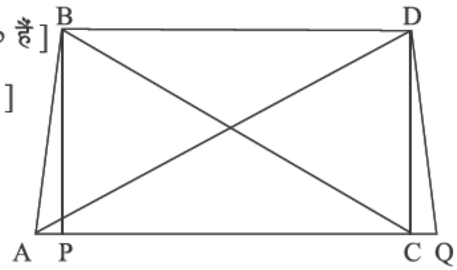
किन्तु यदि एक ही आधार पर समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजाकार क्षेत्र आधार के एक ही ओर स्थित हो तो क्या वे एक जोड़ी समानान्तर रेखाओं के बीच स्थित होगें अर्थात ☐ न० प्रमेय का विलोभ प्रमेय क्या संभव हैं ? तर्क सहित प्रमाणित करने की चेष्टा करें।

प्रमेय : **26** तर्कसहित प्रमाणित करे कि समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजाकार क्षेत्र एक ही आधार पर और उसके एक ही ओर स्थित हो तो वे एक जोड़ी समानान्तर रेखाओं के मध्य स्थित होंगे।

प्रदत्त : ABC और ADC त्रिभुजाकार क्षेत्र क्षेत्रफल में समान हैं और वे एक ही आधार AC पर तथा AC के एक ही और स्थित हैं। B, D को मिलाया।

प्रमाणित करना है कि : AC || BD

अंकन : B और D बिन्दुओं से AC पर BP और DQ दो लम्ब खीचा जो AC तथा ACके बढ़े हुये भाग से कम से P और Q बिन्दु पर मिलते हैं।



प्रमाण : $\Delta ABC = \frac{1}{2} AC.BP$ [AC आधार और BP ऊँ० हैं]

$\Delta ADC = \frac{1}{2} AC.\ DQ$ [AC आधार और DQ ऊँ० हैं]

$\because \Delta ABC = \Delta ADC$

$\therefore \frac{1}{2} AC.BP = \frac{1}{2} AC.\ DQ$

$\therefore BP = DQ$

फिर BP || DQ (एक ही सरल रेखा खण्ड पर लम्ब है)

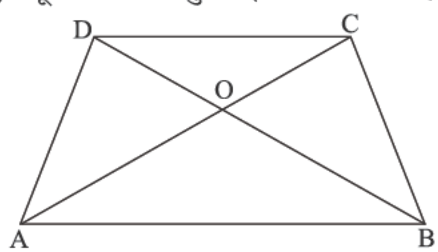
∴ BPQD एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।

अत: PQ || BD अर्थात् AC || BD (प्रमाणित)

प्रयोग : **14** ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र के दो विकर्ण AC और BD एक दूसरे को O बिन्दु पर इस प्रकार काटने है कि $\Delta AOD = \Delta BOC$ हैं; प्रमाणित करें कि ABCD एक ट्रेपिजियम आकार का क्षेत्र हैं।

प्रदत्त : ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र के AC और BD दो विकर्ण एक दूसरे को O बिन्दु पर इस प्रकार काटते हैं कि

$\Delta AOD = \Delta BOC$ हैं।



प्रमाणित करना है कि : ABCD एक ट्रेपिजियम आकार का क्षेत्र हैं।

प्रमाण : $\Delta AOD = \Delta BOC$

$\therefore \Delta AOB + \Delta AOD = \Delta AOB + \Delta BOC$

$\therefore \Delta ABD = \Delta ABC$

समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजाकार दो क्षेत्र ABD और ABC एक ही आधार AB पर और AB के एक ही ओर स्थित हैं।

∴ ABD और ABC त्रिभुजाकार दो क्षेत्र एक जोड़ी समानान्तर सरल रेखाओं के मध्य होगें अर्थात् AB || DC
ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र में AB || DC ; अत: ABCD एक ट्रेपिजियम आकार का क्षेत्र हैं।

प्रयोग : **15** ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र को AB और AC भुजाओं पर दो बिन्दु D और E इस प्रकार स्थित हैं कि $\Delta DBC = \Delta EBC$ हैं; प्रमाणित करें कि DE || BC [स्वयं करे]

प्रयोग : 16 प्रमाणित करें कि यदि एक चतुर्भुजाकार क्षेत्र का प्रत्येक विकर्ण चतुर्भुजाकार क्षेत्र को समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजाकार क्षेत्रो में विभाजित करें तो चतुर्भुजाकार क्षेत्र एक समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र होगा।

प्रदत्त : ABCD एक चतुर्भुजाकार क्षेत्र है। इसका प्रत्येक विकर्ण AC और BD चतुर्भुजाकार क्षेत्र को प्रति क्षेत्रे दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजाकार क्षेत्रों में विभाजित करता है।

प्रमाणित करना है कि : ABCD एक समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र हैं।

प्रमाण : $\Delta ABC = \Delta ACD = \frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज $ABCD = \Delta ABD = \Delta BCD$

$\therefore \Delta ABC = \Delta ABD$

ये एक ही आधार AB पर और AB के एक और स्थित हैं।

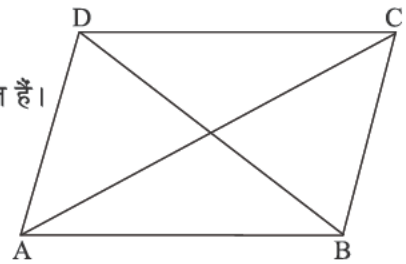
$\therefore AB \,||\, DC$

इसी प्रकार $\Delta ABC = \Delta DBC$

ये एक ही आधार BC पर और इसके एक ही ओर स्थित हैं।

$\therefore AD \,||\, BC$

$\therefore$ ABCD एक समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र हैं।



प्रयोग : 17 प्रमाणित करें कि एक ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र की तिर्यक भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड समानान्तर भुजाओं के समानान्तर है।

प्रदत्त : ABCD ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र में AD || BC; तिर्यक भुजाओं AB और DC के मध्यम बिन्दु क्रम से P और Q हैं; P और Q को मिलाया।

प्रमाणित करना है कि : PQ रेखा खण्ड AD और BC के समानान्तर हैं।

अंकन : AC, PC, BD और BQ को मिलाया।

प्रमाण : ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर और समानान्तर रेखाद्वय BC और AD के मध्य स्थित हैं।

$\therefore \Delta\, ABC = \Delta\, BDC$

फिर AB मध्य बिन्दु P हैं,

$\therefore \Delta\, BPC = \frac{1}{2} \Delta\, ABC$

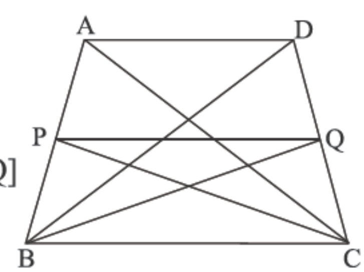
इसी प्रकार, $\Delta\, BQC = \frac{1}{2}\ \Delta\, BDC$ [DC का मध्य बिन्दु Q]

$\therefore \Delta\, BPC = \Delta\, BQC$

और ये BC पर एक ही ओर स्थित हैं।

$\therefore PQ \,||\, BC$

$\because AD \,||\, BC,\ \therefore$ PQ, BC और AD दोनों के समानान्तर हैं।



हल करें— 12

1. ABCD समानान्तर चतुर्भुज की AB और DC भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रम से P और Q है, प्रमाणित करें कि APCQ चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ ABCD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्रफल।
2. ABCD रोम्बस की AB और DC भुजाओं के बीच को दूरी PQ है और AD और BC भुजाओं के बीच की दूरी RS; है तो प्रमाणित करें कि PQ = RS
3. ABCD समानान्तर चतुर्भुज की AB और DC भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: P और Q; हैं। प्रमाणित करें कि PBQD एक समानान्तर चतुर्भुज है और Δ PBC $= \frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज PBQD है।
4. ABC समद्विबाहु त्रिभुज में AB = AC है और BC के बढ़े हुये भाग पर P एक बिन्दु है। P बिन्दु से AB और AC भुजाओं पर क्रमश: PQ और PR लम्ब है। B बिन्दु से AC भुजा पर लम्ब BS ; हैं। प्रमाणित करें कि PQ –PR = BS.
5. ABC समबाहु त्रिभुज के बाहर और ABC के...क्षेत्र के अन्दर O एक बिन्दु है। O बिन्दु से AB, BC और CA भुजाओं पर क्रमश: OP, OQ और OR; लम्ब हैं, प्रमाणित करें कि त्रिभुज की ऊँचाई = OP + OQ –OR .
6. ABCD समानान्तर चतुर्भुज की AB भुजा के समानान्तर सरल रेखा AD, AC और BC से या इनके बढ़े हुए भाग से क्रमश: E, F और G बिन्दु पर मिलती हैं। तो प्रमाणित करें कि Δ AEG = Δ AFD.
7. ABCD समानान्तर चतुर्भुज की DC भुजा पर E एक बिन्दु हैं। AE का बढ़ा हुआ भाग BC के बढ़े हुये भाग से F बिन्दु पर मिलता हैं। D, F को मिलाया गया। प्रमाणित करें कि (i)Δ ADF = Δ ABE. (ii)Δ DEF = Δ BEC
8. समान समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुज ABC और ABD एक ही आधार AB के विपरीत और स्थित हैं। प्रमाणित करें कि AB, CD को समाद्विभाजित करती हैं।
9. ABC त्रिभुज की BC भुजा का मध्य बिन्दु D हैं; CDEF समानान्तर चतुर्भुज BC भुजा और A बिन्दु से BC के समानान्तर सरल रेखा के मध्यस्थित है। प्रमाणित करें कि Δ ABC = समानान्तर CDEF.
10. ABCD समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण BD पर P कोई बिन्दु है। प्रमाणित करें कि Δ APD = ΔCPD.
11. ABC त्रिभुज की AD और BE मध्यमायें है। प्रमाणित करें कि Δ ACD = Δ BCE
12. ABC त्रिभुज की भुजा BC के समानान्तर खींची गयी रेखा AB और AC से क्रमश: P और Q बिन्दुओं पर मिलती हैं। CP और BQ एक दूसरे को X बिन्दु पर काटती हैं। प्रमाणित करें कि
    (i) Δ BPQ = Δ CPQ (ii) Δ BCP = Δ BCQ (iii) Δ ACP = Δ ABQ (iv) Δ BXP=ΔCXQ
13. ABC त्रिभुज को BC भुजा का मध्यबिन्दु D और BC पर कोई एक बिन्दु P हैं। P, A को मिलाया। D बिन्दु से PA रेखाखण्ड के समानान्तर सरल रेखा खण्ड AB भुजा को Q बिन्दु पर काटती है, प्रमाणित करें कि
    (i) Δ ADQ = Δ PDQ (ii) Δ BPQ = $\frac{1}{2}$ Δ ABC .
14. ABC त्रिभुज में AB = AC; B और C बिन्दुओं से AB और AC भुजाओं पर खींचे गए लम्ब AC और AB को क्रमश: E और F बिन्दु पर मिलते हैं। प्रमाणित करें कि FE || BC
15. ABC त्रिभुज में $\angle$ABC = $\angle$ACB ; $\angle$ABC और $\angle$ACB कोणों के समाद्विभाजक AC और AB भुजाओं से क्रमश: E और F बिन्दु पर मिलते हैं। प्रमाणित करें कि FE || BC
16. समान क्षेत्रफल वाले ABCD और AEFG समानान्तर चतुर्भुजों में $\angle$A उभयनिष्ठ हैं और E, AB पर स्थित हैं। प्रमाणित करें कि DE || FC
17. ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है और ABCE एक चतुर्भुज हैं। AC विकर्ण ABCE चतुर्भुज को दो समान अंशों में विभाजित करता हैं। प्रमाणित करें कि AC || DE
18. ABC त्रिभुज की BC भुजा का मध्य बिन्दु D हैं; P और Q क्रमश: BC और BA भुजाओं पर इस प्रकार स्थित हैं कि Δ BPQ = $\frac{1}{2}$ Δ ABC हैं। प्रमाणित करें कि DQ || PA.

19. ABCD समानान्तर चतुर्भुज में AB , BC, CD और DA भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमशः E , F, G और H हैं। प्रमाणित करें कि

(i) EFGH समानान्तर चतुर्भुज हैं

(ii) EFGH समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ABCD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र के क्षेत्रफल का आधा हैं।

20. ABCD ट्रेपिजियम में AB || DC और BC का मध्य बिन्दु E हैं। प्रमाणित करें कि AED त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × ABCD ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल।

21. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.):

(i) ΔABC की BC, CA, और AB भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं। यदि ΔABC = 16 वर्ग से०मी० हो तो FBCE ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल हैं।

(a) 40 वर्ग से०मी० (b) 8 वर्ग से०मी० (c) 12 वर्ग से०मी० (d) 100 वर्ग से०मी०

(ii) A, B, C और D क्रमशः PQRS सामानान्तर चतुर्भुज की PQ, QR, RS और SP भुजाओं के मध्य बिन्दु हैं। PQRS सामानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = 36 वर्ग से०मी० हों तो ABCD का क्षेत्रफल है

(a) 24 वर्ग से०मी० (b) 18 वर्ग से०मी० (c) 30 वर्ग से०मी० (d) 36 वर्ग से०मी०

(iii) ABCD समानान्तर चतुर्भुज के अन्दर O कोई एक बिन्दु हैं। ΔAOB + ΔCOD = 16 वर्ग से०मी० हो तो ABCD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल हैं।

(a) 8 वर्ग से०मी० (b) 4 वर्ग से०मी० (c) 32 वर्ग से०मी० (d) 64 वर्ग से०मी०

(iv) ABC त्रिभुज की BC भुजा का मध्य बिन्दु D हैं। BD का मध्य बिन्दु E हैं और AE का मध्य बिन्दु O हैं। BOE त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(a) $\frac{1}{3}$ × ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल (b) $\frac{1}{4}$ × ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

(c) $\frac{1}{6}$ × ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल (d) $\frac{1}{8}$ × ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

(v) एक समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र, एक आयताकार क्षेत्र और एक त्रिभुजाकार क्षेत्र एक ही आधार पर और समानान्तर सरल रेखा द्वय के बीच स्थित हैं। और उनके क्षेत्रफल क्रम से P, Q और T है, तो

(a) $P = R = 2T$ (b) $P = R = \frac{T}{2}$ (c) $2P = 2R = T$ (d) $P = R = T$

22. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :

(i) ABCD समानान्तर चतुर्भुज में D बिन्दु से AB भुजा पर DE लम्ब और B बिन्दु और AD भुजा पर BF लम्ब हैं।; AB = 10 से०मी०, AD = 8 से०मी० और DE = 6 से०मी० हो तो BF की लम्बाई कितनी है? लिखें।

(ii) ABCD समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 100 वर्ग इकाई हैं। BC भुजा का मध्य बिन्दु P हैं। ABP त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना हैं, लिखें।

(iii) ABC त्रिभुज में AD मध्यमा हैं। AC कोई बिन्दु P इस प्रकार स्थित है कि ΔADP का क्षेत्रफल: ΔABD का क्षेत्रफल = 2 : 3 होतो ΔPDC का क्षेत्रफल : ΔABC का क्षेत्रफल कितना हैं, लिखें।

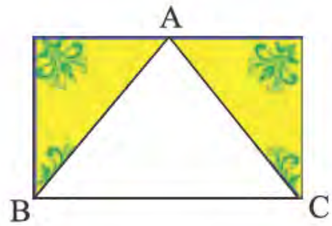
(iv) ABDE समानान्तर चतुर्भुज हैं। F, ED भुजाका मध्य बिन्दु हैं। ABD त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 20 वर्ग से०मी० हो तो AEF त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना हैं।

(v) PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज हैं X और Y क्रम से PQ और SR के मध्यबिन्दु हैं। विकर्ण SQ को मिलाया। समानान्तर चतुर्भुज XQRY आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल : QSR त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल का मान कितना हैं लिखें।

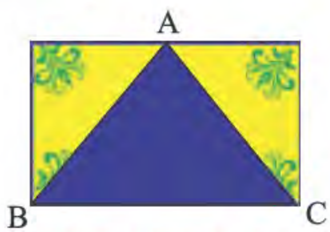
13 निर्मेय (CONSTRUCTION)

हमारी दीदी जुट से बहुत सुन्दर आसन बनाती है। उन्होंने अनेक आसन बनाये हैं। मैने सोचा है कि दीदी के बनाये गये आसनो पर मैं मखमल के टुकड़े चिपकाऊगाँ और उन्हें और सुन्दर बनाने का प्रयास करुँगा।

मैंने दीदी द्वारा बनाया गया एक आसन लिया–



ऊपर के आसन की खाली जगह ABC त्रिभुजाकार है।



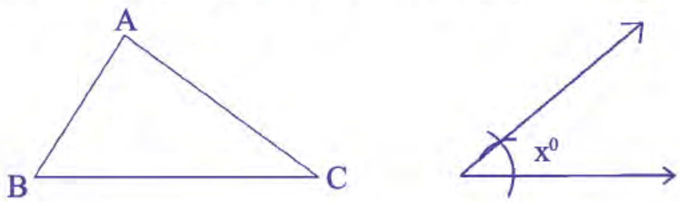
मैंने इस आसन के ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र में नीले रंग का मखमल लगाया है।

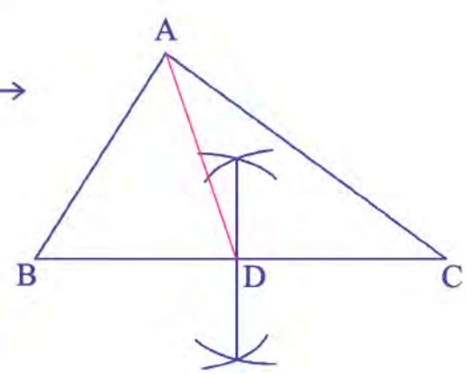
मैं एक आसन में समानान्तर चतुर्भुजाकार मखमल लगाऊँगा जिसका क्षेत्रफल त्रिभुज ABC क्षेत्र के क्षेत्रफल के समान होगा और समानान्तर चतुर्भुज का एक कोण एक निश्चित कोण के समान होगा।

हम अपनी पुस्तिका में पहले एक निर्दिष्ट त्रिभुज का अंकन करेंगे और इसके बाद इस त्रिभुज के क्षेत्रफल के समान क्षेत्र का एक समानान्तर चतुर्भुज का अंकन करेगे जिसका एक कोण एक निश्चित कोण के समान होगा।

1 एक निश्चित त्रिभुज ABC और एक निश्चित कोण $\angle x^\circ$ अंकित किया। ΔABC के समान क्षेत्रफल वाला एक समानान्तर चतुर्भुज बनाये जिसका एक शीर्ष कोण $\angle x^\circ$ है।

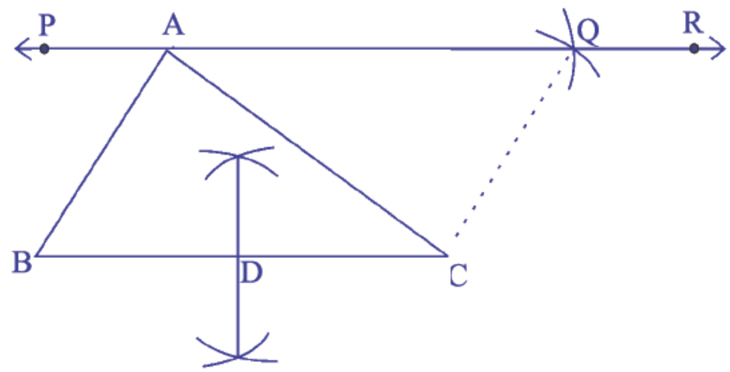
(i) पहले निश्चित ΔABC और निश्चित कोण $\angle x^\circ$ बनाया।





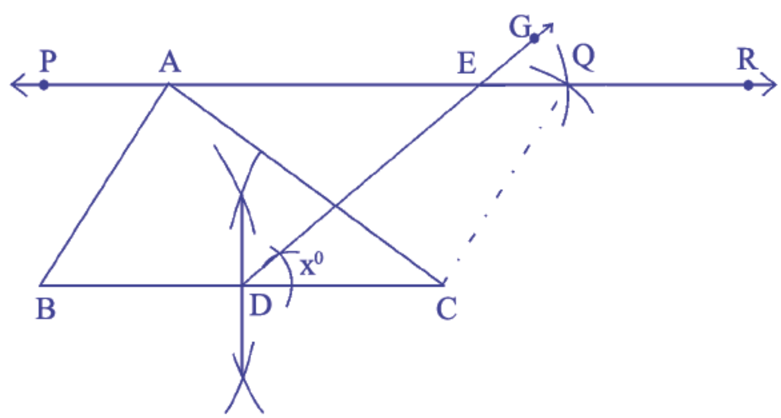
(ii) अब ΔABC को BC भुजा को पेंसिल कंपास और पैमाने की सहायता से बिन्दु D पर समाद्विभाजित किया।

(iii) पैमाने और पेंसिल कंपास की सहायता से ΔABC के A बिन्दु से BC के समानान्तर सरल रेखा PR खींचा।



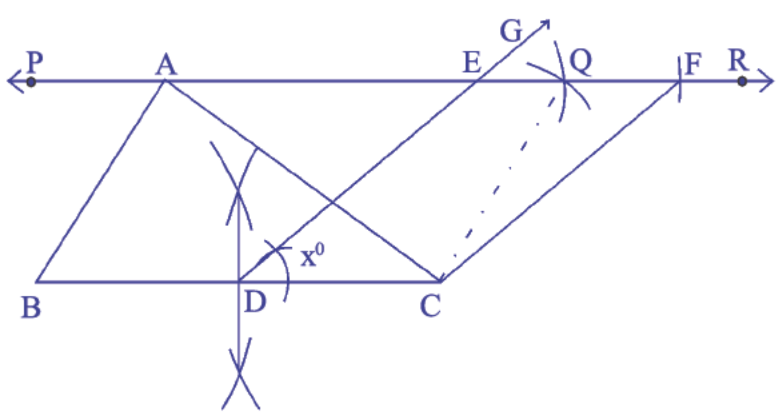
[हमलोग किसी भी सुविधाजनक पद्धति से PR || BC खींच सकते हैं। यहां A और C बिन्दुओ पर पेंसिल कंपास रखकर क्रमश: BC और AB के समान लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर चाप अंकित किया है जो एक दूसरे को बिन्दु Q पर काटते हैं। A,Q को मिलाते हुये बढ़ा दिया गया जिससे BC|| PR रेखा मिला]

(iv) ΔABC की BC भुजा को D बिन्दु पर $\angle x^o$ के समान $\angle GDC$ बनाया जो PR को बिन्दु E पर काटती हैं।

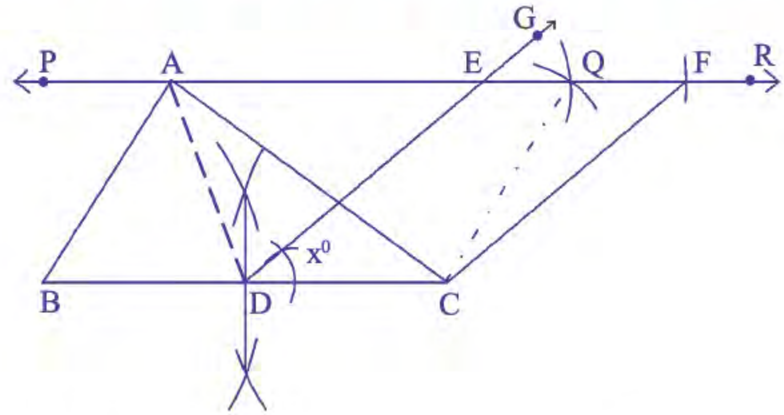


(v) पैमाने और पेंसिल कम्पास की सहायता से DC के समान ER मे से EF भाग काट लिया और C एवं F को मिलाकर EDCF समानान्तर चतुर्भुज पाया।

[C बिन्दु से DE के समानान्तर सरल रेखा खींच कर भी EDCF समानान्तर चर्तुभुज बनाया जा सकता था]



2 अब प्रत्येक पर्याय पर प्रमाणित करें कि ΔABC का क्षेत्रफल = समानान्तर चतुर्भुज EDCF का क्षेत्रफल



प्रमाण : A और D बिन्दुओं को मिलाया। चतुर्भुज EDCF में DC || EF [अंकनानुसार]

एवं DC = EF[अंकानुसार]

$\therefore$ EDCF एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।

पाते हैं, EDCF एक समानान्तर चतुर्भुज हैं जिसमें $\angle EDC = \angle X^o$

ΔADC और समानान्तर चतुर्भुज EDCF एक ही आधार DC पर और समानान्तर रेखाद्वय DC और AF के बीच स्थित हैं।

$\therefore \Delta ADC = \frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज EDCF .... (i)

फिर ΔABC की AD मध्यमा हैं।

$\therefore \Delta ADC = \frac{1}{2} \Delta ABC$ .... (ii)

$\therefore$ (i) और (ii) से पाते हैं ΔABC = समानान्तर चतुर्भुज EDCF

ΔABC के क्षेत्रफल का मान क्षेत्रफल का समानन्तर चतुर्भुज EDCF पाया जिसका एक कोण $\angle EDC = \angle x^o$ हैं।

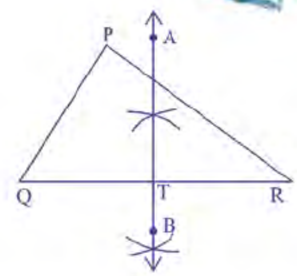
अब समझा कि दीदी द्वारा बनाये गये आसन में त्रिभुजाकार खाली जगह में जिस त्रिभुजाकार मखमल को लगाया हैं उसके समान क्षेत्रफल वाला समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र पाने के लिए त्रिभुजाकार मखमल को पुस्तिका में बनाकर उसके क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल का समानान्तर चतुर्भुज निर्मित कर समानान्तर चर्तुभुज की माप मिलेगी।

हम 3 से०मी०, 4 से०मी०, और 6 से०मी० भुजाओं वाला एक त्रिभुज का निर्माण या अंकन करता हूँ। इस त्रिभुज के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल के एक समानान्तर चतुर्भुज का अंकन करेँ जिसका एक कोण 30^o हो। अंकन प्रणाली और प्रमाण लिखें। [स्वयं करें]

सृंजय ने पैमाने और पेंसिल कंपास की सहायता से एक निर्दिष्ट PQR बनाया।

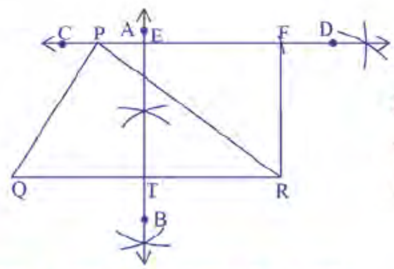
3 अब समान विधि से ΔPQR के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल वाला एक समान्तर चर्तुभुजाकार क्षेत्र का अंकन करें जिसका एक कोण 90° हो। यहाँ किस प्रकार का चतुर्भुज मिला देखें।

(i) पहले ΔPQR की QR भुजा का लम्ब समद्विभाजक AB खींचा जो QR को T बिन्दु पर काटता हैं।



(ii) अब ΔPQR के P बिन्दु से QR के समानान्तर CD सरल रेखा अंकित किया जो AB लम्ब समद्विभाजक को E बिन्दु पर काटती हैं।

(iii) अब TR के समान ED में से EF भाग काट लिया। F – R को मिलाकर ETRF समानान्तर चतुर्भुज पाया जिसका क्षेत्रफल ΔPQR के क्षेत्रफल के समान है और जिसका एक कोण $\angle ETR = 90^\circ$



यहाँ हमने ΔPQR के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल विशिष्ट (वाला) ETRF एक आयत क्षेत्र पाया।

हल करें— 13

1. PQ एक सरल रेखा खण्ड खींचे जिसकी लम्बाई 5से०मी० हैं। इस सरल रेखा खण्ड का बहि:स्थ (बाहर स्थित) बिन्दु A लिया। बिन्दु A से PQ के समानान्तर सरल रेखा खींचे। [तीन विधियों से]
2. 5 से०मी०, 8 से०मी०, और 11 से०मी० लम्बी भुजाओं से एक त्रिभुज का अंकन करें और इस त्रिभुज के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल विशिष्ट एक समानान्तर चतुर्भुज की रचना करें जिसके एक कोण का मान 60°; हो। अंकन प्रणाली और प्रमाण लिखें।
3. ΔABC अंकित करे जिसमें $AB = 6$ से०मी०, $BC = 9$ से०मी०, $\angle ABC = 55^\circ$; ΔABC के समान क्षेत्रफल विशिष्ट (वाला) एक समानान्तर चतुर्भुज अंकित करें जिसका एक कोण 60° और एक भुजा AC भुजा की लम्बाई की आधी हैं।
4. ΔPQR बनायें जिसमें $\angle PQR = 30^\circ, \angle PRQ = 75^\circ$ और $QR = 8$ से०मी०। ΔPQR के समान क्षेत्रफल विशिष्ट एक आयत क्षेत्र का अंकन करें।
5. 6.5 से०मी० लम्बी एक समबाहु त्रिभुज बनायें और इस त्रिभुज के समान क्षेत्रफल वाला एक समानान्तर चतुर्भुज अंकित करें जिसका एक कोण 45° हैं।
6. एक समद्विबाहु त्रिभुज बनायें जिसकी समान भुजाओं की लम्बाई 8 से०मी० और आधार भुजा की लम्बाई 5 से०मी० हो। इस त्रिभुज के समान क्षेत्रफल वाला एक समानान्तर चतुर्भुज बनायें जिसका एक कोण त्रिभुज के समान कोणों में से एक कोण के समान हो और एक भुजा त्रिभुज की समान भुजाओं में से एक भुजा की आधी हो। [केवल अंकन चिन्ह दें।]
7. एक समद्विबाहु त्रिभुज का अंकन करें जिसकी समान भुजाओं में से प्रत्येक की लम्बाई 8 से०मी० है और समान भुजाओं का संलग्न कोण 30° हैं। इस त्रिभुज के समान क्षेत्रफल विशिष्ट एक समानान्तर चतुर्भुज का अंकन करें। [केवल अंकन चिन्ह दें।]

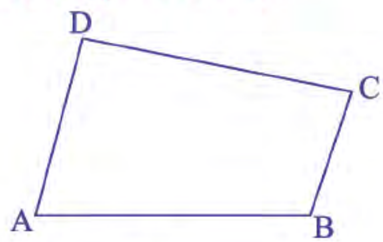
14 निर्मेय : चतुर्भुज के समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों का अंकन
(CONSTRUCTION)

मेरी बहन ने कई चतुर्भुजाकार आसन तैयार किया है। अपनी बहन द्वारा बनाया गया चतुर्भुजाकार आसन के समान क्षेत्रफल वाला एक त्रिभुजाकार मखमल काटूँगाँ।

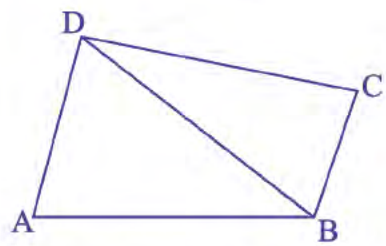
उस चतुर्भुजाकार आसन के समान क्षेत्रफल का त्रिभुजाकार मखमल किस तरह पाया जा सकता है देखें।
पुस्तिका में कोई भी चतुर्भुज अंकित करके समान क्षेत्रफल वाला त्रिभुज अंकित करने की चेष्टा करें।

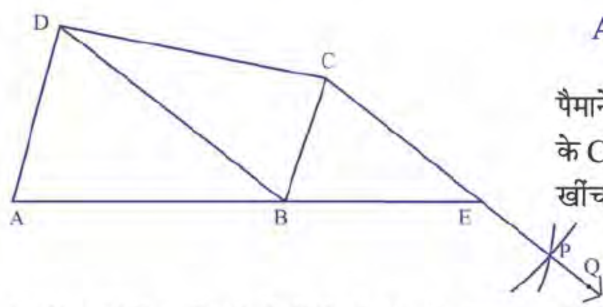
1 एक निर्दिष्ट चतुर्भुज के समान क्षेत्रफल वाला एक त्रिभुज अंकित करें।

(i) एक निर्दिष्ट चतुर्भुज ABCD बनाया।



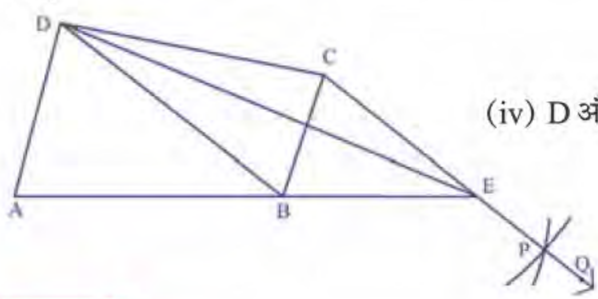
(ii) अब ABCD चतुर्भुज का DB विकर्ण खींचा।





पैमाने और पैसिल कंपास की सहायता से ABCD चतुर्भुज के C बिन्दु से DB विकर्ण के समानान्तर एक सरल रेखा खींचा जो AB के बढ़े हुये भाग से E बिन्दु पर मिलती है।

[C बिन्दु से जिस किसी भी विधि से DB के समानान्तर सरल रेखा खींची जा सकती है। यहाँ C बिन्दु से DB के समान अर्द्धव्यास लेकर और B बिन्दु से DC के समान लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर दो चाप अंकित किया जो परस्पर एक दूसरे को P बिन्दु पर काटते है। CP को मिलाया और CP को Q बिन्दु तक बढ़ाया और CQ ∥ DB पाया]



(iv) D और E बिन्दुओं को मिलाकर त्रिभुज ADE पाया।

2 तर्क सहित प्रमाणित करने की चेष्टा करें कि ΔADE का क्षेत्रफल = चतुर्भुज ABCD क्षेत्र का क्षेत्रफल।

प्रमाण : ΔDBE और ΔDBC एक ही आधार DB पर और समानान्तर सरल रेखा द्वय

DB और CP के बीच स्थित है। [$\because$ अंकानुसार DB || CQ]

$\therefore$ $\Delta DBE = \Delta DBC$

$\therefore$ $\Delta ABD + \Delta DBE = \Delta ABD + \Delta DBC$ [दोनों पक्षों में ΔABD को जोड़कर पाया]

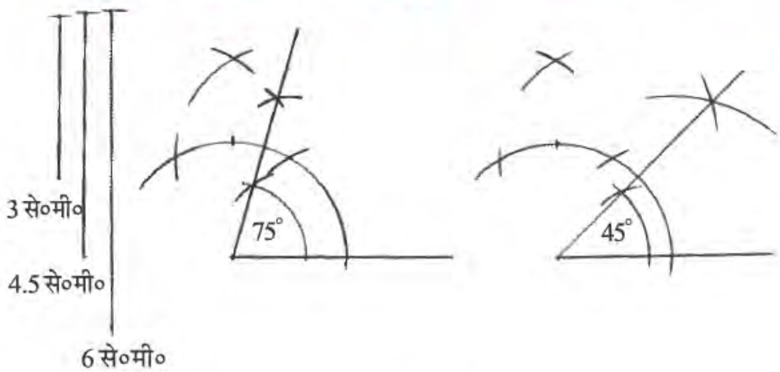
$\therefore$ ΔADE = चतुर्भुज ABCD

> हम इस विधि से किसी चतुर्भुज ABCD क्षेत्र के समान क्षेत्रफल वाला एक त्रिभुज ADE अंकित कर पाएगें।

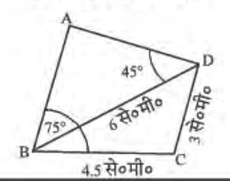
अब पहले वाले विधि का प्रयोग करके उस त्रिभुजाकार क्षेत्र ADE के समान क्षेत्रफल वाला एक समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र या आयत क्षेत्र अंकित कर पायेगें।

$\therefore$ पाते है, हम इन दों विधियों का प्रयोग करके हम किसी चतुर्भुजाकार क्षेत्र के समान क्षेत्रफल वाला एक समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र या आयत क्षेत्र अंकित कर पाएगें।

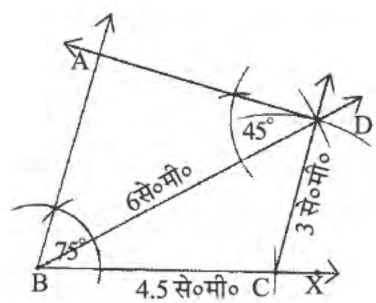
3 मेरे मित्र जाकिर ने एक चतुर्भुज ABCD अंकित किया जिसमें BC = 4.5 से०मी०, CD = 3 से०मी०, कर्ण BD = 6 से०मी०, $\angle ADB = 45^\circ$ और $\angle ABC = 75^\circ$ है चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल वाला एक समानान्तर चतुर्भुज बनायें जिसका एक कोण 60° हो।



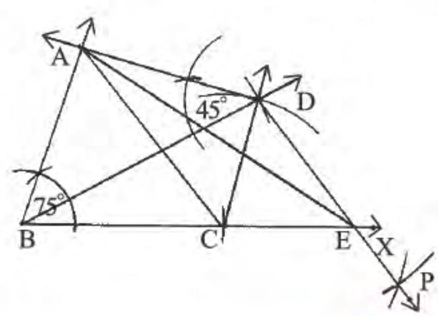
पहले छोटा करके एक खाके का चित्र बनाया



(i) जाकिर ने निर्दिष्ट चतुर्भुज बनाया जिसकी ABCD BC = 4.5 से०मी०, CD = 3 से०मी०, कर्ण BD = 6 से०मी०, $\angle ADB = 45^\circ$ और $\angle ABC = 75^\circ$

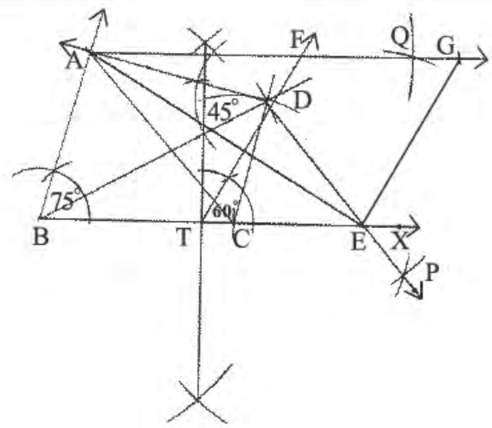


(ii) मैंने जाकिर द्वारा बनाये गए ABCD चतुर्भुज के समान क्षेत्रफल वाला Δ ABE अंकित किया।



(iii) अब मैंने ΔABE के समान क्षेत्रफल वाला एक समानान्तर चतुर्भुज FTFG का अंकन किया जिसका एक कोण $\angle FTE = 60^\circ$ है।

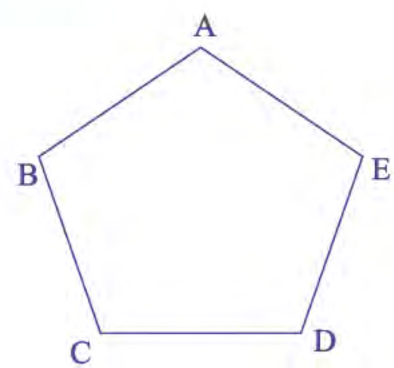
$\therefore$ जाकिर द्वारा बनाए गए ABCD निर्दिष्ट चतुर्भुज के समान क्षेत्रफल वाला एक समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र FTEG पाया जिसका $\angle FTE = 60^\circ$ है।

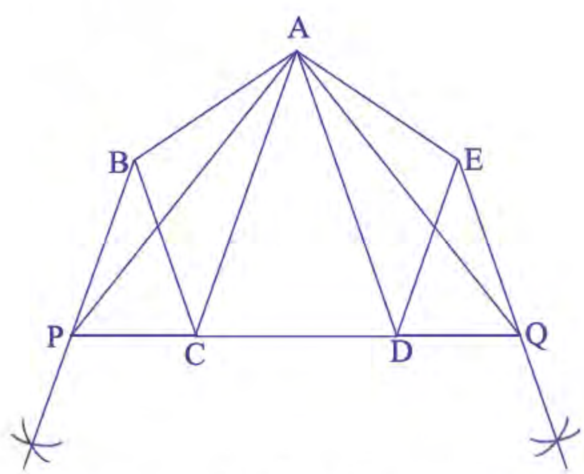


4 ABCD एक चतुर्भुज बनायें जिसकी BC = 6.3 से०मी०, CD = 4 से०मी०, विकर्ण BD = 10 से०मी०, $\angle ADB = 45^\circ$ और $\angle ABC = 75^\circ$ है । चतुर्भुज का अंकन करें और चतुर्भुज ABCD के समान क्षेत्रफल वाला एक आयत क्षेत्र का अंकन करें। [स्वयं करें]

5 मेरी मित्र सलेमा ने अपनी पुस्तिका में ABCDE एक पंचभुज का अंकन किया है। मैं उसी प्रकार इस पंचभुज के समान क्षेत्रफल का एक चतुर्भुज और एक त्रिभुज बनाने की चेष्टा करें।

(i) सलेमा ने एक पंचभुज ABCDE बनाया हैं।





(ii) ABCDE पंचभुज के दो विकर्ण AC और AD खींचा। B और E बिन्दुओं से क्रम से AC और AD के समानान्तर दो सरल रेखायें BP और EQ खींचा जो CD के दोनों और बड़े भागों को P और Q बिन्दुओं पर काटती है। AP और AQ की मिलाया।

पाया, (i) APDE चतुर्भुज का क्षेत्रफल ABCDE पंचभुज के क्षेत्रफल के समान है।

(ii) APQ चतुर्भुज का क्षेत्रफल ABCDE पंचभुज के क्षेत्रफल के समान है।

6 तर्क सहित प्रमाणित करें कि

(i) चतुर्भुज APDE का क्षेत्रफल = पंचभुज ABCDE का क्षेत्रफल।

(ii) Δ APQ का क्षेत्रफल = पंचभुज ABCDE का क्षेत्रफल।

प्रमाण : रचनानुसार, AC || BP और AD || EQ

Δ ABC और Δ APC एक ही आधार AC पर और समानान्तर रेखाद्वय AC और BP के मध्य स्थित है।

$\therefore \Delta ABC = \Delta APC$ ....(i)

Δ AED और Δ AQD एक ही आधार AD पर और समानान्तर रेखाद्वय AD और EQ के मध्य स्थित है।

$\therefore \Delta AED = \Delta AQD$ ....(ii)

(i) से पाते है, Δ ABC + चतुर्भुज ACDE = Δ APC + चतुर्भुज ACDE

$\therefore$ पंचभुज ABCDE = चतुर्भुज APDE

(i) और (ii) से पाते है, $\Delta ABC + \Delta AED = \Delta APQ + \Delta AQD$

$\Delta ABC + \Delta AED + \Delta ACD = \Delta APC + \Delta AQD + \Delta ACD$ [दोनों पक्षों में Δ ACD की जोड़ने पर]

$\therefore$ पंचभुज ABCDE = Δ APQ [प्रमाणित]

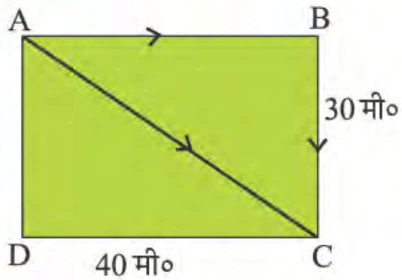
हल करें — 14

1. प्रीतम ने ABCD एक चतुर्भुज बनाया है जिसमें AB = 5 से॰मी॰, BC = 6 से॰मी॰, CD = 4 से॰मी॰, DA = 3 से॰मी॰ और $\angle ABC = 60^\circ$ है। इस चतुर्भुज के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल के एक त्रिभुज का अंकन करें।
2. सहाना ने एक चतुर्भुज ABCD अंकित किया जिसमें AB = 4 से॰मी॰, BC = 5 से॰मी॰, CD = 4.8 से॰मी॰, DA = 4.2 से॰मी॰ और विकर्ण AC = 6 से॰मी॰ है। चतुर्भुज के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल का एक त्रिभुज बनाएं।
3. सहाना ने एक आयत क्षेत्र ABCD बनाया है जिसमें AB = 6 से॰मी॰ और BC = 6 से॰मी॰ इस आयत क्षेत्र ABCD के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल वाला एक त्रिभुज बनाएं।
4. एक चतुर्भुज ABCD बनायें जिसकी BC = 6 से॰मी॰, AB = 4 से॰मी॰, CD = 3 से॰मी॰, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCD = 55^\circ$ है। इस चतुर्भुज ABCD के समान क्षेत्रफल वाला एक त्रिभुज अंकित करें जिसकी एक भुजा AB और दूसरी भुजा BC के समान हो।
5. 5 से॰मी॰ भुजा वाला एक वर्ग क्षेत्र अंकित करें। इस वर्ग क्षेत्र के समान क्षेत्रफल वाला एक समानान्तर चतुर्भुज अंकित करें जिसका एक कोण 60° है।
6. 6 से॰मी॰ भुजा वाली एक वर्ग क्षेत्र का अंकन करें और इस वर्ग क्षेत्र के समान क्षेत्रफल वाले एक त्रिभुज का अंकन करें।
7. एक चतुर्भुज ABCD बनायें जिसकी AB भुजा AD और BC लम्ब है और AB = 5 से॰मी॰, AD = 7 से॰मी॰ और BC = 4 से॰मी॰ है। इस चतुर्भुज के समान क्षेत्रफल वाला एक त्रिभुज बनाएं जिसका एक कोण 30° हो।

   संकेत : ABCD चतुर्भुज के समान क्षेत्रफल विशिष्ट एक त्रिभुज ABQ बनाया। Δ ABQ की BQ की आधार मानकर एक ही आधार पर और एक जोड़ी समानान्तर रेखाओं के बीच एक और त्रिभुज बनाया जिसका एक कोण 30° हो।
8. ABCDE एक पंचभुज का अंकन करें और इसके समान क्षेत्रफल वाला एक निर्दिष्ट त्रिभुज का अंकन करें जिसका एक शीर्ष बिन्दु C हो।

15 त्रिभुज और चतुर्भुज की परिसीमा और क्षेत्रफल
(AREA & PERIMETER OF TRIANGLE & QUADRILATERAL)

आज मैं और तानया आयताकार ABCD मैदान के A बिन्दु से शुरु करके अलग-अलग रास्तों से C तक पहुँचने के लिए देखेगें कि किसने कितनी दूरी तय की।



मैं A से प्रारम्भ कर मैदान के किनारे-किनारे चलते हुए C तक पहुँचा

मैदान की लम्बाई AB=40 मीटर और चौड़ाई BC=30 मीटर

∴ मैंने कुल दूरी तय की AB + BC = ☐ मीटर

1 तानया A से चलना प्रारम्भ करके विकर्ण AC के बराबर चलते हुए C तक पहुँची। गणना करके देखा जाए कि तानया ने कितनी दूरी तय किया ?

समकोण त्रिभुज ABC से पाते हैं $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$\therefore \quad AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{(40)^2 + (30)^2} \text{ मीटर}$$

$$= \sqrt{\square} \text{ मीटर}$$

$$= \square \text{ मीटर}$$

∴ पाते है तानया ने मुझसे कम दूरी तय करके एक ही स्थान पर पहुँची।

2 मेरी मित्र आयशी A से प्रारम्भ करके ABCD आयत क्षेत्राकार मैदान की परिसीमा के बराबर एक बार घूमकर फिर A बिन्दु पर पहुँच जाती हैं।

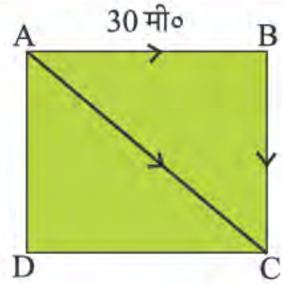
∴ आयशी ने तय की $2 \times (40 \text{ मीटर} + 30 \text{ मीटर})$

$= 2 \times 70$ मीटर

$= \square$ मीटर

> यदि आयताकार मैदान की लम्बाई a एवं चौड़ाई b हो,
>
> परिसीमा = $2 \times (a + b)$ = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)
>
> विकर्ण की लम्बाई = $\sqrt{a^2 + b^2}$ = $\sqrt{(\text{लम्बाई})^2 + (\text{चौड़ाई})^2}$

किन्तु हमलोगों का मैदान यदि वर्गाकार होता जिसकी प्रत्येक किनारे की लम्बाई 30 मीटर होती तब हममें से कौन कितनी दूरी तय करता। गणना करके लिखें।



मैं वर्गाकार मैदान के A बिन्दु से प्रारम्भ करके किनारे-किनारे C बिन्दु तक कुल दूरी तय करता → AB + BC = ☐ मीटर

3 तानया ABCD वर्गाकतार मैदान के A बिन्दु से प्रारम्भ करके AC विकर्ण के बराबर C तक पहुँचने में कितनी दूरी तय करेगी। गणना करके लिखें।

समकोण त्रिभुज ABC से पाते हैं

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(30)^2 + (30)^2} \text{ मीटर } = \sqrt{1800} \text{ मीटर} = 30\sqrt{2} \text{ मीटर}$$

∴ तनया $30\sqrt{2}$ मीटर दूरी तय करती है।

4 आयशी ABCD वर्गकतार मैदान के Aबिन्दु से प्रारम्भ करके मैदान के किनारे-किनारे चारों ओर एक बार चलते हुये फिर A तक पहुँचने में कितनी दूरी तय करेगी —

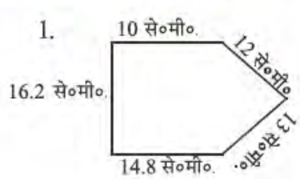
$4 \times (AB) = 4 \times 30$ मीटर = 120 मीटर

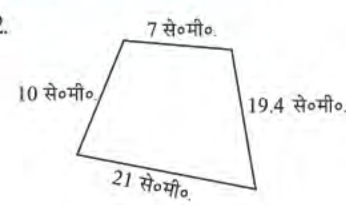
> यदि वर्गाकार मैदान की एक भुजा की लम्बाई a हो,
>
> ∴ परिसीमा = 4a = 4 × एक भुजा की लम्बाई
>
> और विकर्ण की लम्बाई = $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = \sqrt{2}$ × एक भुजा की लम्बाई

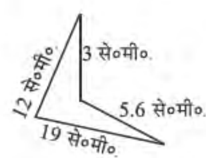
5 हमलोगों के मुहल्ले के मैदान चतुर्भुजाकार क्षेत्र हैं जिसके चारों किनारों की लम्बाई क्रम से a मीटर b मीटर, c मीटर और d मीटर।

∴ परिसीमा के बराबर एक बार घूमकर लौट आने में कुल तय की दूरी
a मीटर + b मीटर + c मीटर + d मीटर = (a + b + c + d) मीटर।

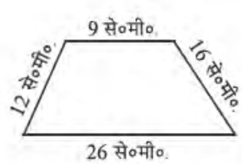
स्वयं करें — 15.1 नीचे के चित्र देखें और परिसीमा लिखें।

1. 

2. 

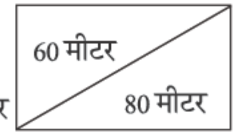
3. 

4.

5. 

6. स्वयं बहुभुजाकार चित्र बनाकर परिसीमा लिखें

6 हमारे आयत क्षेत्राकार मैदान की लम्बाई 80 मीटर और चौड़ाई 60 मीटर हैं। इस मैदान के एक कोने से दूसरे कोने तक सीधे चलने में कितनी दूरी तय करनी पड़ेगी— लिखें।



आयताकार मैदान की लम्बाई 80 मीटर, चौड़ाई 60 मीटर

∴ आयताकार मैदान के विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{(80)^2 + (60)^2}$ मीटर = ☐ मीटर

7 तिथि के परिवार के वर्गाकार जमीन के विकर्ण की लम्बाई $40\sqrt{2}$ मीटर हो तो जमीन के एक किनारे की लम्बाई क्या होगी ?

माना कि तिथि के परिवार के वर्गाकार जमीन के एक किनारे की लम्बाई = a मीटर

उस जमीन के विकर्ण की लम्बाई = $a\sqrt{2}$ मीटर

$$a\sqrt{2} = 40\sqrt{2}$$
$$a = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 40$$

तिथि-परिवार के जमीन के एक किनारे की लम्बाई 40 मीटर हैं।

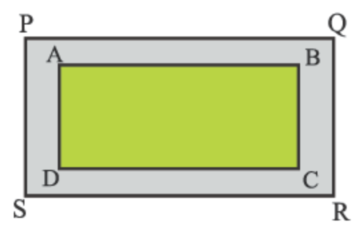
8 जिस वर्गाकार चित्र के विकर्ण की लम्बाई $13\sqrt{2}$ से.मी. हो उसके एक भुजा की लम्बाई ☐ से.मी. हैं। [स्वयं करें]

9 अमीना-परिवार की आयताकार जमीन के चारों ओर बाहर से 3 मीटर चौड़ा रास्ता हैं। आयत क्षेत्राकार जमीन की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से 22 मीटर और 15 मीटर हैं। प्रति मीटर 16 रू० की दर से रास्ता के चारों ओर से और भीतर से बेड़ा घेरने पर कुल कितना रूपये खर्च होगा-गणना करके लिखें।

माना कि, अमीना-परिवार की आयताकार जमीन ABCD और रास्ता सहित जमीन PQRS हैं।

∴ ABCD आयताकार जमीन की लम्बाई AB = 22 मीटर और चौड़ाई BC = 15 मीटर

∴ PQRS आयताकार जमीन की लम्बाई



PQ = 22 मीटर + 2 × 3 मीटर = ☐ मीटर

और चौड़ाई QR = 15 मीटर + 2 × 3 मीटर = ☐ मीटर

∴ ABCD की परिसीमा 2 × (22 + 15) मीटर = ☐ मीटर

और आयताकार जमीन PQRS की परिसीमा = ☐ मीटर

∴ बेड़े की लम्बाई = ☐ मीटर + ☐ मीटर = 172 मीटर

∴ खर्च = 16 × ☐ रूपये = ☐ रूपये

10 सायन-परिवार की आयताकार जमीन की लम्बाई चौड़ाई से तीन गुनी हैं। प्रति मीटर 18 रू० की दर से सायन परिवार की जमीन के चारो ओर घेरा लगाने में कुल 1152 रू० खर्च हुये तो सायन परिवार की जमीन की लम्बाई और चौड़ाई गणना कर लिखें।

माना, सायन परिवार की जमीन की चौड़ाई x मीटर हैं अत: लम्बाई 3x मीटर हैं।

आयताकार जमीन की परिसीमा = 2 (x + 3x) मीटर = 2 × 4x मीटर = 8x मीटर

फिर जमीन की परिसीमा $= \frac{1152}{18}$ मीटर = 64 मीटर

शर्तानुसार 8x = 64

∴ x = ☐

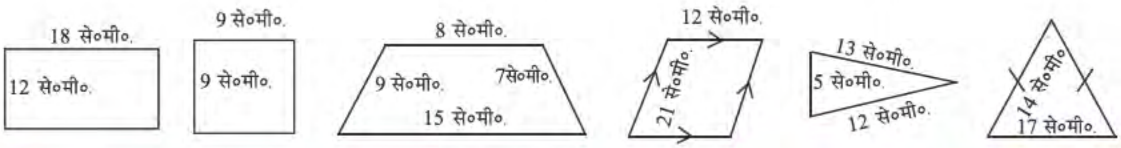
∴ लम्बाई = ☐ मीटर, चौड़ाई = ☐ मीटर

स्वयं करें — 15.2

(1) जिस वर्गाकार जमीन के विकर्ण की लम्बाई $20\sqrt{2}$ मीटर हैं उसके चारों ओर दीवार बनाने पर दीवार की लम्बाई कितनी होगी— लिखें।

(2) प्रीतम परिवार की आयताकार जमीन के चारों ओर समान रूप से 5 मीटर चौड़ा रास्ता हैं। आयताकार जमीन की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से 2.5 डेकामीटर और 1.7 डेकामीटर हैं। प्रति मीटर 18 रू० की दर से रास्ते के बाहर से चारों ओर से बेड़ा लगाने में कितनी खर्च पड़ेगा-लिखें।

(3) निम्न कार्ड देखें, परिसीमा लिखें और समान परिसीमा वाले समबाहु त्रिभुज की एक भुजा की लम्बाई लिखें।



11 आज हमलोग ढेर सारे आयताकार आर्ट पेपर के कार्ड तैयार करेंगे और इन कार्डस पर बहुत कुछ चित्रकारी करके मित्रों के पास भेजेगें। साहीन ने सोचा हैं कि प्रत्येक कार्ड के पीछे रंगीन कागज लगाकर मोड़ेगा। गणना करके देखते हैं कि प्रत्येक कार्ड के लिए कितना रंगीन कागज लगेगा।

देखते हैं इस कार्ड की लम्बाई 12 से०मी० और चौड़ाई 8 से०मी० हैं।

इस कार्ड के लिए रंगीन कागज लगेगा, 12 से०मी० × 8 से०मी० = 96 वर्ग से०मी०

[क्योंकि आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = लम्बाई × ☐]

रबीन ने जो कार्ड बनाए उनकी लम्बाई 14.2 से०मी० और चौड़ाई 9.5 से०मी०

∴ रबीन द्वारा बनाए कार्डो के लिये रंगीन कागज लगेगा ☐ × ☐ वर्ग से०मी०= ☐ वर्ग से०मी० [स्वयं करें]

12 जहीर ने एक वर्गाकार कार्ड बनाया जिसकी भुजाओं की लम्बाई 6.4 से०मी० हैं। कार्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

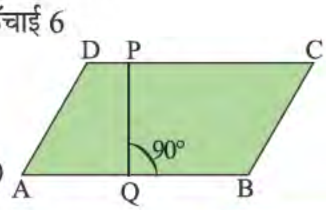
∴ इस वर्गाकार कार्ड का क्षेत्रफल $(6.4)^2$ वर्ग से०मी० [स्वयं करें]

= ☐ वर्ग से०मी०

13 किन्तु मेघा ने जो कार्ड बनाए वह आयताकार नहीं हो सका। कार्ड समानान्तर चतुर्भुजाकार हो गया। समानान्तर चतुर्भुजाकार कार्ड का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे देखें।

समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = समानान्तर चतुर्भुज का आधार × ऊँचाई।

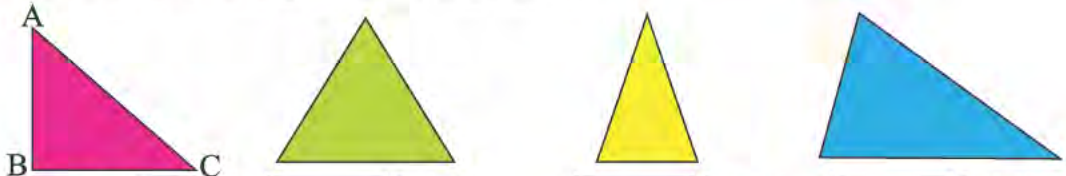
मेघा ने मापकर देखा कि कार्ड के आधार की लम्बाई 8 से०मी० और ऊँचाई 6 से०मी० हैं।



कार्ड का क्षेत्रफल = 8 × 6 वर्ग से०मी० = 48 वर्ग से०मी०

(चित्र में ABCD समानान्तर चतुर्भुज का आधार AB और ऊँचाई PQ हैं।)

मेरे भाई ने कई प्रकार के त्रिभुजाकार रंगीन कागज काटे हैं।



14 मैं और डेविड इन त्रिभुजों की भुजाओं की लम्बाई और क्षेत्रफल लिखने की चेष्टा करते हैं।

माना कि, लाल रंग के समकोण त्रिभुज ABC का आधार BC = a इकाई

ऊँचाई AB = b इकाई

$\therefore$ समकोण त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई $= \frac{1}{2} \times a \times b$ वर्ग इकाई

पाया हैं,

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ समकोण बनाने वाली भुजाओं का गुणनफल $= \frac{1}{2}$ ab वर्ग इकाई

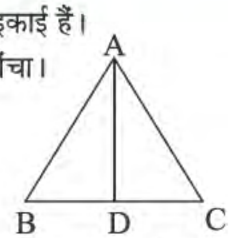
15 हरे रंग की समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल मापने की चेष्टा करें।

माना कि, हरे रंग के समकोण त्रिभुज ΔABC हैं जिसकी भुजा की लम्बाई = a इकाई हैं।

$\therefore$ समबाहु त्रिभुज की परिसीमा 3a इकाई हैं। A बिन्दु से BC भुजा पर AD लम्ब खींचा।

$\therefore$ त्रिभुज की ऊँचाई = AD

समकोण त्रिभुज ABD में पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार



$AB^2 = AD^2 + BD^2$

या, $AB^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ ($\because$ समबाहु त्रिभुज में AD लम्ब आधार भुजा BC समद्विभाजित करता हैं।)

या, $BC^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ ($\because AB = BC$)

या, $BC^2 - \frac{BC^2}{4} = AD^2$

या, $AD^2 = \frac{3BC^2}{4}$

$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$

अत: समबाहु त्रिभुज = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a इकाई हैं

$\therefore$ समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a$ वर्ग इकाई $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ वर्ग इकाई

पाया, समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (भुजा)^2

16 जिस समबाहु त्रिभुज की एक भुजा की लम्बाई 6 हो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

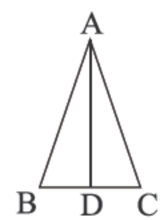
जिस समबाहु त्रिभुज की एक भुजा की लम्बाई 6 से०मी० है उसका क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6$ वर्ग से०मी०

$= 9\sqrt{3}$ वर्ग से०मी०

17 जिस समबाहु त्रिभुज की परिसीमा की लम्बाई 12 से०मी० हैं। उसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। (स्वयं करें)

> जिस किसी समबाहु त्रिभुज की एक भुजा की लम्बाई ज्ञात रहने पर उस समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई और उसके क्षेत्रफल की परिमाप की जा सकती हैं।

18 पीले रंग के समद्विबाहु त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की चेष्टा करें।



माना कि Δ ABC पीले रंग का समद्विबाहु त्रिभुज हैं

और ABC की AB = AC = a इकाई

BC = b इकाई

अत: समद्विबाहु त्रिभुज की परिसीमा = (2a + b) इकाई।

A बिन्दु से BC भुजा पर AD लम्ब खींचा।

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, समकोण त्रिभुज ABD में

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

या, $AD^2 = AB^2 - BD^2$

या, $AD^2 = AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ [समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु से खींचा गया लम्ब आधार भुजा को समद्विभाजित करता हैं।]

या, $AD^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}$

$\therefore$ $AD = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$

$\therefore$ समद्विबाहु त्रिभुज ABC का ऊँचाई $AD = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ इकाई

$\therefore$ समद्विबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$= \frac{1}{2} \times b \times \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ वर्ग इकाई

पाते हैं,

> समद्विबाहु त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल =
> $\frac{1}{2} \times$ आधार की लम्बाई $\times \sqrt{(\text{समान भुजाओं में से एक की लम्बाई})^2 - (\text{आधार का आधा})^2}$

19 किसी समद्विबाहु त्रिभुजाकार क्षेत्र के आधार की लम्बाई 12 से०मी० और समान भुजाओं में से प्रत्येक की लम्बाई 10 से०मी० हो तो उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

समद्विबाहु त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{6}{\cancel{12}} \times \sqrt{(10)^2 - (\frac{12}{2})^2}$ वर्ग से०मी०

$= 6 \times \sqrt{100 - 36}$ वर्ग से०मी०

$=$ ☐ वर्ग से०मी०

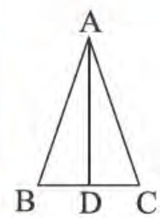
दूसरे विधि से,

समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC = 10 से०मी०

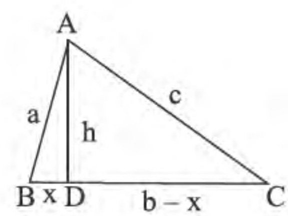
और $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (10 \text{ से०मी०})^2 - (6 \text{ से०मी०})^2 = 64$ वर्ग से०मी०

∴ ऊँचाई = AD = 8 से०मी०

∴ Δ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times AD =$ ☐ वर्ग से०मी०



20 नीले रंग के विषमबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने की चेष्टा करें।



माना, Δ ABC चित्र नीले रंग का विषमबाहु त्रिभुज हैं।

और AB = a इकाई , BC = b इकाई

और इकाई AC = c इकाई हैं।

A बिन्दु से BC पर AD लम्ब खींचा हैं।

माना, AD = ऊँचाई = h इकाई हैं।

∴ Δ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times b \times h$ वर्ग इकाई

∴ माना कि, BD = x इकाई

∴ DC = (b – x) इकाई

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार समकोण ABD से पाते हैं

$$x^2 + h^2 = a^2$$

$$\therefore h^2 = a^2 - x^2 \text{ .... (i)}$$

फिर पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार समकोण त्रिभुज ACD से पाते हैं

$$h^2 + (b - x)^2 = c^2$$

या, $h^2 + b^2 + x^2 - 2bx = c^2$

या, $h^2 = 2bx - b^2 - x^2 + c^2$ .... (ii)

∴ (i) और (ii) से पाते हैं,

$$a^2 - x^2 = 2bx - b^2 - x^2 + c^2$$

या, $2bx = a^2 + b^2 - c^2$

$$\therefore \quad x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$$

फिर $h^2 = a^2 - x^2$

$$= a^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2$$

$$= a^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}$$

$$= \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}$$

$$= \frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2}$$

$$= \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2) \quad (2ab-a^2-b^2+c^2)}{4b^2}$$

$$= \frac{\{(a+b)^2 - c^2\} \ \{c^2 - (a-b)^2\}}{4b^2} = \frac{(a+b+c)\,(a+b-c) \quad (c+a-b)\,(c-a+b)}{4b^2}$$

माना कि, त्रिभुज की परिसीमा 2s इकाई हैं।

∴ त्रिभुज की अर्द्धपरिसीमा = s इकाई

अतः $2s = a+b+c$ एवं $2s - 2a = b + c - a$, $2s - 2b = a + c - b$, $2s - 2c = a + b - c$,

$$\therefore \quad h^2 = \frac{2s\,(2s-2c)\,(2s-2b)\,(2s-2a)}{4b^2} = \frac{16s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{4b^2}$$

$$\therefore \quad h = \frac{2}{b}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times b \times h$ वर्ग इकाई $= \frac{1}{2} \times b \times \frac{2}{b}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ वर्ग इकाई

$= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ वर्ग इकाई

त्रिभुजाकार क्षेत्र के क्षेत्रफल को 'Δ' चिह्न द्वारा प्रदर्शित किया जाता हैं।। $\Delta = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

अर्थात जिस किसी भी त्रिभुज की तीन भुजायें a, b और c हो तो

उस त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, जहाँ अर्द्धपरिसीमा $(s) = \frac{a+b+c}{2}$

फिर, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

ब्रह्मगुप्त
598AD – 670AD

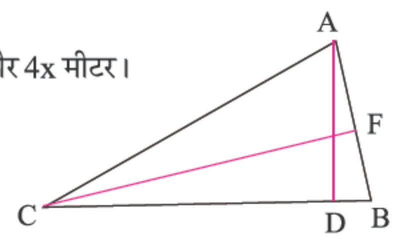
त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने का यह सूत्र मिश्र देश के गणितज्ञ हेरान ने दिया था। इसीलिये यह सूत्र हेरान का सूत्र (Heron's Formula) नाम से प्रचलित हैं। यह सूत्र ब्रह्मगुप्त का सूत्र (Brahmagupta's Formula) नाम से भी प्रचलित हैं।

हेरान
10AD – 70AD

21 हमारे इलाके के त्रिभुजाकार मैदान की भुजाओं की लम्बाईयो का अनुपात 2:3:4 और मैदान की परिसीमा 18 मीटर हो तो मैदान का क्षेत्रफल और सबसे बड़ी और सबसे छोटी भुजाओं के विपरीत शीर्ष बिन्दु से सबसे बड़ी और सबसे छोटी भुजाओं पर खींचे गये लम्बों की लम्बाईयाँ ज्ञात करें।

त्रिभुजाकार मैदान की भुजाओं की लम्बाईयों का अनुपात 2:3:4

यदि उभनिष्ठमाप x मीटर हो तो



त्रिभुजाकार मैदान की तीनों भुजाओं की लम्बाईयाँ 2x मीटर, 3x मीटर और 4x मीटर।

$\therefore$ त्रिभुजाकार मैदान की परिसीमा $(2x + 3x + 4x)$ मीटर $= 9x$ मीटर

शर्तानुसार, $9x = 108$

या, $x = 12$

मैदान की तीनो भुजाओं की लम्बाईयाँ 12×2 मीटर $= 24$ मीटर, 12×3 मीटर $= 36$ मीटर, 12×4 मीटर $=$ 48 मीटर

$\therefore$ मैदान की अर्द्धपरिसीमा $= \frac{108}{2}$ मीटर $= 54$ मीटर

$\therefore$ त्रिभुजाकृति के मैदान का क्षेत्रफल $= \sqrt{54\,(54-24)\,(54-36)\,(54-48)}$ वर्ग मीटर $= \square$ वर्ग मीटर

माना कि A बिन्दु से सबसे बड़ी भुजा पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई AD और सबसे छोटी भुजा पर लम्ब की लम्बाई CF हैं।

Δ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

फिर Δ ABC का क्षेत्रफल $= 108\sqrt{15}$ वर्ग मीटर

$\frac{1}{2} BC.\, AD = 108\sqrt{15}$ वर्ग मीटर

या, $\frac{1}{\not{2}}\ \overset{24}{\not{48}}$ मीटर $\times AD = 108\sqrt{15}$ वर्ग मीटर

या, $AD = \frac{\overset{9}{\not{108}}\sqrt{15}}{\not{24}\ 2}$ मीटर

$\therefore\ AD = \frac{9\sqrt{15}}{2}$ मीटर

अत: सबसे बड़ी भुजा के विपरीत शीर्ष बिन्दु से सबसे बड़ी भुजा पर लम्ब की लम्बाई $\frac{9\sqrt{15}}{2}$ मीटर।

Δ ABC का क्षेत्रफल $= \times \frac{1}{2} AB \times CF$

या, $\frac{1}{2} \times AB \times CF = 108\sqrt{15}$ वर्ग मीटर

या, $\frac{1}{2} \times \square \times CF = 108\sqrt{15}$ वर्ग मीटर

या, $CF = \square$

$\therefore CF = \square$

$\therefore$ सबसे छोटी भुजा के विपरीत शीर्ष बिन्दु से सबसे छोटी भुजा पर लम्ब की लम्बाई $\square$ मीटर हैं।

20 किन्तु मेरे मित्र सुमीत के इलाके के त्रिभुजाकार एक मैदान की भुजाओं की लम्बाईयाँ 12 मीटर, 16 मीटर और 20 मीटर हैं। सुमित के इलाके के त्रिभुजाकृति मैदान का क्षेत्रफल और सबसे बड़ी भुजा के विपरीत शीर्षबिन्दु से सबसे बड़ी भुजा पर खींचे गये लम्बाई ज्ञात करें।

अर्द्धपरिसीमा $s = \frac{12+16+20}{2}$ मीटर

या, $s = \frac{48}{2}$ मीटर = 24 मीटर

मैदान का क्षेत्रफल $(\Delta) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{24(24-12)(24-16)(24-20)}$ वर्ग मीटर

$= \sqrt{24 \times 12 \times 8 \times 4}$ वर्ग मीटर

$= \sqrt{2 \times 12 \times 12 \times 8 \times 4}$ वर्ग मीटर

$= \sqrt{12 \times 12 \times 16 \times 4}$ वर्ग मीटर

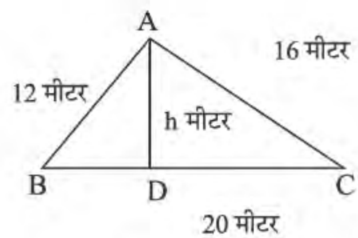
$= 12 \times 4 \times 2$ वर्ग मीटर

$= 96$ वर्ग मीटर

माना कि सबसे बड़ी भुजा के विपरीत शीर्ष बिन्दु से विपरीत भुजा पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई h मीटर हैं।

$\therefore$ मैदान का क्षेत्रफल $= \frac{1}{\not{2}} \times \overset{10}{\not{20}} \times h$ वर्ग मीटर

$= 10h$ वर्ग मीटर



$10h = 96$

$\therefore h = \frac{96}{10} = 9.6$

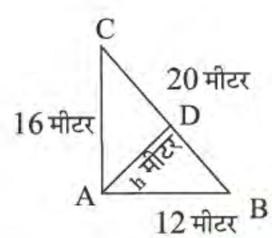
$\therefore$ त्रिभुजाकार मैदान का क्षेत्रफल 96 वर्ग मीटर और सबसे बड़ी भुजा के विपरीत बिन्दु से वृहत्तम भुजा पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई 9.6 मीटर हैं।

21 सुमित ने कहा कि वह मैदान का क्षेत्रफल दूसरी विधि से ज्ञात करेगा। हमारे इलाके के त्रिभुजाकार मैदान के भुजाओं की लम्बाईयाँ 12 मीटर, 16 मीटर और 20 मीटर हैं। हमारे इलाके के त्रिभुजाकार मैदान का क्षेत्रफल और सबसे बड़ी भुजा के विपरीत शीर्ष बिन्दु से सबसे बड़ी भुजा पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई ज्ञात करें।

$12^2 + 16^2 = 20^2$

$\therefore$ त्रिभुजाकृति मैदान समकोण त्रिभुज हैं।

$\therefore$ मैदान का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 12 \times 16$ वर्ग मीटर = 96 वर्ग मीटर



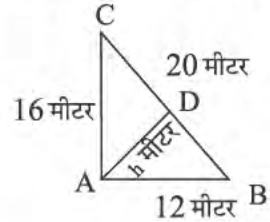
माना कि सबसे बड़ी भुजा के विपरीत शीर्ष बिन्दु से विपरीत भुजा पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई h मीटर हैं।

$\therefore$ मैदान का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 20 \times h$ वर्ग मीटर (20 को काटकर 10, 2 को काटकर)

$= 10\,h$ वर्ग मीटर

$10\,h = 96$

$\therefore h = \frac{96}{10} = 9.6$



$\therefore$ त्रिभुजाकार मैदान का क्षेत्रफल 96 वर्ग मीटर और सबसे बड़ी भुजा के विपरीत शीर्ष बिन्दु से सबसे बड़ी भुजा पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई 9.6 मीटर हैं।

22 यदि त्रिभुजाकार मैदान की तीन भुजाओं की लम्बाई क्रम से 13 मीटर, 14 मीटर, और 15 मीटर हो तो, इस त्रिभुजाकार मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात करें। [स्वयं करें।]

23 हमारे विद्यालय का एक 32 मीटर ऊँचा ताड़ का पेड़ कल आँधी में टूट जाने के कारण इसका सिरा जड़ से 8 मीटर दूर जमीन को स्पर्श करता हुआ गिरा है। पेड़ जमीन से कितनी ऊँचाई से टूटा था। चित्र बनाये और गणना करें।

माना कि AB ताड़ के पेड़ की लम्बाई (ऊँचाई) और C बिन्दु से टूटकर जमीन को A बिन्दु D बिन्दु पर स्पर्श करता हैं।

$\therefore$ AB = ☐ मीटर

AC = CD

$\therefore$ AB = AC + CB = CD + CB

माना कि CB = x मीटर

$\therefore$ AB = CD + x मीटर

या, 32 मीटर = CD + x मीटर

$\therefore$ CD = (32 – x) मीटर

समकोण त्रिभुज CBD से पाते हैं

$CB^2 + BD^2 = CD^2$

या, $x^2 + 8^2 = (32-x)^2$

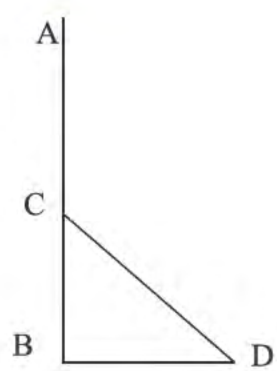
या, $x^2 + 8^2 = (32)^2 + x^2 - 2 \times x \times 32$

या, $2 \times x \times 32 = 32^2 - 8^2$

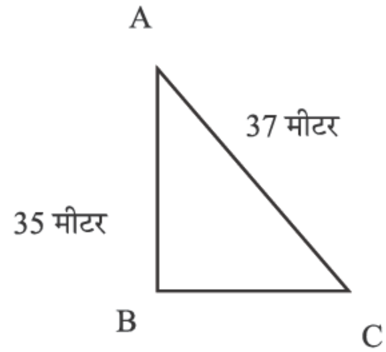
या, 64x = ☐

$\therefore$ x = ☐

$\therefore$ जमीन से ☐ मीटर ऊपर से पेड़ टूटा था।



24 किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई 37 मीटर और समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक भुजा की लम्बाई 35 मीटर हैं, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



माना कि ABC समकोण त्रिभुज की AB = 35 मीटर

और कर्ण AC = 37 मीटर

$\therefore$ समकोण त्रिभुज ABC से पाते हैं,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

या, $BC^2 = AC^2 - AB^2$

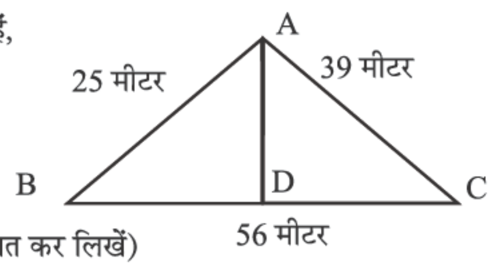
या, $BC^2 = (37^2 - 35^2)$ वर्ग मीटर

या, $BC^2 = (37+35)(37-35)$ वर्ग मीटर

या, $BC^2 = 72 \times 2$ वर्ग मीटर $\quad \therefore BC = \square$ मीटर

$\therefore \quad \Delta$ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times AB$ वर्ग मीटर $= \square$ वर्ग मीटर

25 पृथा के गाँव के त्रिभुजाकृति के बगीचे (उद्यान) की तीनों भुजाओं की लम्बाईयाँ क्रम से 25 मीटर, 39 मीटर और 56 मीटर हैं। हम यदि उस बगीचे की 56 मीटर लम्बे किनारे पर विपरीत शीर्ष बिन्दु से लम्ब रूप में दीवार बनायें तो इस दीवार की लम्बाई क्या होगी। चित्र बनाकर बतायें।



माना कि Δ ABC पृथा के गाँव में त्रिभुजाकृति का मैदान हैं,

जहाँ AB = 25 मीटर

AC = 39 मीटर

और BC = 56 मीटर हैं।

$\therefore \quad \Delta$ ABC की अर्द्धपरिसीमा = $\square$ मीटर (स्वयं ज्ञात कर लिखें)

$\therefore \quad \Delta$ ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{60 \times (60-25) \times (60-39) \times (60-56)}$ वर्ग मीटर

$= 420$ वर्ग मीटर

माना कि $AD \perp BC$ और $AD = h$ मीटर

$\therefore \quad \Delta$ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times h$ वर्ग मीटर

$= \frac{1}{2} \times 56 \times h$ वर्ग मीटर $= 28h$ वर्ग मीटर

शर्तानुसार, $28h = 420$

या, $h = \frac{420}{28}$

$\therefore \quad h = \square$

$\therefore$ दीवार की लम्बाई 15 मीटर हैं।

26 मेरे भाई ने एक समबाहु त्रिभुजाकार कार्ड बनाया हैं और उस कार्ड के बीच के किसी एक बिन्दु से समबाहु त्रिभुज की तीनो भुजाओं पर तीन लम्ब अंकित किये हैं। यदि तीनो लम्ब की लम्बाई क्रम से 8 से.मी., 10 से.मी. और 11 से.मी. हो तो बनाये गये समबाहु त्रिभुजाकार कार्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

माना कि ABC समबाहु त्रिभुजाकार क्षेत्र में, AB = BC = CA = x से.मी. और OF = 8 से.मी., OD = 11 से.मी., OE = 10 से.मी.

$\therefore$ समबाहु त्रिभुजाकार क्षेत्र ABC का क्षेत्रफल $=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ वर्ग से.मी.

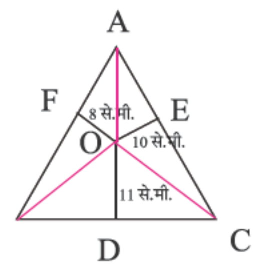
फिर Δ ABC का क्षेत्रफल

= Δ AOB का क्षेत्रफल + Δ BOC का क्षेत्रफल + Δ AOC का क्षेत्रफल

$=(\frac{1}{2}\times AB\times 8+\frac{1}{2}\times BC\times 11+\frac{1}{2}\times AC\times 10)$ वर्ग से.मी.

$=(4x+\frac{11}{2}x+5x)$ वर्ग से.मी.

$=\frac{8x+11x+10x}{2}$ वर्ग से.मी. $=\frac{29}{2}x$ वर्ग से.मी.



शर्तानुसार $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{29}{2}x$

या, $\frac{\sqrt{3}}{2}x=29$ $[\because x\neq 0]$

या, $x=\frac{58}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ समबाहु त्रिभुजाकार क्षेत्र ABC का क्षेत्रफल $=\frac{29}{2}\times\frac{58}{\sqrt{3}}$ वर्ग से.मी. $=\frac{841\sqrt{3}}{3}$ वर्ग से.मी.

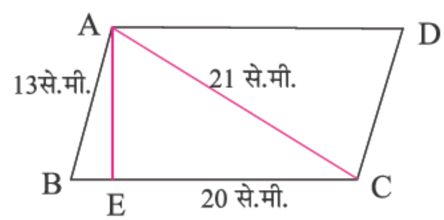
27 मैंने एक समानान्तर चतुर्भुज बनाया हैं जिसकी संलग्न भुजाओं की लम्बाई क्रमश: 13 से.मी. और 20 से.मी. हैं और माप कर देखा कि एक विकर्ण की लम्बाई 21 से.मी हैं। मैं इस समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल और ऊँचाई कितनी हैं। ज्ञात करते हूँ। (20 से.मी. भुजा को आधार मान कर इसकी ऊँचाई ज्ञात करुँ)

माना कि ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज बनाया जिसकी

AB = 13 से.मी.

BC = 20 से.मी.

और AC = 21 से.मी.



और $s=\frac{13+20+21}{2}$ से.मी. = ☐ से.मी. = ☐ से.मी.

ΔABC का क्षेत्रफल $=\sqrt{s(s-13)(s-20)(s-21)}$ वर्ग से.मी.

$\therefore$ समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र ABCD का क्षेत्रफल = 2 × Δ ABC का क्षेत्रफल = ☐ वर्ग से.मी.

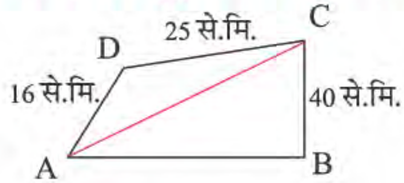
माना कि AE $\perp$ BC और AE = h से.मी.

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

अत: $20\times h=$ ☐

$\therefore h=$ ☐ समानान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई 12.6 से.मी.

28 तृषा ने एक चतुर्भुज ABCD बनाया जिसमें AB = 90 से.मी. BC = 40 से.मी., CD = 25 से.मी., DA = 16 से.मी. और $\angle ABC = 90^0$; हैं। मैं ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करता हूँ।



ABC एक समकोणी त्रिभुज हैं

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore AC^2 = 9^2 + 40^2 = \square$

$\therefore AC = 41$ से.मि.

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $\frac{1}{2} \times 9 \times 40$ वर्ग से.मि. $= \square$ वर्ग से.मि.

ΔADC का क्षेत्रफल $= \square$ वर्ग से.मि.

ABCD चतुर्भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल = Δ ABC का क्षेत्रफल + Δ ADC का क्षेत्रफल $= \square$ वर्ग से.मि.

29 इलाके के त्रिभुजाकृति के मैदान की तीनों ओर की लम्बाई क्रमश: 52 मीटर, 56 मीटर और 60 मीट हैं। प्रति वर्ग मीटर 12 रू० की दर से मैदान की मरम्मत करने में कितने रूपये खर्च होगे ज्ञात करें। प्रवेश द्वार बनाने के लिये 4 मीटर छोड़कर शेष मैदान के चारों ओर घेरा लगाने में प्रति मीटर 25 रु० की दर से कितना खर्च होगा। ज्ञात कर लिखें।

माना कि ABC त्रिभुजाकार मैदान हैं।

$\therefore \Delta$ ABC की अर्द्धपरिसीमा = $\frac{52 + 56 + 60}{2}$ मीटर = $\square$ मीटर

$\therefore \Delta$ ABC क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)}$ वर्ग मीटर = $\square$ वर्ग मीटर

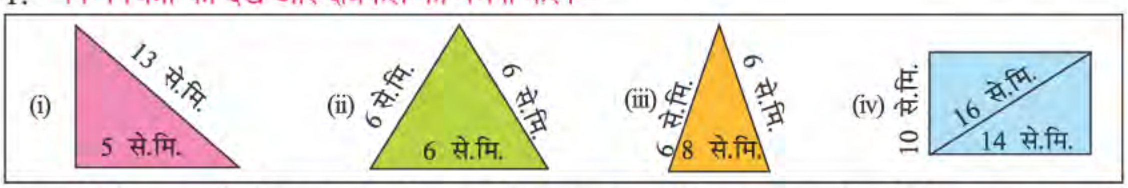
प्रति वर्ग मीटर 12 रूपये के दर से मैदान के मरम्मत करने का खर्च = 1344 × 12 रूपये

$\therefore$ मैदान के घेरे की लम्बाई = मैदान की परिसीमा – 4 मीटर = $\square$ मीटर

$\therefore$ घेरा लगाने का खर्च = $\square \times 25$ रूपये = $\square$ रूपये (स्वयं करें)

स्वयं करे— 15.4

1. निम्न चित्रों को देखें और क्षेत्रफल की गणना करें।



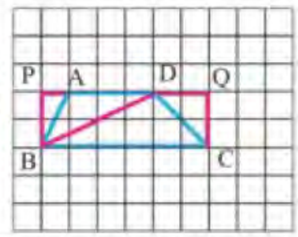
2. बोटानिकल गार्डेन के एक तालाब में कमल के फूल का ऊपरी भाग जल-तल से 2 से.मी. ऊपर था। हवा के झोंके से फूल का ऊपरी भाग 15 से.मी. दूर जाकर जल-तल में मिल जाता हैं। तो तालाब की गहराई बतायें।
3. एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई $12\sqrt{2}$ से.मी. हो, तो उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
4. हमारे त्रिभुजाकार पार्क का तीनो किनारों की लम्बाई क्रमश: 65 मीटर, 70 मीटर और 75 मीटर हैं। सबसे लम्बे किनारे से विपरीत शीर्ष बिन्दु की दूरी क्या होगी। ज्ञात करें।
5. मैं और सुजा दो त्रिभुज बनायेंगे जिनकी ऊँचाई का अनुपात 3 : 4 अनुपात हैं और इन त्रिभुजो के क्षेत्रफल का अनुपात 4 :3 हैं। दोनो त्रिभुजों के आधारों का अनुपात ज्ञात करें।

मैने एक चतुर्भुजाकार कार्ड तैयार किया हैं जिसकी एक जोड़ी विपरीत भुजायें परस्पर समानान्तर हैं अर्थात् मेरे द्वारा तैयार किया गया कार्ड ट्रेपिजियम आकार का क्षेत्र हैं।

30 इस ट्रेपिजियम आकार के कार्ड का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे। वर्गांकित कागज की सहायता से इस ट्रेपिजियम के आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की चेष्टा करें।

एक वर्गांकित कागज लिया जिस के प्रत्येक सबसे छोटे वर्ग क्षेत्र की 1 एक भुजा की लम्बाई 1 से.मी. हैं। वर्गांकित कागज पर घरों को गिनकर पाते हैं ABCD ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल = ☐ वर्ग से.मी. हैं।

तर्क सहित प्रमाणित करने की चेष्टा करें।



ABCD ट्रेपिजियम में AD||BC और B और C बिन्दुओं से दोनों ओर AD बढ़े हुए भाग पर दो लम्ब BP और CQ खींचा जो दोनों ओर AD बढ़े हुये भाग से क्रम से P और Q और बिन्दु पर मिलते हैं B और D को मिलाया।

प्रमाण — ट्रेपिजियम आकार का क्षेत्र ABCD आकार का क्षेत्रफल

= Δ ABD आकार का क्षेत्रफल + Δ DBC आकार का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times AD \times BP + \frac{1}{2} \times BC \times CQ$

$= \frac{1}{2} \times AD \times BP + \frac{1}{2} \times BC \times BP$ [$\because PQ \parallel BC, BP = CQ$]

$= \frac{1}{2} (AD + BC) \times BP$

ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल
$= \frac{1}{2} \times$ ट्रेपिजियम की समानान्तर भुजाद्वय का योग $\times$ समानान्तर भुजाओं की बीच की लम्बत दूरी।

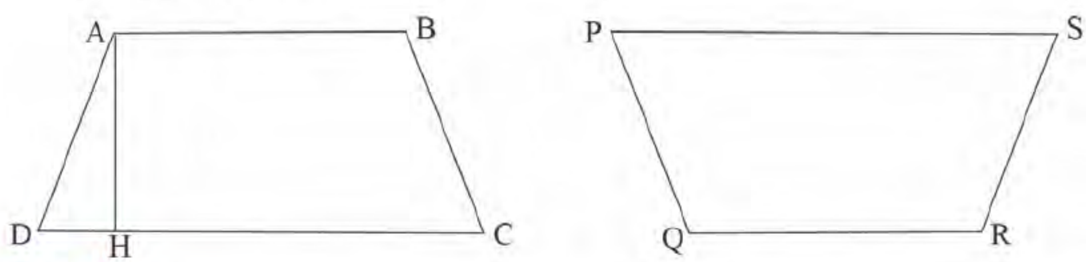
स्वप्रयास

अब स्वप्रयास से ट्रेपिजियम के आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल कैसे पाएगें देखें।

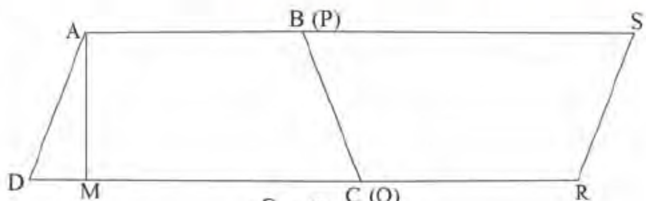
उपकरण — पिचबोर्ड, रंगीन आर्ट पेपर, कैंची, गोंद, कलम, पेंसिल।

पद्धति — (i) पहले एक ही आकार के किन्तु अलग-अलग रंग के कागजो पर ट्रेपिजियम बनाकर काट लेते हैं और ABCD व PQRS ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र पाते हैं।

माना कि ऊँचाई AM = h



(2) एक बड़े पिचबोर्ड पर ये दोनो रंगीन ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्रों ABCD और PQRS चित्र (i) की तरह गोंद लगाकर सटा देते हैं।



चित्र (i)

∴ ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र ABCD का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ समाानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र ASRD का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\ DR \times AM$

$= \frac{1}{2}\ (DC + CR) \times AM$

$= \frac{1}{2}\ (DC + AB) \times h\ [\therefore\ CR = QR = AB]$

$= \frac{1}{2} \times$ (ट्रेपिजियम की समानान्तर भुजाओं का योग) × ट्रेपिजियम की समानान्तर भुजाओं के बीच की लम्बवत् दूरी

31 सुनीता ने दूसरा एक ट्रेपिजियम आकार का बोर्ड बनाया हैं जिसकी समानान्तर भुजाओं की लम्बाई क्रम से 12.6 से.मी. और 8.6 से.मी. हैं और समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी 9.8 से.मी. हैं। तो सुनीता द्वारा बनाये गये कार्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिखें।

ट्रेपिजियम आकार के कार्ड का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ (12.2 से.मी.+ 8.6 से.मी.) × 9.8 से.मी.

= ☐ वर्ग से.मी. [स्वयं करें]

32 यदि एक ट्रेपिजियम की समानान्तर भुजाद्वय की लम्बाई क्रम से 15.3 से.मी. और 14.7 से.मी. और समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी 7 से.मी. हो तो ट्रेपिजियम का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

33 तथागत ने एक रोम्बस के आकार का कार्ड बनाया। इस रोम्बस आकार के कार्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

रोम्बास एक समानान्तर चतुर्भुज हैं
पैमाने (स्केल) की सहायता से मापकर पाते हैं, इस रोम्बस का आधार ☐ से.मी. और ऊँचाई ☐ से.मी. हैं।

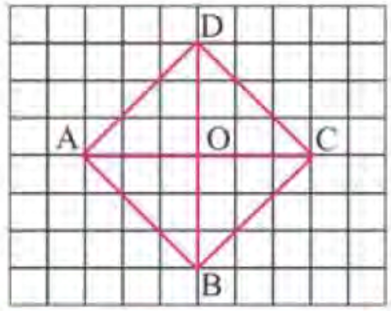
इस रोम्बस का क्षेत्रफल ☐ × ☐ वर्ग से.मी.

दूसरी तरह से भी रोम्बस के क्षेत्रफल मापा जा सकता है या नहीं तर्क सहित प्रमाणित करने की चेष्टा करें।
पहले वर्गाकित कागज पर रोम्बस बनाते हैं,

वर्गाकित कागज पर सबसे छोटे वर्ग क्षेत्र की 1 भुजा की लम्बाई 1 से.मी. मान लेते हैं।

वर्गाकित कागज पर घर गिनकर देखते हैं, रोम्बस ABCD का क्षेत्रफल = ☐ वर्ग से.मी.

अब तर्क सहित प्रमाणित करने की चेष्टा करें—



ABCD रोम्बस के दो विकर्ण AC और BD खींचा जो एक दूसरे को O बिन्दु पर काटते हैं।

प्रमाण : रोम्बस के दो विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore$ ABCD रोम्बस के AC और BD विकर्ण परस्पर O बिन्दु पर समद्विभाजित करते हैं।

अत: ABCD रोम्बस आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \Delta$ ABD का क्षेत्रफल $+ \Delta$ BCD का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times BD \times AO + \frac{1}{2} \times BD \times CO$

$= \frac{1}{2} \times BD\,(AO+CO) = \frac{1}{2} \times BD \times AC$

$= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

$\therefore$ रोम्बस आकार के क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ रोम्बस के दोनों विकर्णों की लम्बाई का गुणनफल पातें हैं ABCD रोम्बस में AC = 6 से.मी. और BD = 8 से.मी. ABCD रोम्बस आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8$ वर्ग से.मी. ☐ वर्ग से.मी.

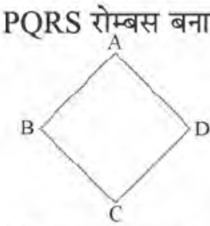
स्वप्रयास से

अब स्वप्रयास से रोम्बस के आकार के क्षेत्रफल मापने की चेष्टा करें।

उपकरण — पिचबोर्ड, रंगीन आर्ट पेपर, कैंची, गोंद, कलम, पेंसिल।

पद्धति — (1) पहले कागज मोड़कर अथवा बनाकर एक रंगीन कागज पर ABCD रोम्बस बनाकर रॉम्बस आकृति काट लेते हैं।

(2) अब ट्रेसिंग पेपर की सहायता से इसी माप का दूसरे रंग का रोम्बस PQRS रोम्बस बनाकर रोम्बस आकृति काट लेते हैं।



(3) PQRS रोम्बसाकृति क्षेत्रों के दो विकर्ण PR और QS खींचा जो एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं। विकर्णों की रेखाओं से रोम्बस को काटकर PQRS Δ POQ, Δ QOR, Δ ROS और ΔPOS पाया।

(4) एक पिचबोर्ड पर चित्र न.-(1) की रहत इन त्रिभुजों को लगा दिया।

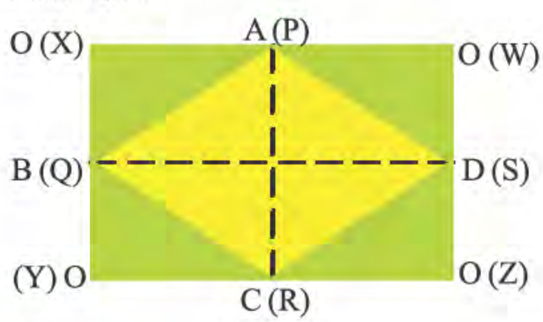
रोम्बस ABCD क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ आयत क्षेत्र XYZW

$= \frac{1}{2} \times XY \times YZ$

$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$

$= \frac{1}{2} \times$ रोम्बस के दोनो विकर्णों का गुणनफल



चित्र-(1)

पाया हैं,

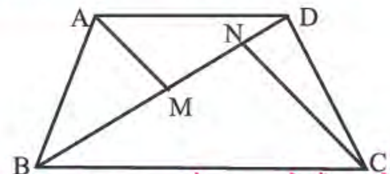
रोम्बसाकृति क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

34 ABCD एक ट्रेपिजियम बनाया हैं जिसके BD विकर्ण की लम्बाई 11 से.मी. हैं। A और C बिन्दुओं से विकर्ण BD पर दो लम्ब AM और CN खींचा जो BD से M तथा N बिन्दुओं पर मिलते हैं। AM और CN की लम्बाई क्रम से 5 से.मी. और 11 से.मी. है। ABCD ट्रेपिजियमाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

ट्रेपिजियम आकार ABCD क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \Delta$ ABC का क्षेत्रफल $+ \Delta$ BCD का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times BD \times AM + \frac{1}{2} BD \times CN = \square$ वर्ग से.मी.



35 पलाश चाचा 10 एक समान माप के त्रिभुजाकार टुकड़ो को सिलकर एक छाता तैयार करते हैं। प्रत्येक त्रिभुजाकार टुकड़ों के तीन किनारों की लम्बाई क्रम से 50 से.मी. 20 से.मी. और 50 से.मी.है। छाता तैयार करने में कपड़ो का कुल कितना परिमाप लगा ज्ञात करें।

पाते हैं, प्रत्येक त्रिभुजाकार टुकड़ा समद्विबाहु का क्षेत्र हैं। जिसकी समान भुजाओं की लम्बाई 50 से.मी. और आधार 20 से.मी. हैं।

$\therefore$ प्रत्येक टुकड़े का क्षेत्रफल $= 20\sqrt{(50)^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2}$ वर्ग से.मी. $= \square$ वर्ग से.मी.

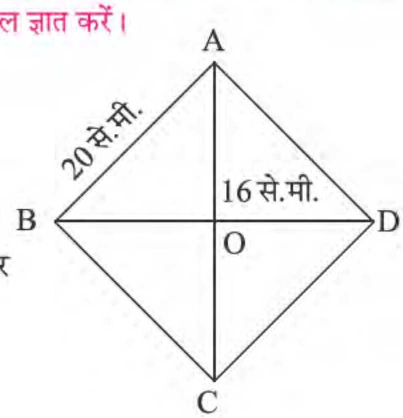
$\therefore$ 10 हरे रंग के टुकड़ों का क्षेत्रफल= $10 \times 200\sqrt{6}$ वर्ग से.मी.

$= 2000\sqrt{6}$ वर्ग से.मी.

छाता तैयार करने में कुल $2000\sqrt{6}$ वर्ग से.मी. कपड़ा लगा हैं।

36 शकील ने एक रोम्बस आकार का कार्ड बनाया जिसके विकर्णों की लम्बाई क्रम से 10 से.मी. और 12 से.मी. हैं। गणना करके शकील द्वारा बनाये गये रोम्बस आकार के कार्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करें। [स्वयं करें]

37 मैनाक ने एक रोम्बस आकार का रंगीन कार्ड तैयार किया जिसकी परिसीमा 80 से.मी. हैं और विकर्ण का लम्बाई 32 मी. हैं। कार्ड के दूसरे विकर्ण की लम्बाई और क्षेत्रफल ज्ञात करें।



ABCD रोम्बस की परिसीमा 80 से.मी.।

$\therefore AB = \frac{80}{4}$ से.मी. $= \square$ से.मी.

माना कि विकर्ण AC कर्ण = 32 से.मी.

$\therefore AO = 16$ से.मी.

$\angle AOB = 90^0$ (क्योंकि रोम्बस के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।)

$\therefore OB^2 + OA^2 = AB^2$

अत: $OB^2 = AB^2 - AO^2$

या, $OB^2 = (20$ से.मी.$)^2 - (16$ से.मी.$)^2$

या, $OB^2 = 144$ वर्ग से.मी.

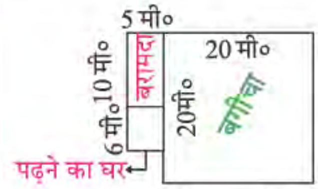
$\therefore OB = \square$ से.मी.

अत: $BD = 12 \times 2$ से.मी. $= \square$ से.मी.

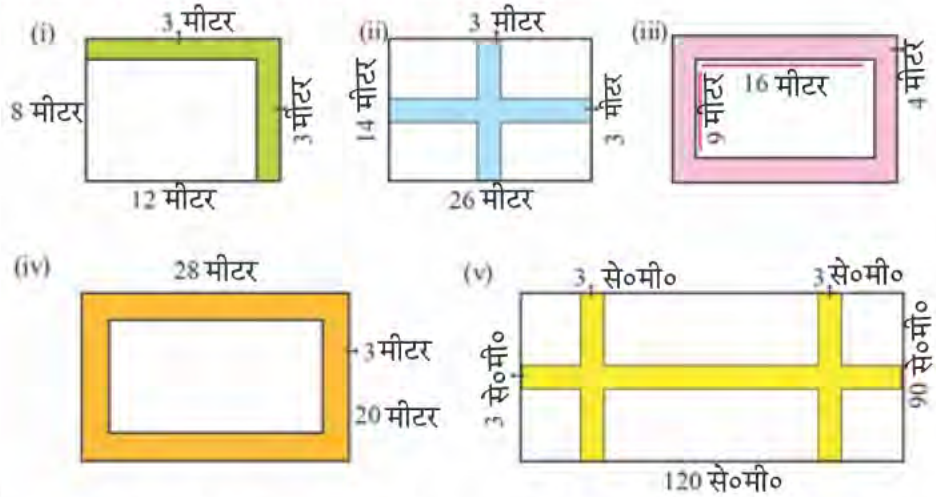
$\therefore$ रोम्बस ABCD क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 32 \times 24$ वर्ग से.मी.

$= \square$ वर्ग से.मी.

हल करें— 15.1



1. कमाल का घर देखे और निम्न प्रश्नों के उत्तर ढूँढें।
   (i) कमाल-परिवार के बगीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिखे।
   (ii) प्रति वर्ग मीटर 30 रू० की दर से बरामदे के फर्श को पक्का करने का कुल खर्च ज्ञात करें।
   (iii) कमाल अपने पढ़ने वाले कमरे में टाइल्स लगाना चाहता है। यदि प्रति टाईल का आकार 25से०मी. × 25 से०मी० हो तो पढ़ने वाले कमरे में टाईल्स लगाने में कितनी टाइल्स लगेंगी ज्ञात कर लिखें।
2. निम्न चित्रों को देखें और रंगीन अंशों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



3. विराटी महाजाति संघ के आयताकार मैदान की लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात 4 : 3 हैं। मैदान के चारों ओर एक बार चक्कर लगाने में 336 मीटर की दूरी तय की जाती है तो मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
4. समर-परिवार वर्गाकार जमीन में 3.50 रु० प्रति वर्ग मीटर की दर से खेती करने का कुल खर्च 1400 रू० होता है, तो 8.50 रु० प्रति मीटर की दर से समर-परिवार की जमीन के चारों ओर तार का घेरा बनाने में कितना खर्च होगा ?
5. सुहास-परिवार के आयताकार जमीन का क्षेत्रफल 500 वर्ग मीटर जमीन की लम्बाई 3 मीटर कम और चौड़ाई 2 मीटर बढ़ा दी जाय तो जमीन वर्गाकार हो जाती है, तो सुहास-परिवार के जमीन की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करें।
6. हमलोगो के गाँव की एक वर्गाकार जमीन की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 300 मीटर है। इस जमीन को चारों ओर से समान ऊँचाई की 3 डेसी मीटर ऊँची दीवार बनाकर घेर देना है। गणना कर ज्ञात करें कि 100 वर्ग मीटर पर 5000 रु० की दर से दीवार बनाने में कितना खर्च होता है ?
7. रेहाना-परिवार आयताकार बगीचे की लम्बाई 14 मीटर और चौड़ाई 12 मीटर है। बगीचे के अन्दर चारों ओर समान चौड़ाई का रास्ता बनाने में 20 रु० प्रति वर्ग की दर से कुल 1380 खर्च हो, तो रास्ते की चौड़ाई कितनी थी, ज्ञात करें।
8. 1200 वर्ग से० मीटर क्षेत्रफल वाले एक आयताकार जमीन की लम्बाई 40 से० मी० हो तो इसके विकर्ण पर बने वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

9. एक घर की लम्बाई 4 मीटर और चौड़ाई 6 मीटर और ऊँचाई 4 मीटर है। घर में तीन दरवाजे हैं जिनमे से प्रत्येक का आकार 1.5 मी० ×1मी० और चार खिड़कियाँ है जिनमें से प्रत्येक का आकार 1.2 मी० ×1 मी० है। घर की चारों दीवारों पर प्रति वर्ग मीटर 70 रु० की दर से रंगीन कागज लगाने का कुल खर्च ज्ञात करें।

10. एक घर की चारों दीवारों का क्षेत्रफल 42 वर्ग मीटर और फर्श का क्षेत्रफल 12 वर्ग मीटर है। घर की लम्बाई 4 मीटर हो तो घर की ऊँचाई कितनी हैं— ज्ञात कर लिखें।

11. सुजाता को 84 वर्ग से० मी० क्षेत्रफल वाले कागज पर चित्र बनाना है। कागज की लम्बाई और चौड़ाई का अन्तर 5 से० मी० है। सुजाता के कागज की परिसीमा ज्ञात करें।

12. सिराज–परिवार की वर्गाकार बगीचे के बाहर से चारों ओर 2.5 मी० चौड़ा रास्ता है। रास्ते का क्षेत्रफल 165 वर्ग मीटर है। बगीचे का क्षेत्रफल और इसके विकर्ण को ज्ञात कर लिखें। ($\sqrt{2} = 1.414$)

13. जिस वर्गाकार जमीन के विकर्ण की लम्बाई $20\sqrt{2}$ मीटर है तो उसे उसके चारों ओर दीवार से घेरने में कितनी लम्बी दीवार होगी — ज्ञात करें। प्रति मीटर 20 रु० की दर से घास लगाने में कितना खर्च होगा। ज्ञात करें।

14. हमलोग अपने आयताकार बगीचे में विकर्ण के बराबर एक बेड़ा लगायेंगे। आयताकार बगीचे की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से 12 मीटर और 7 मीटर हो तो बेड़े की लम्बाई ज्ञात करें। बेड़ा आयताकार बगीचे को जिन दो त्रिभुजो में बाँटेगा उनकी परिसीमा लिखें।

15. मौसमी–परिवार के घर के आयताकार बड़े हॉल की लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात 9:5 है एवं परिसीमा 140 मीटर है। मौसमी–परिवार इस हॉल के फर्श पर 25 से० मी० × 20 से० मी० आकार के टाइल्स लगाना चाहते हैं। प्रत्येक 100 टाइल्स का मूल्य 500 रु० हो तो मौसमी–परिवार के घर के बड़े हॉल के फर्श पर टाइल्स लगाने का खर्च ज्ञात करें।

16. 18 मीटर लम्बाई वाले एक बड़े हॉल में कार्पेट बिछाने में 2160 रु० खर्च हुआ। यदि हॉल की चौड़ाई 4 मीटर कम हो तो 1620 रु० खर्च होता। हॉल का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

17. एक आयताकार जमीन की लम्बाई 15 मीटर और लम्बाई और चौड़ाई का अन्तर 3 मीटर हैं। जमीन की परिसीमा और क्षेत्रफल निर्णय करें।

18. 385 मीटर × 60 मीटर परिमाप वाले एक चबूतरे को पक्का करने के लिये सर्वाधिक किस आकार के टाइल्स प्रयोग किये गये हैं और टाइल्स की संख्या भी ज्ञात करें।

19. **बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q):**

(i) एक वर्ग क्षेत्र के विकर्ण की लम्बाई $12\sqrt{2}$ से० मीटर है। तो वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल है—

(a) 288 वर्ग से०मी० (b) 144 वर्ग से०मी० (c)72 वर्ग से०मी० (d) 18 वर्ग से०मी०

(ii) यदि किसी वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल A_1 और इस वर्ग क्षेत्र के विकर्ण पर बने वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल A_2 हो तो $A_1:A_2$ का मान है —

(a) 1: 2 (b) 2:1 (c) 1:4 (d) 4:1

(iii) 6 मीटर लम्बी और 4 मीटर चौड़ी एक आयताकार जमीन पर 2 डेसीमीटर वर्ग वाली टाली बिछाने में टालियाँ लगेंगी —

(a) 1200 (b) 2400 (c) 600 (d) 1800

(iv) समान–समान परिसीमा वाले एक वर्ग क्षेत्र और एक आयत क्षेत्र के क्षेत्रफल क्रम से S और R हो तो

(a) S = R (b) S>R (c) S<R

(v) एक आयताकार क्षेत्र के विकर्ण की लम्बाई 10 से०मी० और क्षेत्रफल 62.5 वर्ग से०मी० हो तो आयताकार क्षेत्र की लम्बाई और चौड़ाई का योगफल है —

(a) 12 से०मी० (b) 15 से०मी० (c) 20 से०मी० (d) 25 से०मी०

20. लघूउत्तरीय प्रश्न :

(i) एक वर्गाकार भुजा की लम्बाई 10% बढ़ायी जाय तो इसका क्षेत्रफल कितना प्रतिशत बढ़ेगा ?

(ii) एक आयताकार क्षेत्र की लम्बाई 10% बढ़ाने और चौड़ाई 10 % घटाने पर इसका क्षेत्रफल कितना प्रतिशत बढ़ेगा या घटेगा ?

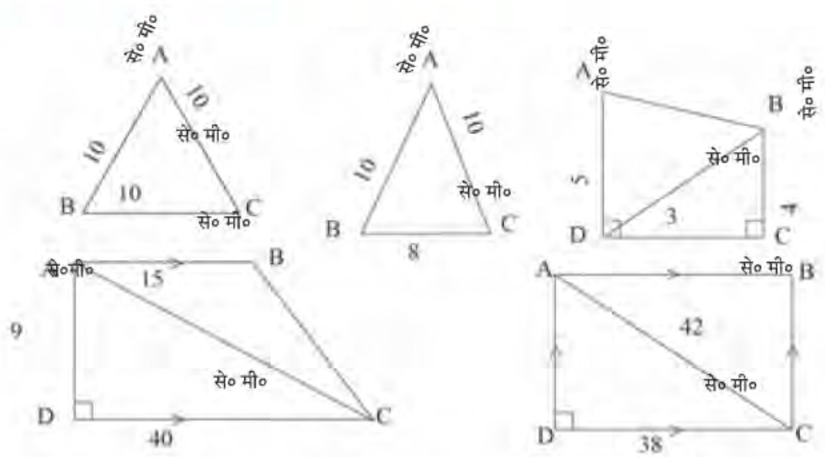
(iii) एक आयत क्षेत्र के विकर्ण की लम्बाई 5 से० मीटर है। दोनों विकर्णो के कटान बिन्दु से आयत क्षेत्र की एक चौड़ाई पर डाले गये लम्ब की लम्बाई 2 से० मीटर है तो आयत क्षेत्र की चौड़ाई कितनी होगी ?

(iv) एक वर्गाकार क्षेत्र के दोनों विकर्णो के कटान बिन्दु से किसी भुजा पर खीचें गये लम्ब की लम्बाई $2\sqrt{2}$ से० मी० हो तो वर्ग क्षेत्र के दोनों विकर्णो की लम्बाई कितनी हैं ?

(v) आयत क्षेत्र की परिसीमा 34 से० मी० और क्षेत्रफल 60 वर्ग से०मी०है। आयत के प्रत्येक विकर्ण की लम्बाई क्या हैं ?

हल करें— 15.2

1. निम्न चित्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करें —



2. किसी समबाहु त्रिभुज की परिसीमा 48 से०मी० हो तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कर लिखें।

3. ABC समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई $5\sqrt{3}$ से०मी० हो तो त्रिभुज की परिसीमा और क्षेत्रफल ज्ञात करें।

4. ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं के प्रत्येक की लम्बाई 10 से० मी० आधार भुजा की लम्बाई 4 से०मी० है तो ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

5. यदि किसी समद्विबाहु त्रिभुज के आधार भुजा की लम्बाई 12 से० मी० समान भुजाओं में से प्रत्येक भुजा की लम्बाई 10 से० मी० हो, तो इस समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिखें।

6. किसी समद्विबाहु त्रिभुज की परिसीमा 544 से० मी० और समान भुजाओं में से प्रत्येक भुजा की लम्बाई आधार भुजा की लम्बाई का $\frac{5}{6}$ वाँ भाग है, त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

7. एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई $12\sqrt{2}$ से०मी० हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

8. पृथा ने एक समानान्तर चतुर्भुज बनाया है जिसके विकर्णों की लम्बाई 6 से०मी० और 8 से०मी० और विकर्णों के बीच में बने कोण का मान 90^0 हैं। समानान्तर भुजाओं की लम्बाई लिखें और समानान्तर चतुर्भुज का गुण लिखें।

9. हमलोगो के मुहल्ले के एक त्रिभुजाकृति के एक पार्क के भुजाओं की लम्बाई का अनुपात 2:3:4 हैं, पार्क की परिसीमा 216 मीटर है।

   (i) पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

   (ii) पार्क की सर्वाधिक लम्बी भुजा तक विपरीत कोणीय बिन्दु से नीचे जाने पर कितनी दूरी तय करनी पड़ेगी ज्ञात कर लिखें।

10. पहलमपुर ग्राम के त्रिभुजाकार मैदान के तीनों किनारों की लम्बाईयाँ क्रम से 26 मीटर 28 मीटर और 30 मीटर हैं।

   (i) 5 रु० प्रति वर्ग मीटर की दर से त्रिभुजाकार मैदान में घास लगाने में कितना खर्च होगा — गणना करके लिखें।

   (ii) उस त्रिभुजाकार मैदान में प्रवेश करने के लिये प्रवेश द्वार बनाने के लिये 5 मीटर जगह छोड़कर शेष चारों ओर बेड़ा से घेरने में प्रति मीटर 18 रु० की दर से कितना खर्च होगा ज्ञात करें।

11. शकील ने एक समबाहु त्रिभुज PQR बनाया है। मैंने उस समबाहु त्रिभुज के अन्दर स्थित किसी बिन्दु से तीनों भुजाओं पर लम्ब खींचा है जिनकी लम्बाई क्रम से 10 से० मी०12 से०मी० और 8 से० मी० है तो ΔPQR का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

12. किसी समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं में से प्रत्येक भुजा की लम्बाई 20 से० मी० और इन भुजाओं के बीच बने कोण का मान 45^0 हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

13. किसी समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं में से प्रत्येक भुजा की लम्बाई 20 से० मी० और इन भुजाओं के बीच बने कोण का मान 30^0 हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

14. एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज की परिसीमा $(\sqrt{2}+1)$ से० मी० हो, तो त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई और त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

15. मारिया 18 कि० मी० प्रति घंटे की चाल से साइकिल द्वारा एक समबाहु त्रिभुजाकार मैदान के चारों ओर 10 मिनट में एक बार घूम आती हैं तो त्रिभुज के एक कोणीय बिन्दु से किसी भुजा के मध्य बिन्दु तक सीधा जाने में मारिया को कितना समय लगेगा ? $(\sqrt{3} \approx 1.732)$

16. किसी समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 1 मीटर बढ़ा देने पर त्रिभुज का क्षेत्रफल $\sqrt{3}$ वर्ग मीटर बढ़ जाता है। समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात करें।

17. एक समबाहु त्रिभुज और एक वर्गाकार क्षेत्र के क्षेत्रफल का अनुपात $\sqrt{3}:2$ है, वर्ग क्षेत्र के विकर्ण की लम्बाई 60 से० मी० हो तो समबाहु त्रिभुज की परिसीमा ज्ञात करें।

18. एक समकोण त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई और परिसीमा क्रम से 13 से० मी० और 30 से० मी० है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

19. एक समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं की लम्बाईयाँ 12 से० मी० और 5 से० मी० है। समकोण बिन्दु से कर्ण पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई लिखें।(3 दशमलव स्थान तक निकटतम मान)

20. 3 से० मी० और 4 से० मी० और 5 से० मी० भुजा वाले एक समकोण त्रिभुजाकार क्षेत्र से एक वृहत्तम वृत्ताकार वर्गाकार क्षेत्र इस प्रकार काट लिया गया ताकि वर्ग का एक शीर्ष बिन्दु त्रिभुज के कर्ण पर स्थित हो। वर्गाकार क्षेत्र की भुजा की लम्बाई ज्ञात कर लिखें।

21. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.):

(i) किसी समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 4 से० मी० हो तो त्रिभुज की ऊँचाई की परिमाप है —
(a) $4\sqrt{3}$ से० मी० (b) $16\sqrt{3}$ से० मी० (c) $8\sqrt{3}$ से० मी० (d) $2\sqrt{3}$ से० मी०

(ii) किसी समकोण समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं में से प्रत्येक की लम्बाई a इकाई है तो त्रिभुज की परिसीमा हैं —
(a) $(1+\sqrt{2})a$ इकाई (b) $(2+\sqrt{2})a$ इकाई (c) 3a इकाई (d) $(3+2\sqrt{2})a$ इकाई

(iii) एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल, परिसीमा और ऊँचाई क्रम से a, s और h हो, तो $\frac{2a}{sh}$ का मान हैं —
(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{4}$

(iv) एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं में से प्रत्येक की लम्बाई 5 से० मी० और आधार की लम्बाई 6 से० मी० हैं। त्रिभुज का क्षेत्रफल हैं —
(a) 18 वर्ग से० मी० (b) 12 वर्ग से० मी० (c) 15 वर्ग से० मी० (d) 30 वर्ग से० मी०

(v) ABC त्रिभुज की AC भुजा पर D कोई ऐसा बिन्दु है जिससे कि AD:DC=3:2 हैं। ABC त्रिभुज का क्षेत्रफल 40 वर्ग से० मी० हो तो BDC त्रिभुज का क्षेत्रफल —
(a) 16 वर्ग से० मी० (b) 24 वर्ग से० मी० (c) 30 वर्ग से० मी० (d) 36 वर्ग से० मी०

(vi) एक त्रिभुज की अर्द्धपरिसीमा से प्रत्येक भुजा की लम्बाई का अन्तर क्रम से 8 से० मी० 7 से० मी० और 5 से० मी० है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है —
(a) $20\sqrt{7}$ वर्ग से० मी० (b) $10\sqrt{14}$ वर्ग से० मी० (c) $20\sqrt{14}$ वर्ग से० मी० (d) 140 वर्ग से० मी०

22. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :

(i) किसी समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल और ऊँचाई का संख्यामान समान है,तो त्रिभुज की भुजा की लम्बाई कितनी हैं ?

(ii) किसी त्रिभुज के प्रत्येक भुजा की लम्बाई दो गुनी करने पर त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना प्रतिशत बढ़ेगी ?

(iii) एक त्रिभुज की प्रत्येक भुजा को तीन गुना करने पर त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना प्रतिशत बढ़ेगा ?

(iv) एक समकोण त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई क्रम से (x–2) से० मी० x से० मी० और (x+2) से० मी० है, त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई क्या हैं ?

(v) एक समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई वाली रेखा पर एक वर्ग क्षेत्र बनाया गया। त्रिभुज और वर्ग क्षेत्र के क्षेत्रफल का अनुपात क्या होगा ?

हल करें — 15.3

1. रातूल ने एक समानान्तर चतुर्भुज बनाया है जिसकी आधार भुजा 5 से॰ मी॰ और ऊँचाई 4 से॰ मी॰ है। रातूल द्वारा बनाये गये समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्रफल ज्ञात करें।
2. एक समानान्तर चतुर्भुज का आधार उसकी ऊँचाई का दो गुना है। यदि समानान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 98 वर्ग से॰ मी॰ हो तो समानान्तर चतुर्भुज की लम्बाई और ऊँचाई ज्ञात करें।
3. हमारे घर के पास एक समानान्तर चतुर्भुजाकार जमीन है जिसकी आसन्न भुजाओं की लम्बाईयाँ क्रम से 15 मीटर और 13 मीटर हैं। यदि इस जमीन के एक विकर्ण की लम्बाई 14 मीटर हो तो गणना कर समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
4. पृथा ने एक समानान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं की लम्बाई क्रम से 25 से॰ मी॰ और 15 से॰ मी॰ और एक विकर्ण की लम्बाई 20 से॰ मी॰ हैं। गणना करके 25 से॰ मी॰ भुजा पर समानान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई ज्ञात करें।
5. एक समानान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं की लम्बाई क्रम से 15 से॰ मी॰ और 12 से॰ मी॰ है। दोनों छोटी भुजाओं की बीच की दूरी 7.5 से॰ मी॰ हो, तो बड़ी भुजाओं की बीच की सीमा ज्ञात करें।
6. एक रोम्बस के दोनों विकर्णों की लम्बाई 15 मीटर और 20 मीटर हो, तो इसकी परिसीमा, क्षेत्रफल और ऊँचाई ज्ञात करें।
7. एक रोम्बस की परिसीमा 440 मीटर और दो समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी 22 मीटर हो, तो रोम्बसाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
8. यदि एक रोम्बस की परिसीमा 20 से॰ मी॰ और एक विकर्ण की लम्बाई 6 से॰ मी॰ हो तो रोम्बसाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
9. एक ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल 1400 वर्ग डेकामीटर है। इसकी समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी 20 डेकामीटर और समानान्तर भुजाओं की लम्बाई का अनुपात 3:4 हो, तो दोनों भुजाओं की लम्बाई ज्ञात करें।
10. 8 से॰ मी॰ भुजा वाले सम षष्ठ भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिखें। (संकेत ः समषष्ठभुज के विकर्ण खींचने पर छः सर्वांगसम त्रिभुज मिलते है।)
11. ABCD चतुर्भुज में AB= 5 मीटर BC= 12 मीटर CD = 14 मीटर DA = 15 मीटर और $\angle ABC = 90°$ हो, तो ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
12. साहीन ने ABCD एक ट्रेपिजियम बनाया है। जिसमें BD विकर्ण की लम्बाई 11से॰ मी॰ और A तथा C बिन्दुओं से BD विकर्ण पर दो लम्ब खींचा है जिनकी लम्बाई क्रम से 5 से॰ मी॰ और 11 से॰ मी॰ है।। गणना करके ट्रेपिजियमाकार ABCD क्षेत्र का क्षेत्रफल लिखें।
13. ABCDE एक पंचभुज जिसमें BC भुजा विकर्ण AD के समानान्तर है EP, BC पर लम्ब और EP, AD को Q बिन्दु पर काटती है। BC = 7 से॰ मी॰ AD=13 से॰ मी॰ PE= 9 से॰ मी॰ और $PQ = \frac{4}{9}$ PE हो तो ABCDE पंचभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
14. एक रोम्बस की भुजाओं की लम्बाई और एक वर्ग क्षेत्र की भुजाओं की लम्बाई समान हैं। वर्ग क्षेत्र के विकर्ण की लम्बाई $40\sqrt{2}$ से॰ मी॰ है। यदि रोम्बस के दोनों विकर्णों का अनुपात 3:4 हो तो रोम्बस के आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

15. किसी समद्विबाहु ट्रेपिजियम की तीर्यक भुजाओं में से प्रत्येक की लम्बाई 10 से० मी० और दोनों समानान्तर भुजाओं की लम्बाई क्रम से 5 से० मी० और 17 से० मी० है। ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र के विकर्ण की लम्बाई और क्षेत्रफल ज्ञात करें।

16. एक ट्रेपिजियम की समानान्तर भुजाओं की लम्बाई 19 से० मी० और 9 से० मी० और दोनों तिर्यक भुजाओं की लम्बाई 8 से० मी० और 6 से० मी० है। ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

17. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.)

(i) एक समानान्तर चतुभुज की ऊँचाई आधार भुजा का $\frac{1}{3}$ हैं। समानान्तर चतुभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 192 वर्ग से० मी० हो तो बड़े विकर्ण की लम्बाई है —

(a) 4 से० मी० (b) 8 से० मी० (c) 16 से० मी० (d) 24 से० मी०

(ii) किसी रोम्बस की एक भुजा की लम्बाई 6 से० मी० और एक कोण का मान 60^0 हो तो रोम्बसाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल है —

(a) $9\sqrt{3}$ वर्ग से० मी० (b) $18\sqrt{3}$ वर्ग से० मी० (c)$36\sqrt{3}$ वर्ग से० मी० (d)$6\sqrt{3}$ वर्ग से० मी०

(iii) एक रोम्बस के एक विकर्ण की लम्बाई दूसरे विकर्ण की लम्बाई की तीन गुनी है। यदि रोम्बस आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल 96 वर्ग से० मी० हो तो बड़े विकर्ण की लम्बाई हैं —

(a) 8 से० मी० (b) 12 से० मी० (c) 16 से० मी० (d) 24 से० मी०

(iv) एक रोम्बस और एक वर्ग की एक ही भुजा पर स्थित है। वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल x^2 वर्ग इकाई एवं रोम्बस आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल y^2 वर्ग इकाई हो तो —

(a) $y > x^2$ (b) $y < x^2$ (c) $y = x^2$

(v) एक ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल 162 वर्ग से० मी० और ऊँचाई 6 से० मी० है। ट्रेपिजियम की एर भुजा की लम्बाई 23 से० मी० हो तो दूसरी भुजा की लम्बाई है—

(a) 29 से० मी० (b) 31से० मी० (c) 32 से० मी० (d) 33 से० मी०

18. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :

(i) ABCD समानान्तर चर्तुभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 96 वर्ग से० मी० और BD विकर्ण की लम्बाई 12 से० मी० है। A बिन्दु से BD विकर्ण पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई कितनी हैं ?

(ii) एक समानान्तर चर्तुभुज की आसन्न भुजाओं की लम्बाई 5 से० मी० है। 3 से० मी० हैं। बड़ी भुजाओं के बीच की दूरी 2 से० मी० हो तो समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी बतायें।

(iii) एक रोम्बास की ऊँचाई 14 से० मी० और भुजा की लम्बाई 5 से० मी० है। रोम्बास आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा ?

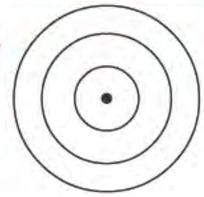
(iv) किसी समद्विबाहु ट्रेपिजियम में समानान्तर भुजाओं में से किसी एक का संलग्न कोण 45^0 है ट्रेपिजियम की तिर्यक भुजा की लम्बाई 62 से० मी० हो तो समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी कितनी है ?

(v) ABCD समानान्तर चर्तुभुज में AB= 4 से० मी० BC = 6 से० मी० और $\angle ABC = 30°$ हो तो ABCD समानान्तर चर्तुभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना ?

16 वृत्त की परिधि
(CIRCUMFERENCE OF CIRCLE)

एक सप्ताह बाद हमलोगों के रवीन्द्रनगर के बड़े मैंदान में दौड़ प्रतियोगिता होगी। मैदान में वृत्ताकार रास्ता बनाना होगा। इसीलिए हमलोगों ने चूने से एक ही केन्द्र वाले छोटे–बड़े कई वृत्त बनाये हैं।

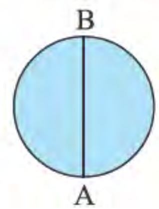
किन्तु हमलोग यदि इन छोटे बड़े वृत्तों में से प्रत्येक वृत्त के बराबर पूरा दौड़े तो कितनी दूरी दौड़ेगें। इस रास्ते की लम्बाई कैसे ज्ञात करेंगे ? अर्थात प्रत्येक वृत्त की परिधि कैसे पायेंगे।



स्व प्रयास से

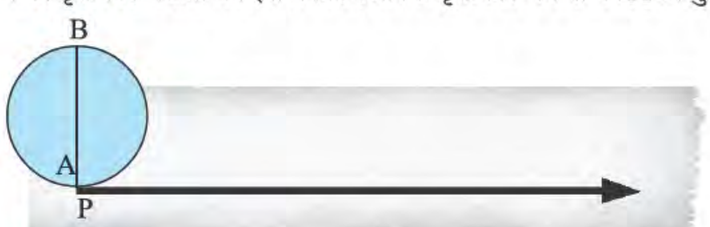
आज हम सभी मित्रों ने मोटे कागज से 10 चकतियों बनायी हैं। इन चकतियों की परिधि की लम्बाई जानने का प्रयास करते हैं।

(1) पहले 1वृत्ताकार चकती को समान रूप से मोड़कर दो समान–समान भाग एक दूसरे पर रखते है और मोड़ के निशान को रेखांकित कर AB पाते हैं और A पर दाग लगाकर चिन्हित कर लेते हैं।

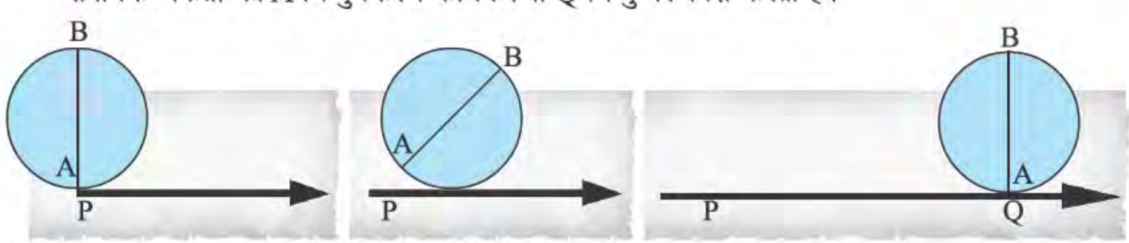


(2) इस बार कागज पर एक किरण अंकित किया जिसके किनारे का बिन्दु P हैं।

(3) अब कागज पर वृत्ताकार चकती को इस प्रकार रखा कि वृत्ताकार चकती का A बिन्दु किरण के P बिन्दु पर पड़े।



(4) अब वृत्ताकार चकती को किरण पर एक बार पूरा घुमाया ताकि बिन्दु A फिर से किरण को स्पर्श करे। माना कि चकती का A बिन्दु किरण को फिर से Q बिन्दु पर स्पर्श करता है।



PQ रेखाखण्ड की लम्बाई ही वृत्ताकार चकती की परिधि की लम्बाई है।

सफेद कागज पर किरण अंकित करके इसी प्रकार वृत्ताकार चकती की परिधि की लम्बाई को तीन चार बार निकाला।

अब 5 वृत्ताकार चकतियों के अर्द्धव्यास और व्यास की लम्बाई और परिधि जानकर निम्न सारणी की पूर्ति करें।

वृत्त	अर्द्धव्यास	व्यास	परिधि	अनुपात = $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$
1 न०	7 से०मी०	14 से०मी०	44 से०मी०	$\frac{44}{14} = \frac{22}{7} \approx 3.14$
2 न०	10.5 से०मी०	21 से०मी०	66 से०मी०	$\frac{66}{21} = \frac{22}{7} \approx 3.14$
3 न०	5 से०मी०	10 से०मी०	31 से०मी०	$\frac{31}{10} = 3.1$
4 न०	8 से०मी०	16 से०मी०	50.5 से०मी०	$\frac{50.5}{16} \approx 3.16$
5 न०	10 से०मी०	____ से०मी०	____ से०मी०	$\frac{\square}{\square} = \square$

शेष गोलाकार चकतियों के माप स्वयं लिखे।

पाते है : प्रत्येक वृत्त की परिधि उसके व्यास का ____ [1/2/3] गुणा से कुछ अधिक है। अर्थात् प्रत्येक वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात एक निश्चित संख्या है। इस निश्चित संख्या को π (पाई) चिन्ह द्वारा प्रकट किया जाता है और π का मान $\frac{22}{7}$(लगभग) या ____ (लगभग) है।

अब माना कि एक वृत्त का अर्द्धव्यास = r इकाई

अतः वृत्त के व्यास की लम्बाई = 2r इकाई

$\therefore \frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{व्यास की लम्बाई}} = \pi$

$\therefore$ वृत्त की परिधि = π × व्यास की लम्बाई = $\pi \times 2r$ इकाई = $2\pi r$ इकाई

जहाँ π का मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 (लगभग)है।

$\therefore$ वृत्त की परिधि = π × व्यास की लम्बाई = 2 × π × अर्द्धव्यास की लम्बाई

1 जिस वृत्त के व्यास की लम्बाई 12 से०मी० उसके परिधि की माप निकालें।

वृत्त की परिधि = π × 12 से०मी० = 3.14 × 12 से०मी० = ____ से०मी०

2 दो वृत्तों के व्यासों की लम्बाई कम से 14 से०मी० और 20 से०मी० है। उनकी परिधि की ल० ज्ञात करें। [स्वयं करें]

3 खेल के मैदान के एक केन्द्रिक वृत्तों के अर्द्धव्यासों की लम्बाई 14 मी०, 15 मी०, 16 मी० हो, तो उन वृत्तों के परिधि पर एक बार दौड़ने पर प्रत्येक वृत्ताकार पथ के लिये कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी गणना करके लिखें।

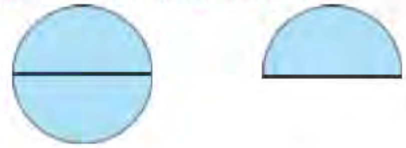
यदि वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई 14 मीटर हो, तो परिधि = $2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \overset{2}{\cancel{14}}$ मीटर = ____ मीटर

$\therefore$ वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई 14 मीटर हो तो वृत्त पर एक बार पूरा दौड़ने पर 88 मीटर दौड़ना होगा।

शेष वृत्तों पर एक बार पूरा दौड़ने पर कितना दौड़ना पड़ेगा – गणना कर लिखें। [स्वयं करे]

4 यदि किसी वृत्ताकार चकती को दो समान भागों में बाटे तो प्रत्येक भाग की परिसीमा क्या होगी ?

माना कि वृत्ताकार चकती का अर्द्धव्यास r इकाई है,



$\therefore$ परिधि = ____ इकाई

अर्द्धवृत्त की परिधि = $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ इकाई = πr इकाई

वृत्त के व्यास की लम्बाई = ____ इकाई

$\therefore$ अर्द्धवृत्ताकार चकती की परिसीमा = ($\pi r + 2r$) इकाई

$\therefore$ अर्द्धवृत्ताकार की परिसीमा = $\pi r + 2r$

5 जिस अर्द्धवृत्ताकार चकती के अर्द्धव्यास की लम्बाई 10.5 से॰मी॰ हो उसकी परिसीमा = ($\pi \times 10.5 + 2 \times 10.5$) से॰मी॰ = ____ से॰मी॰। [स्वयं करे]

6 रामू - परिवार अर्द्धवृत्ताकार जमीन को चारो ओर से बेड़ा लगाकर घेरेंगे। यदि अर्द्धवृत्ताकार जमीन के अर्द्धव्यास की लम्बाई 9 मीटर हो, तो प्रति मीटर 22 रु॰ की दर से रामू-परिवार की जमीन के चारो ओर बेड़ा लगाने में कुल कितने रुपये खर्च होर्गे-ज्ञात करें।

रामू-परिवार की अर्द्धवृत्ताकार जमीन की परिसीमा

= $\frac{22}{7} \times 9$ मीटर + ____ मीटर = ____ मीटर

$\therefore$ जमीन के चारो ओर बेड़ा लगाने का खर्च = ____ × ____ रु॰ = ____ रु॰

7 मीता-परिवार की अर्द्धवृत्ताकार जमीन को बेड़ा लगाकर घेरने में 162 मीटर लम्बे रेलिंग की जरुरत है। व्यास की लम्बाई में मीता परिवार की जमीन की लम्बाई ज्ञात करें।

माना कि मीता-परिवार की अर्द्धवृत्ताकार जमीन का अर्द्धव्यास r मीटर है।

$\therefore$ अर्द्धवृत्ताकार जमीन की परिसीमा = ($\pi r + 2r$) मीटर = ($\frac{22}{7}r + 2r$) मीटर

= $\frac{22r + 14r}{7}$ मीटर = $\frac{36r}{7}$ मीटर

शर्त्तानुसार, $\frac{36r}{7} = 162$

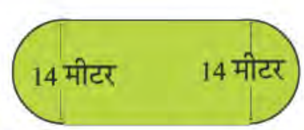
या, $r = \frac{162 \times 7}{36}$ $\therefore r =$ ____

$\therefore$ मीता-परिवार की जमीन के व्यास की लम्बाई = 2r मीटर = ____ मीटर

8 निम्न प्रत्येक जमीन की परिसीमा लिखें—

(a)

(b)



(a) जमीन के अर्द्धवृत्ताकार भाग की परिसीमा = π × अर्द्धव्यास की ल॰

$= \pi \times \frac{14}{2}$ मी॰

$= \frac{22}{7} \times \frac{14}{2}$ मी॰ = 22 मी॰

$\therefore$ अभीष्ट जमीन की परिसीमा = 30 मी॰ + 14 मी॰ + 30 मी॰ + 22 मी॰ = ____ मी॰

इसी प्रकार गणना करके पाते हैं (b) जमीन परिसीमा = ____ मी॰ [स्वयं करे]

9 एक ईंजिन के सामने वाले चक्के के व्यास की लम्बाई 70 से०मी० और पिछले चक्के के व्यास की ल०168 से०मी० है। जिस दूरी को तय करने में सामने वाले चक्के को 600 बार घूमता है, उसी दूरी को तय करने में पिछले चक्के को कितनी बार घूमना पड़ेगा— गणना करके लिखें।

ईंजिन के सामने वाले चक्के के व्यास की लम्बाई 70 से०मी० है.

∴ अर्द्धव्यास की लम्बाई = $\frac{70}{2}$ से०मी० = 35 से०मी०

सामने वाला चक्का एक बार घूमकर अपनी परिधि के बराबर दूरी तय करेगा। अतः देखे कि सामने का चक्का एक बार घुमकर कितनी दूरी तय करता है।

सामने के चक्के की परिधि = $2 \times \pi \times 35$ से०मी०

$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{35}^{5}$ से०मी० = ☐ से०मी०

∴ सामने वाला चक्का 1 बार घूमकर तय करता है = 220 से०मी०

∴ सामने का चक्का 600 बार घूमकर तय करता है = 220×600 से०मी०

किन्तु पीछे का चक्का 220×600 से०मी० की दूरी तय करने में कितनी बार घूमेगा गणना करते हैं—

पिछले चक्के के व्यास की ल० = ☐ से०मी०

∴ अर्द्धव्यास की ल० = ☐ से०मी०

∴ परिधि $= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{84}^{12}$ से०मी० $= 44 \times 12$ से०मी०

∴ पिछले चक्का घूमेगा = $\frac{\cancel{220}^{5} \times \cancel{600}^{50}}{\cancel{44} \times \cancel{12}}$ बार = ☐ बार

∴ जिस दूरी को तय करने में सामने वाला चक्का 600 बार घूमता है उसी दूरी को तय करने में पिछला चक्का 250 बार घूमेगा।

10 यदि ईंजन के सामने की पहिये के व्यास की लम्बाई 80 से०मी० और पीछे के पीछे के पहिये के व्यास की लम्बाई 224 से०मी० हो तो जिस दूरी को तय करने में सामने का पहिया 700 बार घूमता है उसी दूरी को तय करने में पीछे के पहिये को कितनी बार घूमना पड़ेगा? [स्वयं करें]

11 हमलोगों के वृत्ताकार पार्क के चारों ओर समान चौड़ाई का एक रास्ता है, रास्ते के बाहरी सीमा की परिधि की लम्बाई 500 मीटर और भीतरी सीमा की परिधि की लम्बाई 478 मीटर है तो रास्ता कितना चौड़ा है - ज्ञात करके लिखें।

माना कि रास्ता सहित पार्क के अर्द्धव्यास की लम्बाई R मीटर और पार्क के अर्द्धव्यास की ल० r मीटर है।

∴ रास्ता $(R - r)$ मी० चौड़ा है।

प्रश्नानुसार, $2\pi R = 500$

$2\pi r = 478$

$2\pi R - 2\pi r = 500 - 478$

या, $2\pi (R - r) = 22$

या, $2 \times \frac{22}{7}(R - r) = 22$

या, $R - r = \frac{\cancel{22} \times 7}{2 \times \cancel{22}}$

∴ $R - r = 3.5$

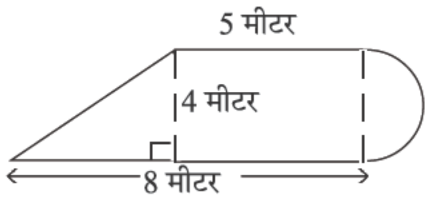
∴ रास्ता 3.5 मीटर चौड़ा है;

12 एक वृत्ताकार पार्क की भीतरी परिधि 132 मीटर और बाहरी परिधि 154 मीटर हो तो रास्ता कितना चौड़ा है-ज्ञात करें। [स्वयं करें]

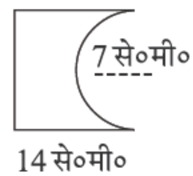
हल करें – 16

1. निम्न चित्रों की परिसीमा ज्ञात करें—

(i)



(ii)



2. 35 मी० लम्बे अर्द्धव्यास वाले एक वृत्ताकार तार का रिंग तैयार करने में कितना लम्बा तार लगेगा – लिखे।
3. ट्रेन के एक पहिये के अर्द्धव्यास की लम्बाई 0.35 मीटर है। 1 मिनट मे पहिया 450 बार घूमे तो ट्रेन की चाल प्रति घण्टा कितने कि०मी० होगी – गणना कर लिखें।
4. अमोदपुर गाँव के एक वृत्ताकार मैदान के अर्द्धव्यास की लम्बाई 280 मीटर है। चैताली 5.5 किमी० प्रति घ० की चाल से मैदान की परिक्रमा करना चाहती है। मैदान के चारों ओर परीक्षण करने में चैताली को कितना समय लगेगा ?
5. तथागत ने तांबे के एक तार को आयताकार मोड़ा है जिसकी लम्बाई 18 से०मी० और चौड़ाई 15 से०मी० है। मैंने इसी तार को मोड़कर एक वृत्त बनाया। तो इस वृत्ताकार तांबे के तार का अर्द्धव्यास लिखें।
6. एक अर्द्धवृत्ताकार मैदान की परिसीमा 108 मीटर हो तो मैदान के व्यास की लम्बाई ज्ञात करें।
7. एक पहिये की परिधि और व्यास की ल० का अन्तर 75 से०मी० हो तो उस पहिये के अर्द्धव्यास की ल० लिखें।
8. 56 मीटर लम्बे व्यास के वृत्ताकार ट्रैक पर पूजा और जाकिर ने एक ही जगह से एक ही समय प्रतियोगिता प्रारम्भ करते हैं। पूजा जब 10 बार घूमकर प्रतियोगिता समाप्त करती है तब जाकिर एक चक्कर पीछे रह जाता है। प्रतियोगिता कितने मीटर की थी और पूजा ने जाकिर को कितने मीटर से हराया – ज्ञात कर लिखें।
9. हमारे मुहल्ले के एक परत कुंएँ की परिधि 440 से०मी० हैं। इस पातकुएँ के चारों ओर समान चौड़ाई का पत्थर का पाट है। यदि पाट संकेत पातकुएँ की परिधि 616 से०मी० हो तो पत्थर के पाट की चौड़ाई बतायें।
10. गांव के नियामत चाचा ने एक मीटर के पहिये के साथ बेल्ट लगाकर एक मशीन के पहिये को जोड़ा। मोटर के पहिये के व्यास की ल० 14 से०मी० और मशीन के पहिये के व्यास की ल० 94.5 से०मी० है। मीटर का पहिया यदि प्रति सेकेण्ड 27 बार घूमे तब मशीन का पहिया एक घण्टे में कितनी बार घूमेगा–ज्ञात कर लिखें।
11. हमलोगों के क्लब की घड़ी के घण्टे की सूई और मिनट की सूई की लम्बाई क्रम से 8.4 से०मी० और 14 से०मी० है। एकदिन में प्रतिसूई कितनी दूरी तय करेगी — गणना कर लिखें।

> **संकेत**: घण्टे की सूई 12 घण्टे में तय करेगी $= 2 \times \frac{22}{7} \times 8.4$ से०मी० दूरी
>
> मिनट की सूई 1 घण्टे में तय करेगी $= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ से०मी० दूरी

12. मैंने और मित्र मिहिर ने दो वृत्त बनाये हैं जिनके व्यासों का अनुपात ☐ : ☐ हैं। तो गणना करके हमारे द्वारा बनाये गये वृत्तों की परिधियों का अनुपात ☐ : ☐ पाते हैं।

13. रहीम को एक वृत्ताकार मैदान के चारों ओर एक बार चक्कर लगाने में जितना समय लगता है, उससे व्यास के बराबर एक सिरे से दूसरे सिरे तक जाने में 40 सेकेण्ड कम समय लगता है। रहीम का वेग 90 मीटर प्रति मिनट हो तो मैदान के व्यास की लम्बाई ज्ञात करें।

14. दो वृत्तों की परिधि का अनुपात 2:3 और उनके अर्द्धव्यास की लम्बाईयों का अन्तर 2 से॰मी॰ हैं। दोनों वृत्तो के व्यास की लम्बाई ज्ञात करें।

15. 196 वर्ग से॰मी॰ क्षेत्रफर वाले वर्गाकार पत्तर से चार वृहतम आकार के वृत्ताकार पत्तर काट लिये गये। प्रत्येक वृत्ताकार पत्तर की परिधि ज्ञात करें।

16. एक वृत्ताकार मैदान की परिधि पर चलते हुये एक ओर से दूसरी ओर तक जाने में नासिका को जितना समय लगता है मैदान के व्यास पर चलते हुये जानेगें 45 मिनट समय कम लगता है। नासिका का वेग 80 मीटर प्रति मिनट हो तो मैदान के व्यास की लम्बाई लिखें।

17. महिम को साइकिल द्वारा 7 मी॰ 5 डेसी॰मी॰ वृत्ताकार रास्ते के बाहरी परिधि और भीतरी परिधि की दूरी तय करने में क्रम से 46 सेकेण्ड और 44 सेकेण्ड समय लगता हैं। भीतरी परिधि के लिये रास्ते का व्यास कितना हो।

18. एक साइकिल आरोही को एक वृत्ताकार पथ के बाहरी और भीतरी किनारो के बराबर दूरी तय करने में लगे समय का अनुपात 20:19 है। यदि पथ 5 मीटर चौड़ा हो, तो रास्ते के भीतरी व्यास की लम्बाई लिखें।

19. **बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.):**

(i) एक घड़ी की घण्टे की सूई और मिनट की सूई के वेग का अनुपात हैं।

(a) 1:12 (b) 12:1 (c) 1:24 (d) 24:1

(ii) एक वृत्ताकार पार्क का एक चक्कर लगाने में सोमा को $\frac{\pi x}{100}$ मिनट समय लगा। पार्क को व्यास के समान सीध पार करने में सोमा को लगा समय हैं।

(a) $\frac{x}{200}$ मिनट (b) $\frac{x}{100}$ मिनट (c) $\frac{\pi}{100}$ मिनट (d) $\frac{\pi}{200}$ मिनट

(iii) एक वृत्त एक वर्ग में बना हैं। वर्ग क्षेत्र के भुजा की लम्बाई 10 से॰मी॰ हो तो वृत्त के व्यास की ल॰ हैं

(a) 10 से॰मी॰ (b) 5 से॰मी॰. (c) 20 से॰मी॰ (d) $10\sqrt{2}$ से॰मी॰

(iv) एक वृत्त एक वर्ग में बना है। वर्ग क्षेत्र के भुजा की लम्बाई 5 से॰मी॰ हो तो वृत्त के व्यास की ल॰ हैं

(a) $5\sqrt{2}$ से॰मी॰ (b) $10\sqrt{2}$ से॰मी॰ (c) 5 से॰मी॰ (d) 10 से॰मी॰

(v) एक वृत्ताकार चकती 5 से॰मी॰ चौड़ी है। इसके बाहरी अर्द्धव्यास की लम्बाई और भीतरी अर्द्धव्यास की ल॰का अन्तर हैं

(a) 5 से॰मी॰ (b) 2.5 से॰मी॰ (c) 10 से॰मी॰ (d) कोई नहीं

20. **संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :**

(i) एक अर्द्धवृत की परिसीमा 36 से॰मी॰ से॰मी॰ हो तो अर्द्धवृत्त के व्यास की ल॰ कितनी हैं?

(ii) एक घड़ी की मिनट की सूई की ल॰ 7 से॰मी॰। 90^0 कोण घूमने में मिनट की सूई को कितनी लम्बाई की दूरी तय करनी पड़ेगी?

(iii) किसी वर्ग क्षेत्र के अन्तर्वृत्त और परिवृत्त के अर्द्धव्यास का अनुपात क्या है?

(iv) एक घड़ी की मिनट की सूई की ल॰ 7 से॰मी॰। 15 मिनट में यह सूई कितनी लम्बाई तय करेगी?

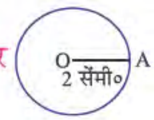
(v) एक वृत्त का व्यास और एक वर्ग की भुजा परस्पर लम्बाई में समान हो तो इनकी परिसीमा का अनुपात क्या हैं?

17 संगामी रेखाओं वाले प्रमेय
(THEOREMS ON CONCURRENCE)

प्रत्येक वर्ष की तरह इस वर्ष भी हमलोगों के विद्यालय में परिवेश दिवस पालन किया जायेगा। इस वर्ष हमलोगो ने सोचा हैं कि परिवेश सचेतनता के लिये बनाई गयी तस्वीरो को अलग-अलग पिच बोर्डो पर न लगाकर एक बड़े पिचबोर्ड पर अलग-अलग वृत्त बनाकर वृत्ताकार क्षेत्र में एक साथ रखेंगे।

पहले चित्र (दिखाये गये) की तरह पिचबोर्ड को कई वृत्ताकार क्षेत्रों में बाटने की चेष्टा करेंगे। इसलिए विद्यालय के ब्लैकबोर्ड पर विभिन्न मापों के वृत्त बनाने की चेष्टा करेगे। किन्तु एक निश्चित वृत्त बनाने के लिये एक निश्चित केन्द्र और एक निश्चित लम्बाई के अर्द्धव्यास की जरुरत हैं।

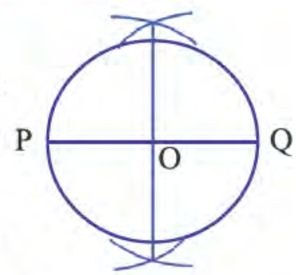
पहले बोर्ड पर एकबिन्दु O को केन्द्र मानकर 2 से०मी० लम्बा अर्द्धव्यास लेकर एक वृत्त पेन्सिल कंपास की सहायता से बनाया।



सुमिता ने बोर्ड पर दो बिन्दु P और Q अंकित किये।

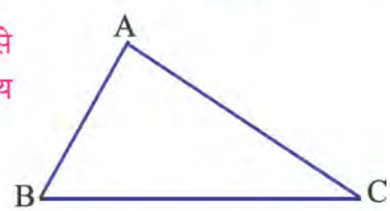
P और Q बिन्दुगामी एक वृत्त बनाने की चेष्टा करें जिसके व्यास की लम्बाई PQ हैं।

पहले P और Q को मिलाकर PQ सरल रेखाखण्ड पाया।
अब PQ रेखाखण्ड को पेंसिल कंपास की सहायता से समद्विभाजित करके केन्द्र O पाया। O को केन्द्र मानकर OP या OQ की लम्बाई के समान अर्द्धव्यास का एक वृत्त बनाया जिसका एक व्यास PQ हैं।



हमारे मित्र रसीद ने बोर्ड पर तीन असमरेखीय बिन्दु A, B और C अंकित किया।

तीन असमरेखीय बिन्दुओं की सहायता से एक निश्चित वृत्त कैसे पायेंगे? एक निश्चित वृत्त बनाने की चेष्टा करे जो इन तीन असमरेखीय बिन्दुओं A, B और C से होकर गुजरती हैं।

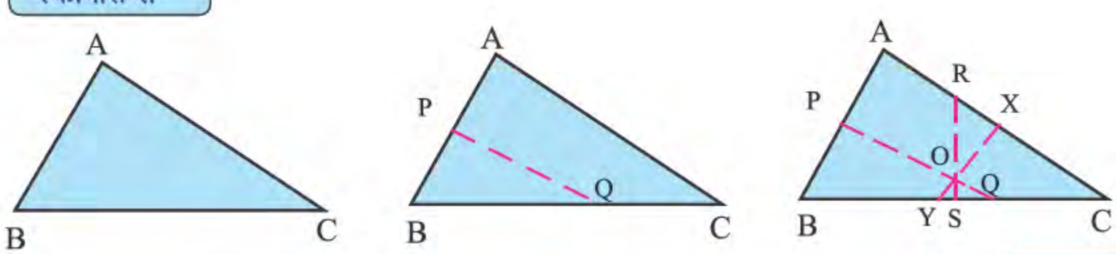


A , B; B, C; और C, A को मिलाकर ΔABC पाया।

$\therefore$ एक निर्दिष्ट वृत्त बनायेंगे जो Δ ABC का शीर्ष बिन्दुगामी हैं।

निर्दिष्ट वृत्त का केन्द्र पाने के लिये पहले स्वप्रयास से एक बिन्दु पाने का प्रयास करेंगे जो A, B और C से समान दूरी पर हो।

स्वप्रयास से



(I) पुस्तिका पर कोई त्रिभुज ABC बनाकर इसे काट लिया।

(II) अब AB भुजा को ऐसे मोड़ा कि A बिन्दु B बिन्दु पर पड़े और मोड़ को खोलकर PQ लम्ब समद्विभाजक पाया।

(III) इसी प्रकार BC और CA को मोड़कर दोनो भुजाओं का लम्ब समद्विभाजक RS और XY पाया।

देखते हैं, PQ, RS और XY लम्ब समद्विभाजक तीनों O बिन्दु पर एक दूसरे से मिलते हैं।

∴ स्वप्रयास से पाते है, ΔABC की AB, BC और CA के लम्ब समद्विभाजक तीनो संगामी हैं।

दो से अधिक सरल रेखाओं का एक सर्वनिष्ठ बिन्दु (एक कटान बिन्दु) हो तो सरल रेखाओं को संगामी सरल रेखायें (Concurrent lines) कहा जाता हैं।

मापकर देखते हैं, O बिन्दु A, B और C बिन्दुओं से समान दूरी पर हैं अर्थात् OA = OB = OC हैं। इसलिए O को केन्द्र मानकर OA, OB या OC के समान अर्द्धव्यास लेकर खीचा गया वृत्त A, B और C बिन्दुगामी हैं।

O बिन्दु को क्या कहा जाता हैं ?

O बिन्दु को ΔABC का परिकेन्द्र कहा जाता हैं, और O बिन्दु को केन्द्र मानकर जो वृत्त पाया गया जो ΔABC को शीर्ष बिन्दुगामी हैं, उसे ΔABC का परिवृत्त कहा जाता हैं। OA या OB या OC हुआ ΔABC का परिअर्द्धव्यास हैं।

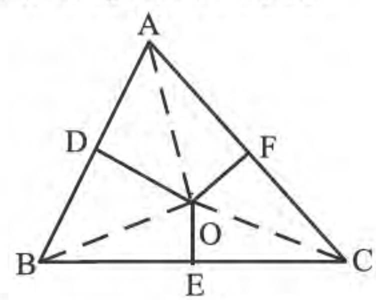
अब अपनी पुस्तिका पर ΔPQR बनाकर इस त्रिभुजाकार क्षेत्र को काट लें और इसी प्रकार स्वप्रयास द्वारा कागज मोड़कर PQ, QR और RP के लम्ब समद्विभाजक निर्णय करें,

पाते हैं. PQ, QR और RP के समद्विभाजक तीनों ☐ हैं। [स्वयं करे]

प्रमेय- **27** तर्क सहित प्रमाणित करे कि त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते हैं।

माना कि ΔABC की AB, BC और CA भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E तथा F हैं; D और E बिन्दु पर क्रमशः AB और BC भुजा पर खींचे गये लम्ब दोनो एक दूसरे से O बिन्दु पर मिलते हैं (चूंकि AB और BC परस्पर समानान्तर नहीं हैं)। O, F को मिलाया।

प्रमाणित करना हैं कि : D, E और F बिन्दु पर क्रमशः AB, BC और CA पर अंकित लम्ब तीनो संगामी हैं। अर्थात OF, AC भुजा पर लम्ब हैं सिद्ध करते ही प्रमाणित हो जायेगा कि त्रिभुज की भुजाओ के लम्बसमद्विभाजक संगामी होते हैं।



अंकन : O,A ; O, B ; O, C को मिलाया।

प्रमाण : ΔAOD और ΔBOD में,

AD = BD [∵ D, AB का मध्य बिन्दु हैं]

$\angle ADO = \angle BDO$ = 1 समकोण [∵ $OD \perp AB$]

OD उभयनिष्ट हैं।

∴ $\Delta AOD \cong \Delta BOD$ [सर्वाजसमता की S – A – S शर्त से]

∴ OA = OB [सर्वांसम त्रिभुजों की संगत भुजाये हैं] .... (i)

इसी प्रकार सर्वांगसमता की S-A-S शर्त से, $\triangle BOE \cong \triangle COE$

∴ OB = OC .... (ii)

∴ (i) और (ii) से पाते हैं, OA = OC .... (iii)

अब △AFO और △CFO में,

OA = OC

AF = CF [∵ F, AC का मध्य बिन्दु हैं]

OF उभयनिष्ठ भुजा हैं।

∴ △AFO ≅ △CFO [सर्वांगसमता S-S-S शर्त से]

∴ ∠AFO = ∠CFO [सर्वांगसम त्रिभुजों के संगतकोण]

पाते है, AC सरल रेखा खण्ड पर OF के मिलने से बने ये आसन्न कोण हैं और समान हैं।

∴ OF, AC पर लम्ब हैं।

अत: △ABC की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी हैं।

अब, ऊपर के प्रमेय में △ABC की AC भुजा का मध्य बिन्दु F कोण लेकर O बिन्दु से AC पर लम्ब खीच कर प्रमाणित करें कि यह लम्ब AC मध्य बिन्दुगामी हैं। [स्वयं करें]

हल करे- 17.1

(1) PQR एक न्यूनकोण त्रिभुज बनायें और प्रमाणित करें कि PQ, QR और RP के लम्बसमद्विभाजक तीनों संगामी हैं। इस अवस्था में △PQR का परिकेन्द्र त्रिभुजाकार क्षेत्र में कहाँ (भीतर/बाहर/भुजा पर) स्थित हैं-लिखें।

(2) ABC एक अधिक कोण त्रिभुज बनायें और भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी है, प्रमाणित करें। △ABC का परिकेन्द्र त्रिभुजाकार क्षेत्र में कहाँ (अन्दर/बाहर/भुजा पर) स्थित हैं-लिखे।

(3) रीता ने XYZ एक समकोण त्रिभुज बनाया हैं। तर्क सहित प्रमाणित करें कि Δ XYZ की भुजाओं के लम्ब समाद्विभाजक तीनों संगामी है और XYZ त्रिभुज का परिकेन्द्र क्षेत्र में कहाँ (अन्दर/बाहर/भुजा पर) स्थित हैं-लिखे।

प्रयोग : एक त्रिभुज की दो छोटी भुजाओं की लम्बाई के वर्गो का योगफल सबसे बड़ी भुजा की लम्बाई के वर्ग के समान हो तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं।

जैसे 3 से०मी०, 4 से०मी० और 5 से०मी० भुजा वाला त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज हैं। क्योंकि $3^2 + 4^2 = 5^2$ । इस त्रिभुज का परिकेन्द्र कर्ण के ☐ पर स्थित हैं। [स्वयं लिखे]

एक समकोण त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई 5 से०मी० हो तो त्रिभुज के परिअर्द्धव्यास की लम्बाई कितनी होगी-लिखे।

चूँकि समकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र कोण के मध्य बिन्दु पर स्थित होता हैं इसलिए इसके परिअर्द्धव्यास की लम्बाई $\frac{5}{2}$ से०मी० = 2.5 से०मी० हैं।

हमने रसीद द्वारा अंकित किये गये तीन बिन्दुओं A, B और C से गुजरने वाला एक वृत्त खीचा और यह भी देखा कि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी है।

स्वयं करें-17.2

(1) एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई 6 से०मी०, 8 से०मी०, और 10 से०मी० हो तो त्रिभुज के परिअर्द्धव्यास की लम्बाई कितनी है-लिखे।

(2) एक समकोण त्रिभुज का परिअर्द्धव्यास 10 से०मी० हो तो त्रिभुज का कर्ण लम्बाई कितनी हैं लिखे।

प्रयोग 1 ABC त्रिभुज का परिकेन्द्र O हो, तो $\angle BOC$ और $\angle BAC$ में क्या सम्बंध हैं, लिखे।

प्रदत्त : ABC त्रिभुज का परिकेन्द्र O हैं।

प्रमाणित करना हैं कि : $\angle BOC$ और $\angle BAC$ में संपर्क निर्णय करना हैं।

अंकन : A, O को मिलाया और AO को बिन्दु D तक आगे बढ़ाया।

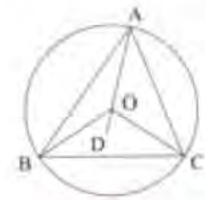
प्रमाण : ΔAOB में, AO=OB (एक ही वृत्त के अर्द्धव्यास हैं) $\therefore \angle OAB = \angle OBA$

बहि० $\angle BOD = \angle OAB + \angle OBA = 2\angle OAB$ ($\because \angle OAB = \angle OBA$) .... (1)

ΔAOC में, OA = OC (एक ही वृत्त के अर्द्धव्यास हैं) $\therefore \angle OAC = \angle OCA$

बहि० $\angle COD = \angle OAC + \angle OCA$

$= 2\angle OAC$ ($\angle OAC = \angle OCA$) .... (2)



(1) और (2) जोड़ेन पर पाते हैं।

$\angle BOD + \angle COD = 2\angle OAB + 2\angle OAC$

या, $\angle BOC = 2(\angle OAB + \angle OAC)$

$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC$

अतः $\angle BOC$, $\angle BAC$ का दो गुना हैं।

प्रयोग 2 O परिकेन्द्र वाले ABC त्रिभुज में $\angle ABC = 85^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$ हो, तो $\angle BOC$ और $\angle OBC$ के मान लिखे।

$\angle BAC = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)$

$= 180^\circ - (85^\circ + 75^\circ) = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

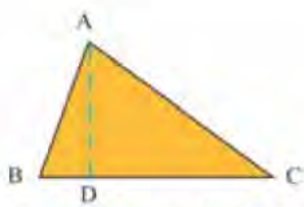
$\angle BOC = 2\angle BAC$

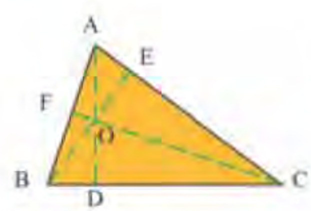
$\therefore \angle BOC = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$

$\angle OBC = \angle OCB$ ($\because OB = OC$) $\qquad \angle OBC = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$

किन्तु यदि किसी त्रिभुज के तीनों शीर्ष बिन्दुओं से विपरीत भुजाओं पर लम्ब खींचा जाए तो ये तीनों लम्ब क्या संगामी होगे ? त्रिभुज बनाकर और काटकर स्वप्रयास से जाँचे।

स्व-प्रयास से





(i) पहले एक त्रिभुज ABC बनाया और त्रिभुजाकार क्षेत्र काट लिया।

(ii) अब A शीर्ष बिन्दु से BC भुजा को इस प्रकार मोड़े कि B बिन्दु BC भुजा को बराबर एवं BC भुजा के ऊपर रहे। मोड़ खोलकर AD सरल रेखा खण्ड पाया। अर्थात् स्वप्रयास से A बिन्दु से BC पर लम्ब AD पाया।

(iii) इसी प्रकार कागज मोड़कर B और C शीर्ष बिन्दुओं से क्रमशः AC और AB पर लम्ब BE और CF पाया।

पाते है कि AD, BE और CF तीनों लम्ब एक दूसरे से बिन्दु O पर मिलते हैं।

अर्थात् स्वप्रयास से पाया कि ΔABC के शीर्ष बिन्दुओं से विपरीत भुजाओं पर खीचे गये लम्ब तीनों संगामी है।

अब दूसरा कोई त्रिभुज PQR बनाया। स्वप्रयास से कागज मोड़कर ΔPQR के शीर्ष बिन्दुओं P, Q और R से क्रमश: विपरीत भुजाओं QR, RP और PQ पर तीन लम्ब पाया।

पाते है, ये तीनों लम्ब संगामी हैं। [स्वयं करें]

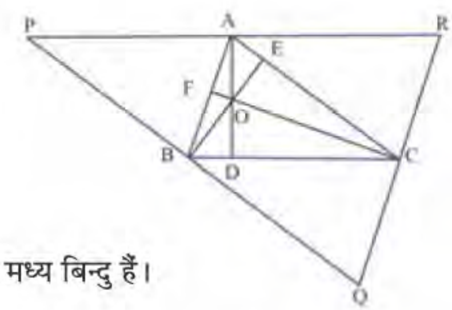
प्रमेय : 28 तर्क सहित प्रमाणित करें कि ' त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से विपरीत भुजाओं पर खीचे गये तीनो लम्ब संगामी हैं"।

प्रदत्त : माना कि ΔABC के शीर्ष बिन्दु A, B और C से विपरीत भुजाओं BC, CA और AB पर खींचे गये लम्ब क्रमश: AD, BE और CF हैं।

प्रमाणित करना हैं कि : AD, BE और CF संगामी हैं।

अंकन : A, B और C बिन्दु से क्रमश: BC, CA और AB भुजा के समानान्तर सरल रेखायें खींचा जो एक दूसरे को क्रमश: P, Q और R बिन्दुओं पर मिलती हैं। अत: एक त्रिभुज PQR का निर्माण हुआ।

प्रमाण : रचनानुसार, APBC, ABCR और ABQC प्रत्येक एक समानान्तर चतुर्भुज हैं।



समानान्तर चतुर्भुज APBC और ABCR से पाते हैं।

AP = BC और AR = BC

$\therefore$ AP = AR

अर्थात् PR भुजा का मध्य बिन्दु A हैं।

इसी प्रकार पाते है कि B और C क्रमश: PQ और QR के मध्य बिन्दु हैं।

फिर, $PR \parallel BC$ [रचनानुसार] और $AD \perp BC$,

$\therefore AD \perp PR$ ($\because$ $PR \parallel BC$ और AD इनसे मिलती हैं $\therefore \angle ADC + \angle DAR = 180^0$, $\because \angle ADC = 90^0 \therefore \angle DAR = 90^0$)

इसी प्रकार पाते हैं, $BE \perp PQ$ और $CF \perp QR$

$\therefore$ पाया कि AD, BE और CF यथाक्रम ΔPQR के PR, PQ और QR भुजा के लम्बसमद्विभाजक हैं। किसी त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते हैं।

अत: AD, BE और CF संगामी है।

$\therefore$ ABC त्रिभुज के A, B और C बिन्दु से विपरीत भुजाओं BC, CA और AB पर खींचे गये लम्ब संगामी हैं। [प्रमाणित]

पाया कि, त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से विपरीत भुजाओं पर अंकित लम्ब तीनो संगामी है अर्थात् तीनों लम्ब एक बिन्दुगामी हैं।

इस सर्वनिष्ठ बिन्दु को क्या कहा जाता हैं?

Δ की भुजाओं पर अंकित लम्ब जिस बिन्दु पर मिलते हैं उस बिन्दु को लम्ब बिन्दु कहा जाता हैं।

$\therefore$ O, Δ ABC का लम्ब बिन्दु ।

ABC त्रिभुज को D, E, F बिन्दुओं को मिलाकर जो DEF त्रिभुज पाया जाता हैं उस त्रिभुज को पाद त्रिभुज (Pedal Triangle) कहा जाता हैं।

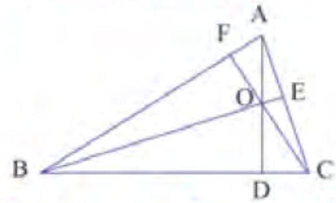
प्रयोग : **3** ABC त्रिभुज का लम्ब बिन्दु O है; $\angle BOC = 80^\circ$ हो तो, $\angle BAC$ का मान कितना हैं, लिखे।

AFOE चतुर्भुज में $\angle OFA = 90^\circ$, $\angle OEA = 90^\circ$;

$\angle BOC$ = सम्मुख $\angle EOF$ $\therefore$ $\angle EOF = 80^\circ$

$\angle BAC = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 80^\circ) = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$

($\because$ चतुर्भुज के चारो कोणो का योग 360° होता है।)



त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु से विपरीत भुजा पर अंकित लम्ब को त्रिभुज की ऊँचाई कहते है। अत: इस गुण को इस प्रकार भी कहा जा सकता है कि त्रिभुजों की तीनो ऊँचाईयाँ संगामी है। ऊँचाई यो काटन बिन्दु को लम्ब बिन्दु कहा जाता हैं।

अब एक न्यूनकोणिक, एक समकोणिक और एक अधिक कोणिक त्रिभुज बनायें और प्रत्येक के लिये प्रमाणित करें कि शीर्ष बिन्दुओं से विपरीत भुजाओं पर खींचे गये (अंकित किये गये) लम्ब संगामी हैं और प्रत्येक के लिये लम्ब बिन्दु कहा स्थित है देखे। [स्वयं करें]

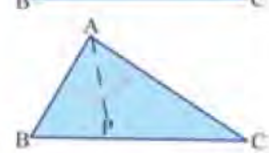
त्रिभुज की अन्य विशेषताओं को स्वप्रयास द्वारा जानने के लिये तमाल ने आर्ट पेपर लाकर कई प्रकार के त्रिभुज बनाये और उन्हे काटकर अलग-अलग रखा। तृषा ने एक त्रिभुज लिया और कोणो के समद्विभाजक पाने को चेष्टा करना शुरु किया।

तृषा की तरह हमने भी एक त्रिभुजाकार क्षेत्र ABC को लेकर स्वप्रयास से मोड़कर $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ के अन्त: समद्विभाजकों को पाने की चेष्टा की और क्या पाया देखे।

स्वप्रयास से

(1) पहले किसी त्रिभुज ABC को अंकित किया और काटकर ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र पाया।

(2) अब $\angle BAC$ के अन्त: समद्विभाजक को स्वप्रयास से पाने के लिये $\angle BAC$ के शीर्ष बिन्दु से $\angle BAC$ को इस प्रकार मोड़ा कि AB भुजा AC पर पड़े और उसे ढ़कले। मोड़ को खोलकर $\angle BAC$ का AP अन्त:समद्विभाजक पाया।



3. इसी प्रकार से कागज को मोड़कर $\angle ABC$ और $\angle ACB$ के अन्त: समद्विभाजक क्रमश: BQ और CR ज्ञात किया।

पाते हैं, Δ ABC के $\angle A$, $\angle B$, और $\angle C$ के अन्त:समद्विभाजक क्रमश: AP, BQ और CR एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं या मिलते हैं।

अर्थात् स्वप्रयास से पाते हैं कि Δ ABC के कोणो के अन्त: समद्विभाजक संगामी हैं।

अब कोई एक त्रिभुज PQR अंकित कर और त्रिभुजाकार क्षेत्र काट लिया। PQR त्रिभुजाकार क्षेत्र के कागज को मोड़कर समान प्रकार से स्वप्रयास द्वारा पाते हैं Δ PQR के कोणो के अन्त:समद्विभाजक संगामी हैं। [स्वयं करे]

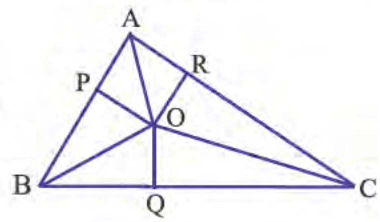
प्रमेय – 29 तर्क सहित प्रमाणित करें कि त्रिभुजों के कोणो के तीनों अन्तः समद्विभाजक संगामी हैं।

प्रदत्त : माना कि ABC एक त्रिभुज हैं।

माना कि $\angle B$ और $\angle C$ के अन्तःसमद्विभाजक एक दूसरे को O बिन्दु पर काटते हैं। A,O को मिलाया।

प्रमाणित करना हैं कि : $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ के तीनों अन्तः समद्विभाजक संगामी हैं। अर्थात् AO का $\angle BAC$ का अन्तःसमद्विभाजक प्रमाणित करते ही प्रमाणित हो जायेगा कि त्रिभुज के तीनों कोणों के अन्तःसमद्विभाजक संगामी हैं।

अंकन : $OP \perp AB$, $OQ \perp BC$ और $OR \perp AC$ अंकित किया।



प्रमाण : ΔBOQ और ΔBOP में।

$\angle OBQ = \angle OBP$ [$\because$ BO, $\angle B$ का अन्तः समद्विभाजक हैं]

$\angle OQB = \angle OPB$ [प्रत्येक एक समकोण हैं।]

और BO उभयनिष्ठ भुजा हैं।

$\therefore$ $\Delta BOQ \cong \Delta BOP$ [सर्वांगसमता की A-A-S शर्त से]

$\therefore$ OQ = OP [सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाये हैं] ---------------------- (i)

इसी प्रकार प्रमाणित किया जा सकता हैं कि $\Delta COQ \cong \Delta COR$

$\therefore$ OQ = OR [सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाये हैं]................(ii)

$\therefore$ (i) नं और (ii) नं से पाते हैं, OP = OR ....(iii)

अब समकोण त्रिभुज, ΔAPO और ΔARO में,

$\angle OPA = \angle ORA$ [प्रत्येक एक समकोण हैं]

कर्ण AO अभयनिष्ठ भुजा हैं

OP = OR [(iii) नं से]

$\therefore$ $\Delta APO \cong \Delta ARO$ [सर्वांगसमता की R-H-S शर्त से]

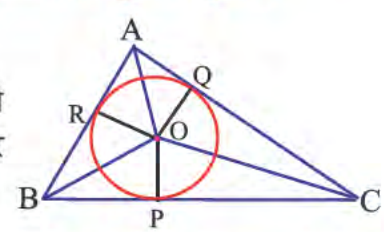
$\therefore$ $\angle PAO = \angle RAO$ [सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण]

$\therefore$ AO, $\angle A$ का समद्विभाजक हैं।

$\therefore$ ΔABC के कोणो के अन्तः समद्विभाजक संगामी हैं। [प्रमाणित]

ऊपर के प्रमेय को तर्क सहित प्रमाणित करते समय पाया कि OP = OQ = OR अर्थात् O बिन्दु को केन्द्र मानकर OP के समान अर्द्धव्यास लेकर वृत्त अंकन करने पर यह वृत्त P,Q और R बिन्दुओं से गुजरेगा।

इस वृत्त को क्या कहा जाता है ?

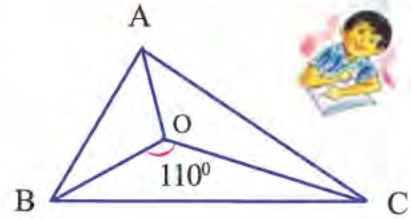


O को केन्द्र मानकर OP के समान अर्द्धव्यास लेकर अंकित किये गये वृत्त को ΔABC का **अन्तर्वृत्त** कहा जाता हैं। OP को **अन्तःअर्द्धव्यास** और वृत्त के केन्द्र O को **अन्तःकेन्द्र** कहा जाता हैं।

अब न्यूनकोणिक, समकोणिक और अधिक कोणिक त्रिभुजों का अंकन करें और कोणों के अन्तःसमद्विभाजक खींच कर देखे कि अन्तःकेन्द्र कहाँ स्थित मिलता हैं। [स्वयं करे]

कोई एक त्रिभुज PQR बनायें और Δ PQR के कोणो के अन्त: समद्विभाजक संगामी हैं- तर्क सहित प्रमाणित करें। [स्वयं करे]

प्रयोग : 4 ABC त्रिभुज में O अन्त:केन्द्र हैं। $\angle BOC = 110^\circ$ हो तो $\angle BAC$ का जान कितना होगा लिखे।



Δ OBC में $\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ$

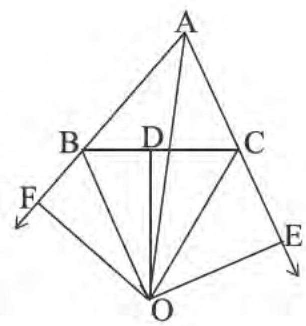
या, $\angle OBC + \angle OCB = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

या, $2\angle OBC + 2\angle OCB = 140^\circ$

$\therefore \quad \angle ABC + \angle ACB = 140^\circ$

अत: $\angle BAC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

प्रयोग : 5 प्रमाणित करे कि किसी त्रिभुज के दो कोणो के बहिर्समद्विभाजक और एक कोण का अन्तर्समद्विभाजक संगामी होते हैं।



ABC त्रिभुज में $\angle ABC$ और $\angle ACB$ के बहि: समद्विभाजक क्रमश: BO और CO, O बिन्दु पर मिलते हैं। A,O को मिलाया गया हैं।

प्रमाणित करना हैं कि : $\angle ABC$, $\angle ACB$ के बहिर्समद्विभाजक और $\angle BAC$ का अन्त:समद्विभाजक संगामी हैं। अर्थात् AO, $\angle BAC$ का अन्त:समद्विभाजक प्रमाणित कर देने से प्रमाणित हो जायेगा कि एक त्रिभुज के दो कोणों के बहिर्समाद्विभाजक और एक कोण का अन्त:समद्विभाजक संगामी होते हैं।

अंकन : O बिन्दु से BC और AB और AC बढ़े हुये भागों पर क्रमश: OD, OF और OE लम्ब खीचा।

प्रमाण : Δ BOD और Δ BOF में।

$\angle OBD = \angle OBF$ [BO, $\angle FBD$ का समद्विभाजक हैं]

$\angle ODB = \angle OFB$ [प्रत्येक एक समकोण हैं]

OB भुजा उभयनिष्ठ हैं।

$\therefore \Delta BOD \cong \Delta BOF$ [सर्वांगसमता को A-A-S शर्त पर]

$\therefore OD = OF$

इसी प्रकार $\Delta OCD \cong \Delta OCE$ $\quad \therefore OD = OE \quad \therefore OE = OF$

समकोण Δ AOE और Δ AOF में $\angle AEO = \angle AFO$ [प्रत्येक एक समकोण है]

कर्ण AO उभयनिष्ठ भुजा हैं।

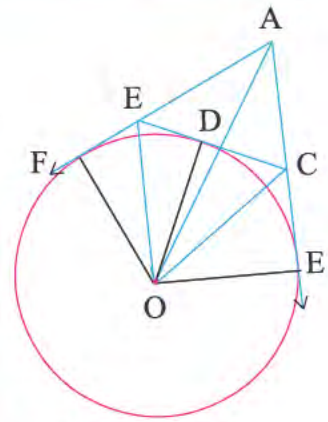
$OE = OF$

$\therefore \quad \Delta AOE \cong \Delta AOF$ [सर्वांगसमता की R-H-S शर्त से]

अत: $\angle OAE = \angle OAF$ $\quad \therefore$ AO, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

$\therefore$ किसी त्रिभुज के दो कोणो के बहिर्समद्विभाजक और एक कोण का अन्त: समद्विभाजक संगामी होते हैं।

∵ OD= OE= OF, अत: O बिन्दु को केन्द्र मानकर OD के समान लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर खींचा गया वृत्त D, E और F बिन्दुओं से होकर गुजरता हैं।



इस प्रकार के वृत्त को क्या कहा जायेगा ?

इस प्रकार के वृत्त को **बहिर्वृत्त** कहा जाता हैं। OD, OE, OF, को **बहिअर्द्धव्यास** कहा जाता हैं। O को **बहि:केन्द्र** कहा जाता हैं।

किसी एक त्रिभुज के कितने बहि:केन्द्र और कितने बहिवृत्त पाये जाते हैं। [स्वयं करे]

किसी त्रिभुज के कितने बिन्दु त्रिभुज की भुजाओं से समान दूरी पर होते हैं स्वयं लिखे।

स्वप्रयास से और तर्क सहित प्रमाणित किये गये त्रिभुज के जितने गुण-धर्म पाये गये हैं-उन्हें लिखे।

(i) पहले को भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते हैं।

(ii) त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से विपरीत भुजाओं पर खीचे गये लम्ब संगामी होते हैं।

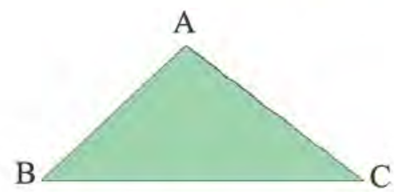
(iii) त्रिभुज के कोणो के अन्त: समद्विभाजक संगामी होते हैं ☐।

किन्तु त्रिभुज की तीनों मध्यमायें भी क्या संगामी होती हैं ?

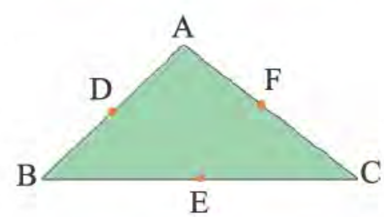
स्वप्रयास से कागज मोड़कर जॉच करे।

स्वप्रयास से

(i) पहले कोई भी एक त्रिभुज ABC बनाकर त्रिभुजाकार भाग ABC काट लिया।

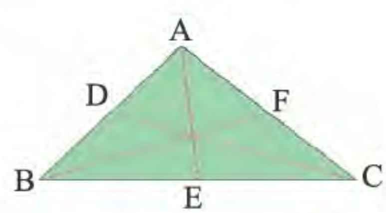


(ii) अब Δ ABC की AB भुजा को इस तरह मोड़ते है कि A बिन्दु B बिन्दु पर पड़े और उसे ढकले। अब मुड़े कागज को खोलकर AB भुजा का मध्य बिन्दु D पाया। इसी प्रकार कागज मोड़कर Δ ABC की BC और CA भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: E और F पाया।



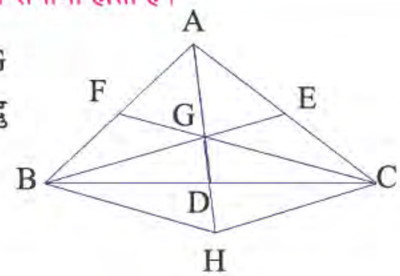
(iii) अब कागज को मोड़कर AE, BF और CD मध्यमा पाया। देखते है कि Δ ABC को तीन मध्यमायें AE, BF और CD एक दूसरे को बिन्दु O पर काटती हैं अर्थात्

स्वप्रयास से पाया कि Δ ABC को तीनो मध्यमाये संगामी हैं।



अब कोई दूसरा त्रिभुज PQR बनाकर और काटकर PQR त्रिभुजाकार क्षेत्र पाया। अब स्वप्रयास से कागज मोड़कर जाँचे कि ΔPQR की मध्यमायें तीनों संगामी हैं। [स्वयं करे]

प्रमेय – **30** तर्क सहित प्रमाणित करें कि **त्रिभुज को मध्यमाये तीनों संगामी होती हैं।**



प्रदत्त : माना कि Δ ABC की BE और CF दो मध्यमायें एक दूसरे को G बिन्दु पर काटती हैं। A, G का बढ़ा हुआ भाग AG, BC भुजा को D बिन्दु पर काटता हैं।

प्रमाणित करना हैं कि : त्रिभुज की तीन मध्यमायें संगामी हैं। अर्थात् D बिन्दु को BC भुजा का मध्य बिन्दु प्रमाणित कर देने से यह प्रमाणित हो जायेगा कि त्रिभुज को तीनो मध्य भुजायें संगामी हैं।

अंकन : AD को H बिन्दु तक बढ़ाया ताकि AG = GH हो।

B, H और C, H को मिलाया।

प्रमाण : ΔABH की AB भुजा का मध्य बिन्दु F हैं [दिया गया हैं]

AH का मध्य बिन्दु G हैं [रचना से]

$\therefore$ FG || BH [$\because$ त्रिभुज को दो भुजाओ के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनी रेखा खण्ड तीसरी भुजा के समानान्तर होती हैं GC || BH]

फिर इसी प्रकार, ΔACH की AC भुजा का मध्य बिन्दु E हैं [प्रदत्त]

और AH का मध्य बिन्दु G हैं [रचना से]

$\therefore$ GE || HC अर्थात् BG || HC

$\therefore$ पाया हैं, BGCH चतुर्भुज में, GC || BH और BG || HC

$\therefore$ BGCH एक समानान्तर चतुर्भुज हैं जिसके विकर्ण BC और GH

$\therefore$ D, BC का मध्य बिन्धु हैं [$\because$ समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।]

अत: त्रिभुज को तीनों मध्यमायें संगामी हैं। [प्रमाणित]

पाते हैं, कि इस प्रमेय को प्रमाणित करने के लिये BH, GC अर्थात् FG के समानान्तर होना आवश्यक हैं। AG = GH न लेकर B बिन्दु से FG के समानान्तर सरल रेखा खींचे जो AD के बढ़े हुये भाग से H बिन्दु पर मिले और H, C को मिला दे।

इस तरह भी प्रमेय को प्रमाणित कर सकते हैं। [स्वयं करे]

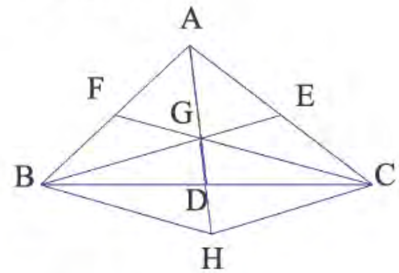
किन्तु जिस बिन्दु पर तीनों मध्यमायें एक दूसरे को काटती हैं उसे क्या कहा जाता हैं ?
जिस बिन्दु पर त्रिभुज को मध्यमाये तीनो एक दूसरे को काटती हैं उसे गुरूत्वकेन्द्र कहा जाता हैं।

समझा कि ΔABC की AD, BE और CF तीनों मध्यमायें एक दूसरे को G बिन्दु पर काटती हैं।

$\therefore$ G , ΔABC का **गुरुत्वकेन्द्र** हैं।।

किन्तु गुरुत्वकेन्द्र G, AD मध्यमा को किस अनुपात में विभक्त करता हैं ? अर्थात् AG : GD का क्या मान हैं ? लिखें।

BGCH समानान्तर चतुर्भुज के BC और GH दो विकर्ण एक दूसरे को D बिन्दु पर समद्विभाजित करते है।



$\therefore GD = \frac{1}{2} GH$ अत: $GH = 2GD$

रचना के अनुसार $AG = GH$ $\therefore AG = 2GD$

अत: $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ $\therefore AG : GD = 2 : 1$

इसी प्रकार दिखाया जा सकता है कि BG : GE = 2 : 1 और CG : GF = 2 : 1

अर्थात्, प्रत्येक मध्यमा शीर्ष बिन्दु की ओर से गुरुत्वकेन्द्र की ओर 2 : 1 अनुपात में विभक्त हो जाती हैं।

दूसरे प्रकार से देखें क्या पाते है, $AG = GH$

फिर, $AG + GD = AD$

या, $GH + GD = AD$

या, $2GD + GD = AD$

या $3GD = AD$

$\therefore$ $GD = \frac{1}{3}AD$

और $AG = AD - GD$

$= AD - \frac{1}{3}AD = \frac{2}{3}AD$,

इसी प्रकार पायेंगे $FG = \frac{1}{3} CF$

और $CG = \frac{2}{3} CF$

$EG = \frac{1}{3} BE$,

और $BG = \frac{2}{3} BE$

$\therefore$ पाया है, त्रिभुज के मध्यमात्रय समत्रिखण्डक बिन्दु पर काटते हैं।

स्वयं करें

(1) PQR एक त्रिभुज बनायें और तर्क सहित प्रमाणित करें कि ΔPQR के मध्यमायें संगामी हैं।

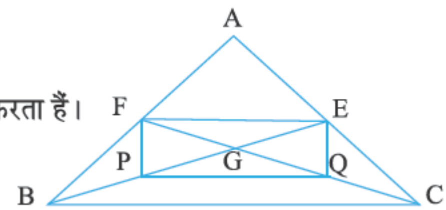
(2) न्यूनकोणिक, समकोणिक और अधिक कोणिक त्रिभुज अलग-अलग बनाकर उनके गुरुत्वकेन्द्र त्रिभुज के किस ओर स्थित हैं — देखें।

प्रयोग : 6 ΔABC में BE और CF दो मध्यमायें एक-दूसरे को G बिन्दु पर काटती हैं। BG और CG के मध्य बिन्दु क्रमश: P और Q हैं; P, F और Q, E को मिलाया गया हैं।

प्रमाणित करना है कि : (i) PQEF एक समानान्तर चतुर्भुज हैं
(ii) G बिन्दु BE और CF को 2:1 अनुपात में विभक्त करता हैं।

प्रदत्त : ΔABC में BE और CF दो मध्यमायें एक-दूसरे को G बिन्दु पर काटती हैं। BG और CG के मध्य बिन्दु क्रम से P और Q हैं P, F और Q, E को मिलाया गया हैं।

प्रमाणित करना है कि : (i) PQEF एक समानान्तर चतुर्भुज हैं
(ii) G बिन्दु BE और CF को 2:1 अनुपात में विभक्त करता हैं।



प्रमाण : ΔABC की AB और AC दोनों भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: F और E हैं।

$\therefore FE \parallel BC$ और $FE = \frac{1}{2}BC$

फिर, ΔGBC की GB और GC दो भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमश: P और Q हैं।

$\therefore PQ \parallel BC$ और $PQ = \frac{1}{2}BC$

PQEF चतुर्भुज के विपरीत भुजाओं की एक जोड़ी परस्पर समान और समानान्तर है

PQEF एक समानान्तर चतुर्भुज हैं। [(i) न॰ प्रमाणित]

PQEF एक समानान्तर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण एक दूसरे को G बिन्दु पर काटते हैं।

$\therefore$ PG = GE और QG = GF[$\because$ समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।]

अत: BP = PG = GE

$\therefore$ G बिन्दु BE मध्यमा को 2:1 अनुपात में विभक्त करता हैं।

फिर CQ = QG = GF

$\therefore$ CG : GF = 2:1

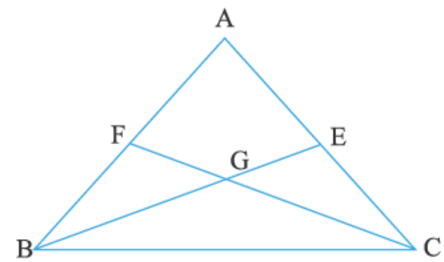
अत: G बिन्दु CF मध्यमा को 2:1 अनुपात में विभक्त करता हैं। [(ii) न॰ प्रमाणित]

प्रयोग : 7 तर्क सहित प्रमाणित करें कि किसी त्रिभुज की दो माध्यमायें समान हो तो यह एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रदत्तः माना ΔABC त्रिभुज में BE और CF दो मध्यमायें समान है।

प्रमाणित करना है कि : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रमाण : माना कि, BE और CF मध्यमात्रय एक दूसरे को G एक बिन्दु पर काटती हैं। चूँकि त्रिभुज की मध्यमात्रय समत्रि भाजक बिन्दु पर काटती है।



$\therefore EG = \frac{1}{3}BE$ और $FG = \frac{1}{3}CF$

किन्तु $BE = CF \quad \therefore EG = FG$ —— (i)

और $BG = CG$ —— (ii)

अब ΔFGB और ΔEGC में

$BG = CG$ [(ii) न० से पाया]

$\angle FGB =$ सम्मुख $\angle EGC$

और $FG = EG$ [(i) न० से पाया]

$\therefore \Delta FGB \cong \Delta EGC$ [सर्वांगसमता की S-A-S शर्त से]

अतः , $BF = CE$ [सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजायें है]

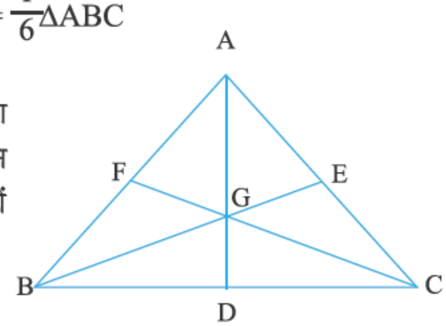
या, $2BF = 2CE \quad \therefore AB = AC$ अतः, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज [प्रमाणित]

प्रयोग : 8 ΔABC की तीन मध्यमायें AD,BE और CF एक दूसरे को G बिन्दु पर काटती हैं, तो प्रमाणित करें कि, (i) $\Delta GBC = \frac{1}{3}\Delta ABC$ (ii) $\Delta GBD = \frac{1}{6}\Delta ABC$

प्रदत्तः ΔABC की तीन मध्यमायें AD,BE और CF एक दूसरे को G बिन्दु पर काटती है।

प्रमाणित करना है कि : (i) $\Delta GBC = \frac{1}{3}\Delta ABC$ (ii) $\Delta GBD = \frac{1}{6}\Delta ABC$

प्रमाण : ΔABC की AD मध्यमायें हैं



$\therefore \Delta ABD = \Delta ACD$ —— (i) ($\because$ त्रिभुज की मध्यमा त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटती हैं।)

फिर, ΔGBC की मध्यमायें GD हैं

$\therefore \Delta GBD = \Delta GCD$ —— (ii)

(i) – (ii) से पाते हैं,

$\Delta ABD - \Delta GBD = \Delta ACD - \Delta GCD$

$\therefore \Delta AGB = \Delta AGC$

इसी प्रकार प्रमाणित किया जा सकता है कि $\Delta AGB = \Delta BGC$

$\therefore \Delta AGB = \Delta BGC = \Delta AGC = \frac{1}{3}(\Delta AGB + \Delta BGC + \Delta AGC) = \frac{1}{3}\Delta ABC$ [(i) न० प्रमाणित]

फिर, $\Delta GBD = \frac{1}{2}\Delta BGC$ [$\because \Delta BGC$ की मध्यमायें GD हैं]

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\Delta ABC) \qquad \therefore \Delta GBD = \frac{1}{6}\Delta ABC$ [(ii) न० प्रमाणित]

हल करें - 17

1. ABC त्रिभुज में $\angle B$ और $\angle C$ के अन्त: समाद्विभाजक I बिन्दु पर एक दूसरे को काटते हैं। प्रमाणित करें कि $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$

2. किसी त्रिभुज की तीनों मध्यमायें समान हो तो प्रमाणित करें कि त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होगा।

3. प्रमाणित करें कि समबाहु त्रिभुज के परिकेन्द्र, अन्त:केन्द्र, गुरुत्वकेन्द्र और लम्बबिन्दु संपाती होते हैं।

4. ABC त्रिभुज की AD, BE और CF मध्यमायें हैं। प्रमाणित करें कि ABC और DEF त्रिभुजों के गुरुत्वकेन्द्र एक ही बिन्दु पर हैं।

5. प्रमाणित करें कि किसी त्रिभुज की दो मध्यमाओं की लम्बाईयों का योग तीसरी मध्यमा की लम्बाई से अधिक होती है।

6. ABC त्रिभुज की AD, BE और CF तीनों मध्यमायें हैं। प्रमाणित करें कि
(i) $4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$ (ii) $3(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF)$

8. ΔABC तीनों मध्यमायें AD, BE और CF को एक-दूसरे को G बिन्दु पर काटती है। ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात करें। 36 वर्ग से॰मी॰ हो तो (i) ΔAGB का क्षेत्रफल (ii) ΔCGE का क्षेत्रफल (iii) चतुर्भुज BDGF का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

9. ABC त्रिभुज की AD, BE और CF मध्यमायें हैं यदि $\frac{2}{3} AD = BC$ हो, तो प्रमाणित करें कि अन्य दो मध्यमाओं के बीच बने कोण का मान 90° होगा।

10. ABCD समानान्तर चतुर्भुज की BC और CD भुजाओं की मध्य बिन्दु क्रमश: P और Q हैं। AP और AQ विकर्ण BD को क्रम से K और L बिन्दुओं पर काटते हैं। प्रमाणित करें कि $BK = KL = LD$

11. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.)

(i) ABC त्रिभुज का परिकेन्द्र O हैं $\angle BOC = 80^\circ$ हो, तो $\angle BAC$ का मान हैं
(a) 40° (b) 160° (c) 130° (d) 110°

(ii) ABC त्रिभुज का O लम्ब बिन्दु हैं; $\angle BAC = 40^\circ$ हो, तो $\angle BOC$ का मान हैं
(a) 80° (b) 140° (c) 110° (d) 40°

(iii) ABC त्रिभुज का अन्त: केन्द्र O हैं; $\angle BAC = 40^\circ$ हो, तो $\angle BOC$ का मान हैं
(a) 80° (b) 110° (c) 140° (d) 40°

(iv) ABC त्रिभुज का गुरुत्वकेन्द्र G हैं; GBC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 12 वर्ग से॰ मी॰ हो, तो ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल हैं।
(a) 24 वर्ग से॰ मी॰ (b) 6 वर्ग से॰ मी॰ (c) 36 वर्ग से॰ मी॰ (d) कोई नहीं।

(v) ABC समकोण त्रिभुज के परिअर्द्धव्यास की लम्बाई 5 से॰ मी॰ हो, तो कर्ण की लम्बाई हैं।
(a) 2.5 से॰ मी॰ (b) 10 से॰ मी॰ (c) 5 से॰ मी॰ (d) कोई नहीं।

12. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :

(i) एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई 6 से॰ मी॰ 8 से॰ मी॰ और 10 से॰ मी॰ हो तो त्रिभुज का परिकेन्द्र त्रिभुजाकार क्षेत्र में कहाँ स्थित हैं — लिखें।

(ii) ABC समबाहु त्रिभुज की मध्यमा AD है और G गुरुत्वकेन्द्र है। त्रिभुज की भुजा की लम्बाई $3\sqrt{3}$ से॰ मी॰ हो, तो AG की लम्बाई क्या है — लिखें।

(iii) एक त्रिभुज के तीनों बिन्दु त्रिभुज की भुजाओं से समान दूरी पर होते हैं — लिखें।

(iv) ABC समबाहु त्रिभुज का पाद त्रिभुज DEF हैं; $\angle FDA$ का मान कितना लिखें।

(v) ABC समद्विबाहु त्रिभुज में $\angle ABC = \angle ACB$ और मध्यमा $AD = \frac{1}{2} BC$ है। यदि $AB = \sqrt{2}$ से॰ मी॰ हो तो त्रिभुज के परिअर्द्धव्यास की लम्बाई कितनी है — लिखें।

18 वृत्त का क्षेत्रफल
(AREA OF CIRCLE)

हमलोगों ने दौड़ प्रतियोगिता के लिए रवीन्द्रनगर के बड़े मैदान में अनेक एक केन्द्रिक वृत्ताकार रास्ते तैयार किए है। इसबार हमलोगों ने सोचा है कि मैदान के बीच के वृत्ताकार जगह को रंग देगें। कितनी जगह को रंगेंगे – गणना करें।

वृत्ताकार जगह का कितना भाग रंग किया जाये इसके लिये उस वृत्ताकार जगह का ☐ परिधि/क्षेत्रफल जानना होगा।

मापकर देखा, वृत्ताकार जगह के व्यास की लम्बाई 196 से०मी० है।

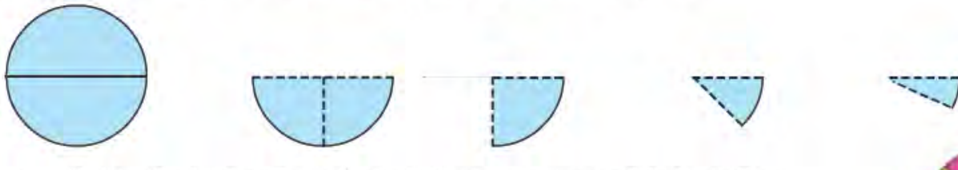
$\therefore$ वृत्ताकार जगह के अर्द्धव्यास की लम्बाई = ☐ से०मी० है।

किन्तु वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल कैसे मापेंगे ?

स्वप्रयास से वृत्ताकार चकती बनाकर स्वप्रयास से चकितयों का क्षेत्रफल मापने की चेष्टा करते है।

हमने एक ही अर्द्धव्यास लेकर अर्थात् समान माप की 2वृत्ताकार चकतियाँ मोटे कागज से बना लिये है।

(1) वृत्ताकार दोनों चकतियों को नीचे के चित्रो की भाँति मोड़ते है



(2) दोनो वृत्तों को खोल दिया और वृत्तो के 16 खण्ड बगल में दिये गये चित्र की तरह रंग दिया। एक वृत्त को पिचबोर्ड पर लटका दिया।

(3) दूसरे वृत्त के 16 रंगीन खण्डों को काटकर नीचे के चित्र की तरह पिचबोर्ड पर लटकाया।

16 खण्डो को सजाने के बाद लगभग आयत क्षेत्र पाते है।

इस आयताकार क्षेत्र की लम्बाई = $\frac{1}{2}$ × वृत्त की परिधि = $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ इकाई = ☐ इकाई

वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई =r इकाई मानने पर इस आयत क्षेत्र की चौड़ाई = r इकाई है।

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r \times r$ वर्ग इकाई = ☐ वर्ग इकाई

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi \times$ (अर्द्धव्यास)^2

1 हमलोग 98 से०मी० लम्बे अर्द्धव्यास वाली वृत्ताकार जगह को सीमेण्ट से पक्का करेंगे तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

वृत्ताकार जगह का क्षेत्रफल = $\pi \times (98)^2$ वर्ग से०मी० = $\frac{22}{7} \times 98 \times 98$ वर्ग से०मी० = ☐ वर्ग से०मी०

2 किसी वृत्त के व्यास की लम्बाई 28 से०मी० है तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

वृत्त के व्यास की लम्बाई = 28 से०मी०

$\therefore$ अर्द्धव्यास की लम्बाई = ☐ से०मी०

वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

अत: वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times 14^2$ वर्ग से०मी० = $\frac{22}{\cancel{7}} \times \overset{2}{\cancel{14}} \times 14$ वर्ग से०मी० = 616 वर्ग से०मी०

3 किसी वृत्त के व्यास की लम्बाई 42 से०मी० हो तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। (स्वयं करें)

4 जिस वृत्त का क्षेत्रफल 1386 वर्ग मीटर हो उसके अर्द्धव्यास की लम्बाई ज्ञात करें।

माना कि वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई r मीटर है।

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2 वर्ग मीटर

$= \frac{22}{7} r^2$ वर्ग मीटर

शर्तानुसार, $\frac{22}{7} r^2 = 1386$

या, $r^2 = 1386 \times \frac{7}{22} = 63 \times 7$

या, $r^2 = 7 \times 9 \times 7$

या, $r = \sqrt{7 \times 3 \times 3 \times 7}$

या, $r = 7 \times 3$

$\therefore r = 21$

वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई = 21 मीटर।

5 जिस वृत्त का क्षेत्रफल 1 वर्ग मीटर 54 डेसी मीटर है, उसके अर्द्धव्यास की लम्बाई ज्ञात करें। (स्वयं करें)

6 हमारे इलाके के वृत्ताकार पार्क की परिधि 264 मीटर है। गणना कर देखें कि पार्क क्षेत्रफल कितना है?

माना कि पार्क के अर्द्धव्यास की लम्बाई r मीटर है।

शर्तानुसार, $2\pi r = 264$

$\therefore r = \square$

वृत्ताकार पार्क का क्षेत्रफल = $\pi \times r^2$ वर्ग मीटर

$= \frac{22}{7} \times 42 \times 42$ वर्ग मीटर = $\square$ वर्ग मीटर

7 जिस वृत्ताकार जमीन की परिधि 44 मीटर है, उसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। स्वयं करें।

8 हमारे इलाके के क्लब में रिंग आकार की लोहे की चकती है जिसके भीतरी और बाहरी व्यास की लम्बाई क्रम से 18 से०मी० और 32 से०मी० है। तो इस गोलाकार चकती में कितना वर्ग से०मी० लोहा है – ज्ञात करें।

गोलाकार लोहे की चकती के भीतरी व्यास की लम्बाई 18 से०मी० है

$\therefore$ भीतरी अर्द्धव्यास की लम्बाई 9 से०मी० है

$\therefore$ गोलाकार लोहे के परत का भीतरी क्षेत्रफल $= \frac{22}{7}(9)^2$ वर्ग से०मी०

गोलाकार लोहे की चकती के बाहरी व्यास की लम्बाई 32 से०मी० है

$\therefore$ बाहरी अर्द्धव्यास की लम्बाई 16 से०मी० है

$\therefore$ गोलाकार लोहे के पतर का बाहरी क्षेत्रफल $= \frac{22}{7}(16)^2$ वर्ग से०मी०

$\therefore$ चकती में लोहा है $\frac{22}{7}(16)^2 - \frac{22}{7}(9)^2$ ०वर्ग से०मी०

$= \frac{22}{7}\ 16^2 - 9^2$० वर्ग से०मी०

$= \frac{22}{7} \times (16+9)(16-9)$ वर्ग से०मी० = $\square$ वर्ग से०मी०

9 लोहे के वलयाकृत लोहे के परत के भीतरी और बाहरी व्यास की लम्बाई 42 से०मी० और 70 से०मी० हो तो वलय में लोहे की परत कितना वर्ग से०मी० है – ज्ञात करें। (स्वयं करें)

10 सीमा के मुहल्ले के वृत्ताकार मैंदान के चारों और समान चौड़ाई का एक रास्ता है। रास्ते की बाहरी सीमा रेखा की लम्बाई भीतरी सीमा रेखा की लम्बाई से 132 मीटर अधिक है और रास्ते का क्षेत्रफल 9702 वर्ग मीटर है। तो मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

माना कि रास्ते को छोड़कर मैदान के अर्द्धव्यास की लम्बाई r मीटर और रास्ता सहित मैदान का अर्द्धव्यास R मीटर है।

∴ रास्ता छोड़कर मैदान की परिधि = $2\pi r$ मीटर एवं रास्ते को छोड़कर मैदान का क्षेत्रफल = πr^2 वर्ग मीटर

फिर रास्ते सहित मैदान की परिधि = $\square$ मीटर

एवं क्षेत्रफल = $\square$ वर्ग मीटर

शर्तानुसार, $2\pi R - 2\pi r = 132$ .... (i)

और $\pi R^2 - \pi r^2 = 9702$ .... (ii)

(i) से पाते है, $2\pi R - 2\pi r = 132$

या, $2\pi (R - r) = 132$

या, $2 \times \frac{22}{7} (R - r) = 132$

या, $R - r = 132 \times \frac{7}{2 \times 22}$

∴ $R - r = 21$ .... (iii)

फिर (ii) से पाते है $\pi R^2 - \pi r^2 = 9702$

या, $\pi (R^2 - r^2) = 9702$

या, $R^2 - r^2 = \overset{441}{\cancel{9702}} \times \frac{7}{\cancel{22}}$

या, $(R+r)(R-r) = 441 \times 7$

या, $(R+r) \times 21 = 441 \times 7$ (iii) से पाया

या, $(R+r) = \frac{441 \times 7}{21}$

∴ $R + r = 147$ .... (iv)

(iii) और (iv) से पाते है

R, r = 147

और $R - r = \square$

विलोपन विधि से R और r का मान निर्णय करने की चेष्टा करते है

$R + r = 147$

$R - r = 21$

$2R = 168$

$R = \frac{168}{2} = \square$

फिर $R+r = 147$

∴ $r = 147 - 84$

अत: $r = 63$

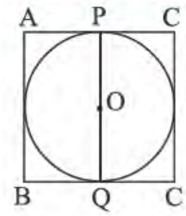
अत: रास्ते सहित वृत्ताकार मैदान के अर्द्धव्यास की लम्बाई 84 मीटर और रास्ते को छोड़कर वृत्ताकार मैदान के अर्द्धव्यास की लम्बाई 63 मीटर है।

सोमा के वृत्ताकार मैदान का क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times 63 \times 63$ वर्ग मीटर

= $\square$ वर्ग मीटर

11 यदि वृत्ताकार मैदान में समान चौड़ाई के रास्ते की बाहरी सीमा रेखा की लम्बाई भीतरी सीमा रेखा की 220 मीटर अधिक हो और रास्ते का क्षेत्रफल 19250 वर्ग मीटर हो तो वृत्ताकार मैदान का क्षेत्रफल कितना होता – गणना कर लिखें, स्वयं करे।

12 सीमा ने एक वृत्त बनाया। उसने उस वृत्त का एक परिवर्ग क्षेत्र भी बनाया। वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 154 वर्ग से०मी० हो तो वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



माना कि वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई r से०मी० है।

$\therefore$ शर्तानुसार, $\pi r^2 = 154$

या, $r^2 = 154 \times \frac{7}{22}$

$\therefore$ $r = 7$

अत: $2r = 14$

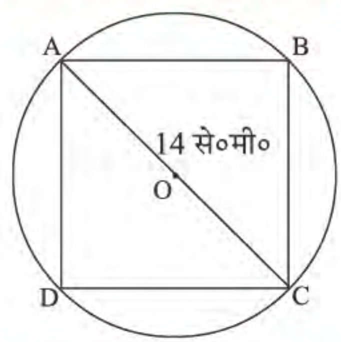
यहाँ, वृत्त के व्यास की लम्बाई और वर्ग क्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई समान है।

अत: वर्ग क्षेत्र की भुजा की लम्बाई = 14 से०मी०।

$\therefore$ वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल = 14 × 14 वर्ग से०मी० = 196 वर्ग से०मी०

13 आयेशा ने इसी वृत्त का एक अन्त:वर्ग क्षेत्र अंकित किया। आयेशा द्वारा बनाये गये वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल निर्णय करें।

वृत्त के व्यास की लम्बाई 14 से०मी० है।



वृत्त में अन्दर बने वर्ग क्षेत्र के विकर्ण की लम्बाई वृत्त का व्यास है।

अत: वर्गक्षेत्र के विकर्ण की लम्बाई = 14 से०मी०

माना की वर्ग की भुजा की लम्बाई = x से०मी० है।

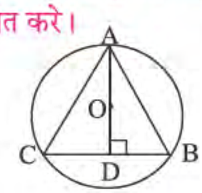
पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, $x^2 + x^2 = 14^2$

या, $2x^2 = 196$

या, $x^2 = \frac{196}{2}$ $\quad \therefore x^2 = 98$

अत: वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल 98 वर्ग से०मी० है।

14 पीयूष ने एक समबाहु त्रिभुज बनाया जिसकी भुजा की लम्बाई 6 से०मी० है। आबूल ने उस त्रिभुज का एक परिवृत्त बनाया। परिवृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई और वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करे।



समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई 6 से०मी० है।

समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$ से०मी० = $3\sqrt{3}$ से०मी०

अर्थात् लम्ब AD = $3\sqrt{3}$ से०मी०

समबाहु त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र O त्रिभुज की ऊँचाई AD पर स्थित है। AO = $\frac{2}{3}$ AD

अत: AO = $2\sqrt{3}$ से०मी०

समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई AO है

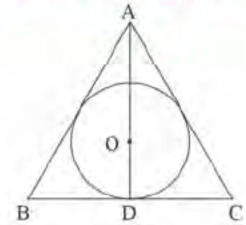
अत: उस त्रिभुज के परिवृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई $2\sqrt{3}$ से०मी० है।

परिवृत्त क्षेत्र का क्षेत्रफल = πr^2 जहाँ r वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई है।

$= \frac{22}{7} \times (2\sqrt{3})^2$ वर्ग से०मी०

$= \frac{22}{7} \times 4 \times 3$ वर्ग से०मी० $= \frac{264}{7}$ वर्ग से०मी० $= 37\frac{5}{7}$ वर्ग से०मी०

15 यदि आबूल उस समबाहु त्रिभुज में एक अन्त:वृत्त बनाता तो उस अन्तवृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई और वृत्त का क्षेत्रफल कितना होगा ज्ञात करें।



समबाहु त्रिभुज के अन्तवृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई OD है।

$OD = \frac{1}{3}$ AD $\quad \therefore OD = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3}$ से०मी० $= \sqrt{3}$ से०मी०

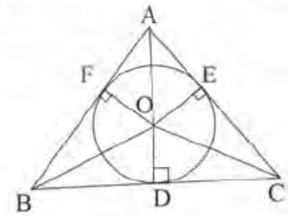
$\therefore$ अन्तर्वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई $\sqrt{3}$ से०मी० है।

अन्तर्वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi (\sqrt{3})^2$ वर्ग से०मी०

$= \frac{22}{7} \times 3$ वर्ग से०मी० $= \frac{66}{7}$ वर्ग से०मी० $= 9\frac{3}{7}$ वर्ग से०मी०

16 एक त्रिभुजाकार पिचबोर्ड की परिसीमा 24 मीटर और त्रिभुज के अन्तर्वृत्त की परिधि 44 मीटर हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

माना कि ABC एक त्रिभुज है जिसकी परिसीमा 24 मीटर है। AO, BO और CO क्रमश: $\angle BAC$, $\angle ABC$ और $\angle ACB$ के अन्त:समद्धिभाजक है। तीन अन्त समद्धिभाजक एक दूसरे से O बिन्दु पर मिलते है O बिन्दु से BC, CA और AB भुजा पर क्रमश: OD,OE और OF; OD = OE = OF है। अत: त्रिभुज के अन्तर्वृत के अर्द्धव्यास की लम्बाई OD है, माना कि अन्तर्वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई r मीटर है



शर्त्तानुसार,

$2\pi r = 44$

या, $2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$

या, $r = \frac{44 \times 7}{44} \quad \therefore r = 7$

ΔABC का क्षेत्रफल $=$ ΔBOC का क्षेत्रफल + ΔCOA का क्षेत्रफल + ΔAOB का क्षेत्रफल

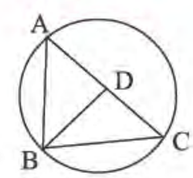
$= \frac{1}{2}.BC.\ r + \frac{1}{2}.CA.\ r + \frac{1}{2}.AB.r$

$= \frac{1}{2}.(BC + CA + AB)\ .r$ वर्ग मीटर

$= \frac{1}{2} \times 24 \times 7$ वर्ग मीटर $= 84$ वर्ग मीटर

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल 84 वर्ग मीटर

17 एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाईयाँ क्रमश: 9 से०मी० 12 से०मी और 15 से०मी० है। त्रिभुज के परिवृत्त क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = (15)^2$ अत: त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

त्रिभुज की AB = 9 से०मी० BC = 12 से०मी० और CA = 15 से०मी०

$\therefore \quad \angle ABC = 90^\circ$

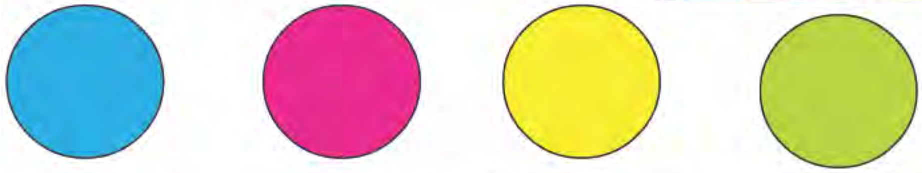
माना कि BD, ABC त्रिभुज की मध्यमा है। BD = AD = DC

$\therefore$ ABC त्रिभुज के परिवृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई $\frac{15}{2}$ से०मी० है।

अत: ABC त्रिभुज के परिवृत्त क्षेत्र का क्षेत्रफल $\pi \times (\frac{15}{2})^2$ वर्ग मीटर

$= \frac{22}{7} \times \frac{225}{4}$ वर्ग से०मी० $= 176\ \frac{11}{14}$ वर्ग से०मी०

रफीकुल और मेहर ने समान माप के अनेक भिन्न-भिन्न रंगों की वृत्ताकार चकितयाँ तैयार किया है।



मेरी बहन ने लाल रंग के वृत्त को एक बार मोड़कर कैंची से काटकर दो समान हिस्से कर लिये अर्थात् दो अर्द्धवृत्त पा लिया।

18 प्रत्येक वृत्ताकार चकती की अर्द्धपरिधि और अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

माना कि प्रत्येक वृत्ताकार चकती के अर्द्धव्यास की लम्बाई r इकाई है।

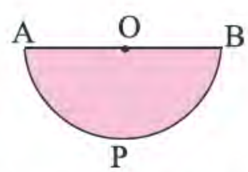
$\therefore$ प्रत्येक वृत्ताकार चकती की परिधि ☐ [$2\pi r/\pi r^2$] इकाई है।

वृत्ताकार चकती के केन्द्र पर बने कोणों का योग 360° है।

$\therefore$ APB अर्द्धवृत्ताकार चकती के $\angle AOB = 180°$ (जहाँ O वृत्ताकार चकती का केन्द्र है)

हम जानते है, चाप की लम्बाई और केन्द्र पर बना कोण सीधे समानुपाती होते है।

अत: $\dfrac{\overset{\frown}{APB} \text{ चाप की ल॰}}{\text{वृत्त की परिधि}} = \dfrac{180}{360}$



$\therefore$ $\overset{\frown}{APB}$ चाप की लम्बाई $= \dfrac{180}{360} \times$ वृत्त की परिधि

$= \dfrac{1}{2} \times 2\pi r$ इकाई $= \pi r$ इकाई, जहाँ अर्द्धवृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई r इकाई है।

दूसरी तरह से, केन्द्र पर 360° कोण होने पर वृत्त की परिधि $2\pi r$ इकाई

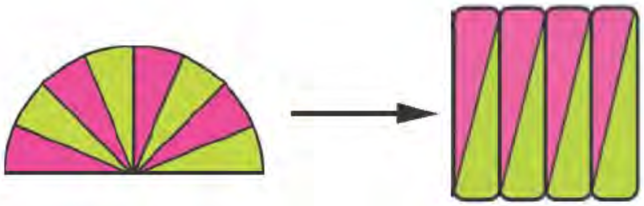
1° कोण उत्पन्न करने के लिये चाप की लम्बाई $= \dfrac{2\pi r}{360}$ इकाई

180° कोण उत्पन्न करने के लिए चाप की लम्बाई $= \dfrac{2\pi r}{360} \times 180$ इकाई

$= \pi r$ इकाई

स्वप्रयास से अर्द्धवृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

अर्द्धवृत्ताकार कागज को कई समान भागों में मोड़कर खोल लिया और मोड़ों को काटकर निम्न चित्र की तरह सजा दिया।



जो लगभग आयताकार क्षेत्र मिला उसकी लम्बाई $\frac{\pi r}{2}$ इकाई

और चौड़ाई r इकाई है।

स्वप्रयास से अर्द्धवृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल पाया $\frac{\pi r}{2} \times r$ की इकाई

$= \frac{\pi r^2}{2}$ वर्ग इकाई

19 अब अन्य प्रकार से अर्द्धवृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

$$\frac{\text{अर्द्धवृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल}} = \frac{180}{360}$$

(हम जानते है कि क्षेत्रफल और वृत्त के केन्द्र पर उत्पन्न कोण सीधा समानुपाती हैं)

या, अर्द्धवृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{180}{360} \times$ वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi r^2}{2}$ वर्ग इकाई

दूसरी तरह से, केन्द्र पर 360° कोण बनाने के लिए वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल πr^2 वर्ग इकाई

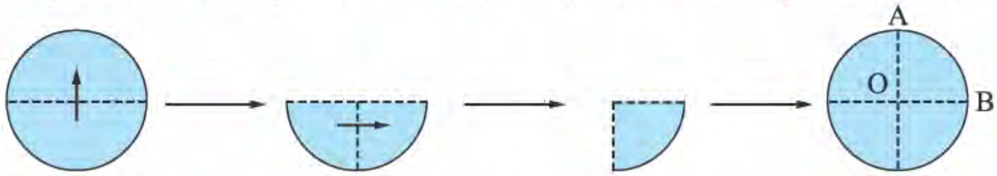
केन्द्र पर 1° कोण उत्पन्न करने के लिए वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2}{360}$ वर्ग इकाई

केन्द्र पर 180° कोण उत्पन्न करने के लिये वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \times 180}{360}$ वर्ग इकाई

$\therefore$ अर्द्धवृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{180}{360} \times \pi r^2$ वर्ग इकाई

$\frac{1}{2} =$ πr^2 वर्ग इकाई

मेहर का भाई आकर नीले रंग के वृत्ताकार क्षेत्र को नीचे की तरह समान चार बार मोड़कर खोल लेता है।



पाते है, नीले रंग के वृत्ताकार क्षेत्र को चार समान भागों में विभक्त करने पर वृत्तकला बन जाता है।

20 AOB वृत्तकला के केन्द्र पर बने कोण को मापकर देखते हैं कि AB चाप की लम्बाई कितनी है जहाँ वृत्ताकार क्षेत्र का अर्द्धव्यास r इकाई है।

पाते है AOB वृत्तकला के केन्द्र पर 90^0 का कोण बना है।

$$\frac{\widehat{AB} \text{ चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की परिधि}} = \frac{90}{360}$$ [∵ चाप की ल० और केन्द्र पर बने संगत कोण सीधा समानुपाती है]

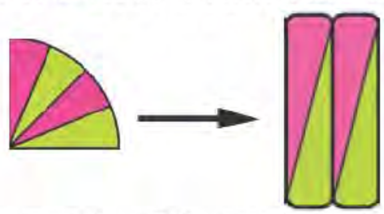
$$\therefore \widehat{AB} \text{ चाप की लम्बाई} = \frac{90}{360} \times \text{ वृत्त की परिधि}$$

$$= \frac{1}{4} \times 2\pi r \text{ इकाई}$$ [∵ वृत्त के अर्द्धव्यास की ल० = r इकाई]

$$= \frac{\pi r}{4} \text{ इकाई}$$

21 स्वप्रयास से AOB वृत्तकला का क्षेत्रफल कितना है, देखें।

AOB वृत्तकला को काटकर नीचे चित्र में दिखाए गये ढंग से दो बार मोड़कर हरे और लाल रंग से रंग दिया और मोड़कर खोल दिया। अब मोड़ों पर से काटकर नीचे प्रदर्शित चित्र की भाँति सजा लिया।



लगभग आयताकार मिले क्षेत्र की लम्बाई $\frac{\pi r}{4}$ इकाई और चौड़ाई r इकाई

∴ AOB वृत्तकला (secant) का क्षेत्रफल = AOB वृत्तकला की लम्बाई × चौड़ाई

$$= \frac{\pi r}{4} \times r \text{ वर्ग इकाई}$$

$$= \frac{\pi r^2}{4} \text{ वर्ग इकाई}$$

दूसरे प्रकार से केन्द्र पर बने कोण को मापकर AOB वृत्तकला का क्षेत्रफल ज्ञात करों।

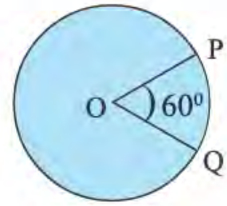
$$\frac{\text{AOB वृत्तकला का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल}} = \frac{90}{360}$$

$$\therefore \text{AOB वृत्तकला का क्षेत्रफल} = \frac{90}{360} \times \text{ वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल}$$

$$= \square \text{ वर्ग इकाई}$$

रफीकुल ने नीले रंग के वृत्ताकार क्षेत्र से एक वृत्तकला POQ काटा जिसके द्वारा वृत्त के केन्द्र पर 60° का कोण बनाया गया है।

22 गणना करके PQ चाप की लम्बाई और POQ वृत्तकला का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



$$\frac{\widehat{PQ} \text{ की लम्बाई}}{\text{वृत्त की परिधि}} = \frac{60}{360}$$

$$\therefore \widehat{PQ} \text{ की लम्बाई} = \frac{60}{360} \times \text{ वृत्त की परिधि}$$

$$\text{फिर} \quad \frac{\text{POQ वृत्तकला का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल}} = \frac{60}{360}$$

$$\therefore \text{POQ वृत्तकला का क्षेत्रफल} = \frac{60}{360} \times \text{ वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल}$$

∴ यदि किसी वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई r इकाई हो और वृत्त उस वृत्त का कोई वृत्तकला केन्द्र पर θ डिग्री का कोण बनाये तो

$$\text{उस चाप की लम्बाई} = \frac{\theta}{360} \times \text{ वृत्त की परिधि}$$
$$= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r \text{ इकाई}$$

$$\text{और उस वृत्तकला का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360} \times \text{ वृत्ताकार का क्षेत्रफल}$$
$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

23 अर्द्धवृत्ताकार एक पार्क को बेड़े से घेरने में 144 मीटर लम्बा बेड़ा लगता है। पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

माना कि अर्द्धवृत्ताकार पार्क के अर्द्धव्यास की लम्बाई r मीटर है।

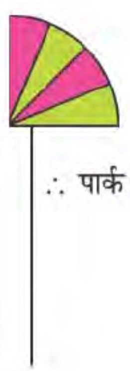
∴ पार्क की परिसीमा = $(\pi r + 2r)$ इकाई

अनुसार $\pi r + 2r = 144$

या, $\frac{22}{7} r + 2r = 144$

या, $\frac{36r}{7} = 144$

∴ r = ☐ [स्वयं लिखें]

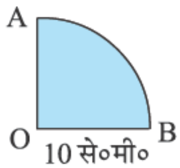


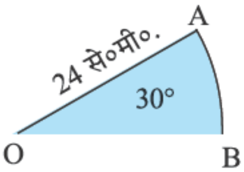
$$\therefore \text{पार्क का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \pi \times r^2$$
$$\frac{1}{2} = \frac{22}{7} \times \times 28 \times 28 \text{ वर्ग मीटर}$$

= ☐ वर्ग मीटर [स्वयं लिखें]

24 यदि अर्द्धवृत्ताकार पार्क की परिसीमा 108 मीटर हो तो पार्क का क्षेत्रफल कितना होगा ज्ञात करके लिखें। [स्वयं करें]

25 अब दिये गये निम्न वृत्त कलाओं के AB चाप की लम्बाई और वृत्त कलाओं की परिसीमा और क्षेत्रफल निकालें।

(i)


(ii)


(iii)

(i) $\overset{\frown}{AB}$ चाप की लम्बाई $= \dfrac{90}{360} \times 2 \times \pi \times 10$ से०मी०

($\because$ अर्द्धव्यास की ल० = 10 से०मी० और $\angle AOB = 90°$)

$= \dfrac{1}{4} \times 2 \times \dfrac{22}{7} \times 10$ से०मी०

$= \square$ से०मी०

$\therefore$ AOB वृत्त कला का क्षेत्रफल $= \overset{\frown}{AB}$ लम्बाई + 2 × अर्द्धव्यास की लम्बाई

= 15.7 से०मी० + 2 × 10 से०मी०

= 35.7 से०मी०

AOB वृत्त कला की परिसीमा $= \dfrac{90}{360} \times \pi \times (10)^2$ वर्ग से०मी०

$= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{22}{7} \times 10 \times 10$ वर्ग से०मी० $= \square$ वर्ग से०मी०

(ii) $\overset{\frown}{AB}$ चाप की लम्बाई $= \dfrac{30}{360} \times \square$

$= \dfrac{30}{360} \times 2 \times \dfrac{22}{7} \times 24$ से०मी०

$= \square$ से०मी० [स्वयं गणना करें]

$\therefore$ AOB वृत्त कला की परिसीमा $= \overset{\frown}{AB}$ की लम्बाई + 2 × अर्द्धव्यास की लम्बाई

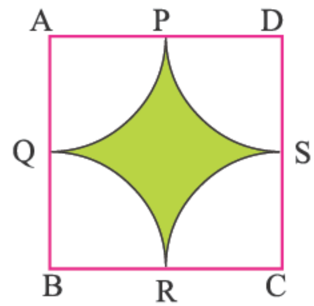
= (12.57 + 48) से०मी० $= \square$ से०मी०

AOB वृत्त कला का क्षेत्रफल $= \dfrac{\square}{360} \times$ वृत्त का क्षेत्रफल

$= \dfrac{1}{12} \times \dfrac{22}{7} \times 24 \times 24$ वर्ग से०मी० $= \square$ से०मी०

(iii) न० चित्र के $\overset{\frown}{AB}$ की लम्बाई, परिसीमा और क्षेत्रफल को ज्ञात कर लिखो। [स्वयं करें]

26 मधुमीता–परिवार के वर्गाकार बगीचे के चारों कोनों पर समान माप के फूल–बाग छोड़कर नीच के शेष भाग में कच्चे अन्न की खेती की गयी है। यदि प्रत्येक फूल–बाग 3.5 मी॰ लम्बे अर्द्धव्यास वाला वृत्ताकार अंश हो तो चित्र बनाकर बगीचे के बीच के कच्चे अन्न की खेती की जमीन की परिसीमा और बगीचे का क्षेत्रफल और बगीचे के कितने भाग में फूल–बाग है और कितनी जमीन पर अन्न की खेती की गयी है, ज्ञात कर लिखें।



माना कि ABCD मधुमीता–परिवार का वर्गाकार बगीचा है और A,B,C और D चार 3.5 मी॰ अर्द्धव्यास वाले वृत्ता कार क्षेत्रों के केन्द्र है।

$\therefore$ A केन्द्रीय वृत्त का APQ वृत्तकला फूल–बाग है।

इसी तरह B, C और D केन्द्रीय वृत्तों के क्रमशः BQR, CRS और DSP वृत्त–कलायें फूल–बाग है।

$\overset{\frown}{PQ}$ चाप की लम्बाई $= \frac{90}{360} \times$ वृत्त की परिधि

$= \square$ मीटर

$\therefore$ कच्चे अन्न के लिए क्षेत्र की परिसीमा $= \overset{\frown}{PQ}$ की ल॰ $+ \overset{\frown}{QR}$ की ल॰ $+ \overset{\frown}{RS}$ की ल॰ $+ \overset{\frown}{SP}$ की ल॰

$= 4 \times \overset{\frown}{PQ}$ की ल॰ [प्रतिवृत्त चाप की लम्बाई समान है]

$= 4 \times \frac{11}{2}$ मीटर $= \square$ मीटर

पूरे बगीचे का क्षेत्रफल $= (AD)^2 = (2 \times 3.5)^2$ वर्ग मीटर $= 49$ वर्ग मीटर

बगीचे के कितने भाग में फूलों की खेती हुई है और कितनी जगह कच्चे अन्न की खेती के लिये है, ज्ञात करते है

APQ, BQR, CRS और DPS वृत्त कलाओं के कुल क्षेत्रफल में फूलों की खेती हुई है।

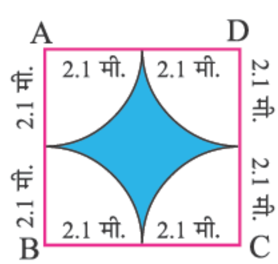
APQ वृत्त कला का क्षेत्रफल $= \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$ वर्ग मीटर $= \square$ वर्ग मीटर

$\therefore$ फूलों की खेती की जमीन $= 4 \times$ APQ वृत्त कला का क्षेत्रफल

$= 4 \times \frac{77}{8}$ वर्ग मीटर $= \square$ वर्ग मीटर

$\therefore$ कच्चे अन्न की खेती के लिये जमीन का क्षेत्रफल $(49 - 38.5)$ वर्ग मीटर $= \square$ वर्ग मीटर

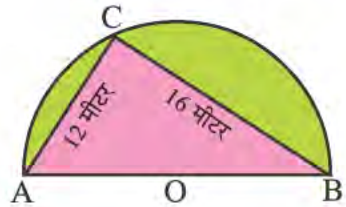
27 बगल में दिए गये चित्र की रंगीन जमीन का क्षेत्रफल ज्ञात करें [स्वयं करें]



28 नीचे दिये गये चित्र की तरह अर्द्धवृत्ताकार मैदान में त्रिभुजाकार जमीन पर अरूप बाबू ने घर बनाया है। त्रिभुजाकार जमीन की दो भुजाओं की लम्बाई क्रमशः 12 मीटर 16 मीटर है और इन भुजाओं के बीच बने कोण का मान 90° है। घर बनाने के बाद जितनी जमीन पड़ी है उसकी परिसीमा और क्षेत्रफल ज्ञात करें।

अरूप बाबू ABC समकोणिक त्रिभुजाकार जमीन पर घर बनाते है।

पहले अर्द्धवृत्ताकार मैदान का व्यास AB की लम्बाई ज्ञात करने की चेष्टा करते है। अर्द्धवृत्ताकार मैदान जिस वृत्ताकार मैदान का अंश है उसका केन्द्र O है।



ABC समकोणिक त्रिभुज में AC = 12 मीटर

और BC = 16 मीटर

पाइथागोरस प्रमेय से पाते हैं

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= (12^2 + 16^2)$ वर्ग मीटर

$\therefore$ AB = ☐ मीटर

$\therefore$ अर्द्धवृत्ताकार मैदान के अर्द्धव्यास की लम्बाई $= \frac{AB}{2} = 10$ मीटर

$\therefore$ $\widehat{AB}$ की लम्बाई = ☐ मीटर [स्वयं करें]

$\therefore$ अरूप बाबू के घर की जमीन को छोड़कर शेष जमीन की परिसीमा

= $\widehat{AB}$ की ल० + 12 मीटर + 16 मीटर

= 31.4 मीटर + 28 मीटर = 59.4 मीटर

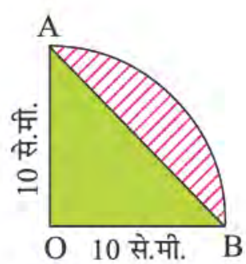
अरूप बाबू के घर की जमीन को छोड़कर शेष जमीन की परिसीमा $= \frac{1}{2} \times 12 \times 16$ वर्ग मीटर = ☐ वर्ग मीटर

$\therefore$ अरूप बाबू के घर की जमीन को छोड़कर शेष जमीन का क्षेत्रफल

= अर्द्धवृत्ताकार मैदान का क्षेत्रफल– ABC समकोणिक त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10$ वर्ग मीटर – 96 वर्ग मीटर = ☐ वर्ग मीटर

29 हसन ने 10 से०मी० लम्बे अर्द्धव्यास का एक वृत्त बनाकर काट लिया। उसने उस वृत्त को चार बार समान रूप से मोड़कर एक टुकड़ा काटकर पिचबोर्ड पर लटका दिया। राबिया ने उस वृत्ताकार टुकड़े पर बगल में दिखाए चित्र की तरह नक्शा बनाया। राबिया ने जितनी जगह पर नक्शा बनाया है उसकी परिसीमा और क्षेत्रफल ज्ञात करें।



$\widehat{AB}$ की लम्बाई = ☐ से०मी०

$\therefore$ AB की लम्बाई $= \sqrt{10^2 + 10^2}$ से०मी० = ☐ से०मी

$\therefore$ नक्शा के जगह की परिसीमा $= (15.7 + 10\sqrt{2})$ से०मी०

$= (15.7 + 10 \times 1.41)$ से०मी० [$\sqrt{2} = 1.41$]

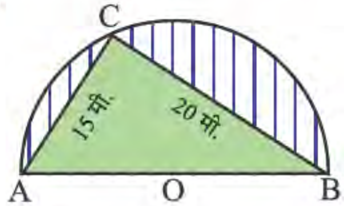
$= (15.7 + 14.1)$ से०मी० = 29.8 से०मी०

राजिया की नक्शा का क्षेत्रफल = AOB वृत्त कला का क्षेत्रफल – Δ AOB का क्षेत्रफल

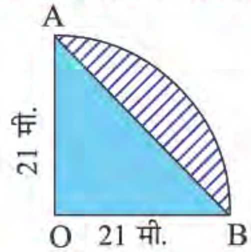
= ☐ वर्ग से०मी० [स्वयं लिखें]

30 निम्न वृत्त कलाओं में नक्शे की जगह (Shaded area) की परिसीमा और क्षेत्रफल ज्ञात करें।

(i)

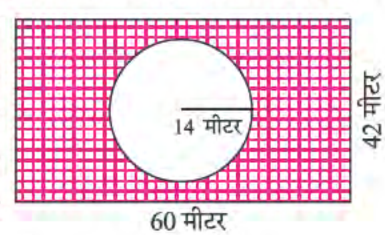


(ii)



हल करें — 18

1. अमीना बीबी खुले मैदान में एक खूँटी से 2.1 मीटर लम्बी रस्सी से गाय को बाँधा। गणना करके बतायें कि गाय सर्वाधिक कितनी जमीन का घास चर पायेगी ?
2. सुहाना एक वृत्त बनायेगी जिसकी परिधि 35.2 से०मी० होगी। गणना करके देखें कि जो वृत्त सुहाना बनायेगी उसका अर्द्धव्यास कितना लेगी और उस वृत्त का क्षेत्रफल क्या होगा ?
3. रेखा की भाभी ने एक गोलाकार टेबल का मेजपोश बनाया जिसका क्षेत्रफल 5544 वर्ग से०मी० है। वे उस टेबल के मेजपोश के चारों ओर रंगीन फीता लगाना चाहती हैं। गणना कर देखें कि भाभी को कितना लम्बा खरीदना होगा।
4. हमलोगों के इलाके के खेल के वृत्ताकार मैदान को चारों ओर से बेड़े से घेरने में 21 रुपया प्रति मीटर की दर से 924 रुपया खर्च हुए। तो मैदान को त्रिपाल से ढकने के लिए कितने वर्ग मीटर त्रिपाल खरीदना पड़ेगा, ज्ञात करें।
5. फारुक एक वृत्त बनायेगा जिसका क्षेत्रफल 616 वर्ग से०मी० होगा। गणना करके देखें कि फारुक जो वृत्त बनाएगा उसके अर्द्धव्यास की लम्बाई और वृत्त की परिधि कितनी है ?
6. पलाश और पियाली ने दो वृत्त बनाये है। जिनके अर्द्धव्यास का अनुपात 4 : 5 है। दोनों के द्वारा बनाये गये वृत्तों के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात करें।
7. सुमित और बेरा ने समान लम्बाई के दो ताँबे का तार खरीदा है। सुमता ने उस तार को मोड़कर आयताकार चित्र बनाया जिसकी लम्बाई 48 से०मी० और चौड़ाई 40 से०मी० है। बेरा ने उसी लम्बाई के तार को मोड़कर वृत्त बनाया। गणना करके बतायें कि सुमित द्वारा बनाये आयताकार चित्र और बेरा द्वारा बनाये वृत्त में से किसमें ज्यादा जगह आ पायी है।
8. पायोनियर एथलेटिक क्लब के आयताकार मैंदान के बाच में एक वृत्ताकार जलाशय है जिसके अर्द्धव्यास की लम्बाई 14 मीटर है। आयताकार मैदान की लम्बाई और चौड़ाई क्रमश: 60 मीटर और 42 मीटर है। जलाशय को छोड़कर आयताकार मैदान के शेष भाग में घास लगाने का 75 रुपया प्रति वर्ग मीटर की दर से कितना खर्च होगा, ज्ञात करें।

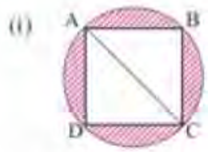


9. ईटालगाछा फ्रेण्डस् एसोसियेशन क्लब के वृत्ताकार पार्क के बाहर से परिधि के बराबर 7 मीटर चौड़ा रास्ता है। वृत्ताकार पार्क की परिधि 352 मीटर हो तो रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिखो। प्रति वर्ग मीटर 20 की दर से रास्ते को पक्का करने को कितने रुपये खर्च होंगे, ज्ञात करें।
10. अनोयारा बीबी ने अपने अर्द्धवृत्ताकार जमीन के चारों ओर 18.50 रुपया प्रति मीटर की दर से घेरा लगाने में 2664 रुपया खर्च किया है। वे यदि अपने इसी अर्द्धवृत्ताकार जमीन पर 32 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से खेती करतीं तो कितने रुपये खर्च करतीं, ज्ञात करें।

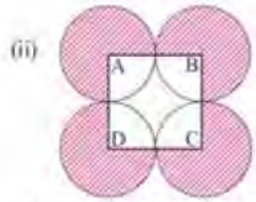
11. आज मेरे मित्र रजत ने एक निश्चित वेग से दौड़कर विद्यालय के वृत्ताकार मैदान के चारों ओर प्रतक्षिणा की। उसी वेग से मैदान के व्यास के बराबर दौड़ने में 30 सेकेण्ड कम समय लगा। यदि रजत का वेग 90 मीटर प्रति सेकेण्ड हो तो विद्यालय के मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

12. वकुलतला के वृत्ताकार मैदान के बाहर से चारों ओर एक समान चौड़ाई का रास्ता है। रास्ते की बाहरी सीमा रेखा की लम्बाई भीतरी सीमा रेखा की लम्बाई से 132 मीटर अधिक है। रास्ते का क्षेत्रफल 14190 वर्ग मीटर हो तो वृत्ताकार मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

13. **निम्न चित्रों के रेखांकित अंशों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।**

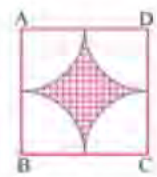


ABCD एक वर्ग है। वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई 7 से०मी० है।



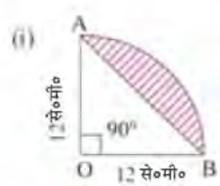
प्रत्येक वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई 3.5 से०मी०
चार वृत्तों के केन्द्र A, B, C और D है।

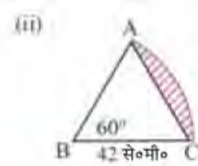
14. दिनेश ने अपनी कक्षा के कितने साथी कौन सा खेल खेलना पसन्द करते है। इसका एक पाई चार्ट तैयार किया। उसने वृत्त के अर्द्धव्यास की लम्बाई 3.5 से०मी० लिया। प्रत्येक वृत्तकला की परिसीमा और क्षेत्रफल लिखें।



15. नीतू ने एक वर्गक्षेत्र ABCD बनाया जिसके प्रत्येक भुजा की लम्बाई 12 से०मी० है। मेरी दीदी ने बगल में दिये गये चित्र की तरह A, B, C और D बिन्दुओं को केन्द्र मानकर 6 से०मी० लम्बे अर्द्धव्यास के चार चाप अंकित किया और कुछ जगह नक्का बना दिया। गणना कर नक्शा किये गये क्षेत्र की परिसीमा और क्षेत्रफल लिखें।

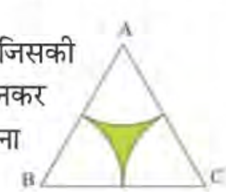
16. एक वृत्ताकार मैदान का क्षेत्रफल 154 वर्ग से०मी० है। इस वृत्ताकार मैदान के चारों ओर बने परिवर्ग क्षेत्र की परिसीमा और क्षेत्रफल लिखें। यदि यह वर्ग वृत्ताकार मैदान के अन्दर (अन्तः वर्ग) हो तो वर्ग क्षेत्र की परिसीमा और क्षेत्रफल कितना होता, लिखें।





17. **निम्न वृत्त कलाओं के रेखांकित अंचलों की परिसीमा और क्षेत्रफल लिखें—**

18. लीना ने मेले से एक कंगन खरीदकर हाथ में पहना। कंगन में 269.5 वर्ग से०मी० धातु है। कंगन के बाहरी व्यास की लम्बाई 28 से०मी० हो तो भीतरी व्यास की लम्बाई ज्ञात कर लिखें।



19. प्रतूल ने बगल में दिये गये चित्र की तरह एक समबाहु त्रिभुज ABC बनाया है जिसकी प्रत्येक भुजा 10 से०मी० लम्बी है। सुमिता वे A, B और C बिन्दुओं का केन्द्र मानकर 5 से०मी० अर्द्धव्यास से तीन वृत्त-चाप खींचे और बीच के भाग को रंग दिया। गणना करके रंगे हुये भाग का क्षेत्रफल लिखे। [$\sqrt{3} = 1.732$]

20. राबिया ने एक बड़े कागज पर 21 से०मी० लम्बी भुजाओं वाला एक समबाहु त्रिभुज बनाया। उस समबाहु त्रिभुज का एक अन्तवृत्त बनाकर वृत्ताकार भाग को रंग हुये भाग का क्षेत्रफल लिखें।

21. एक समबाहु त्रिभुज के परिर्वृत्त का क्षेत्रफल 462 वर्ग से०मी० है। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कर लिखें।

22. एक त्रिभुज की परिसीमा 32 से०मी० है और त्रिभुज के अन्तर्वृत्त का क्षेत्रफल 38.5 वर्ग से०मी० है। तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिखे।

23. 20 से०मी० 15 से०मी० 25 से०मी० लम्बी भुजाओं वाले त्रिभुज के अन्तर्वृत्त और परिवृत्त के अर्द्धव्यासों की लम्बाई लिखें। अन्तर्वृत्त और परिवृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिखें।

24. जया ने एक वर्ग क्षेत्र में अन्तर्वृत्त अंकित किया। वह वृत्त एक दूसरे समबाहु त्रिभुज का परिवृत्त है। जिसके प्रत्येक भुजा की लम्बाई $4\sqrt{3}$ से०मी० है। वर्ग क्षेत्र के एक विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कर लिखें।

25. सुमित ने एक तार को समान भागों में बाँटकर दो टुकड़े किये। एक टुकड़े को वर्गाकार तार से 33 से०मी० ज्यादा स्थान घेरे तो तार की पूरी लम्बाई ज्ञात कर लिखें।

26. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.)

(i) एक वृत्ताकार क्षेत्रफल x वर्ग इकाई, परिधि y इकाई और व्यास की लम्बाई z इकाई हो तो $\frac{x}{yz}$ का मान है।

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{8}$

(ii) एक वृत्त के परिवर्ग और अर्न्तवर्ग के क्षेत्रफल का अनुपात है।

(a) 4 : 1 (b) 1 : 4 (c) 2 : 1 (d) 1 : 2

(iii) एक वृत्ताकार क्षेत्र के परिधि और क्षेत्रफल का संख्यामान समान है। तो उस वृत्त के परिवर्ग के एक विकर्ण की लम्बाई है।

(a) 4 इकाई (b) 2 इकाई (c) $4\sqrt{2}$ इकाई (d) $2\sqrt{2}$ इकाई

(iv) एक समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त और अन्तर्वृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात है।

(a) 4 : 1 (b) 1 : 4 (c) 2 : 1 (d) 1 : 2

(v) एक वलयाकृति लोहे के पत्तर का भीतरी व्यास 20 से०मी० और बाहरी व्यास 22 से०मी० है। वलय में लोहे का पत्तर है।

(a) 22 वर्ग से०मी० (b) 44 वर्ग से०मी० (c) 66 वर्ग से०मी० (d) 88 वर्ग से०मी०

27. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :

(i) एक वृत्ताकार क्षेत्र के अर्द्धव्यास की लम्बाई 10 % बढ़ाने पर वृत्ताकार क्षेत्र के क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

(ii) एक वृत्ताकार क्षेत्र की परिसीमा 50% ह्रास करने पर वृत्ताकार क्षेत्र के क्षेत्रफल में कितनी प्रतिशत कमी होगी ?

(iii) एक वृत्ताकार क्षेत्र के अर्द्धव्यास की लम्बाई r मीटर है। एक दूसरे वृत्ताकार क्षेत्र के अर्द्धव्यास की लम्बाई कितनी होने पर उसका क्षेत्रफल पहले वृत्ताकार क्षेत्र के क्षेत्रफल का x गुणा होगा ?

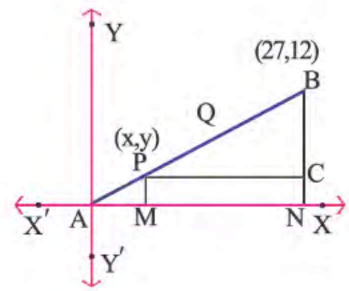
(iv) 3 से०मी० 4 से०मी० और 5 से०मी० भुजा वाले त्रिभुज के परिवृत्त का क्षेत्रफल कितना है, गणना करें।

(v) समान मुटाई के एक टिन के पत्तर से तीन वृत्ताकार चकतियाँ काट ली गयीं। तीनों वृत्ताकार चकतियों के व्यास की लम्बाई का अनुपात 3 : 5 : 7 हो तो उनके भारों का अनुपात क्या होगा, लिखें।

19 स्थानांक ज्यामिति:सरलरेखा–खण्ड का अन्तःविभाजन और बहिर्विभाजन
(CO-ORDINATE GEOMETRY: INTERNAL AND EXTERNAL DIVISION OF STRAIGHT LINE SEGMENT)

इस वर्ष फरवरी महीने में हमलोगों के तेतुलतल्ला गाँव के मिलनी संघ कल्ब के बड़े आयताकार मैदान में नाटक का आयोजन होगा। इसलिए मैदान को चारो ओर से बाँस से घेरा जाएगा। पहले इस आयताकार मैदान के विकर्ण पर चार बाँस समान समान दूरी पर गाड़े जाएगें।

1 चित्र बनाकर देखा जाय कि किन–किन बिन्दुओं पर बाँस गाड़े जाएगें।



आयताकार मैदान की लम्बाई 27 मीटर और चौड़ाई 12 मीटर है।

मैदान की लम्बाई x अक्ष पर और चौड़ाई y अक्ष पर अंकित करते है।

माना कि आयताकार मैदान के A (0,0) बिन्दु पर पहला बाँस गाड़ा गया।

दोनों अक्षों पर सबसे छोटे वर्ग की एक भुजा की लम्बाई 1 मीटर के समान मानकर B (27,12) बिन्दु पर अन्तिम बाँस गाड़ा गया।

$\therefore$ A और B के बीच समान–समान दूरी पर दो बाँस गाड़े जायेंगे।

माना कि P और Q दो बिन्दु A और B बिन्दुओं के बीच इस प्रकार हैं कि AP = PQ = QB हो।

$\therefore$ P, AB रेखा खण्ड को 1 : 2 अनुपात में आन्तरिक रूप में विभाजित करता है।

फिर Q, AB रेखा खण्ड को 2 : 1 अनुपात में आन्तरिक रूप में विभाजित करता है।

2 P और Q की ठीक–ठीक स्थिति जानने के लिए P और Q के स्थानांक ज्ञात करने होंगे। किन्तु P और Q के स्थानांक कैसे पायेंगे ?

माना कि P बिन्दु का स्थानांक (x, y) है। P और B बिन्दुओं से x अक्ष पर PM और BN लम्ब खींचा जो x अक्ष से क्रमशः M और N बिन्दु पर मिलते है। फिर P बिन्दु से BN पर PC लम्ब खींचा जो BN से बिन्दु C पर मिलता है।

Δ PAM और Δ BPC के संगत कोण परस्पर समान हैं।

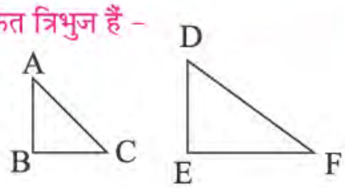
अर्थात् Δ PAM और Δ BPC समान कोणिक हैं।

दो त्रिभुज समानकोणिक हो तो उनकी भुजाओं में क्या सम्बंध होता हैं - देखें।

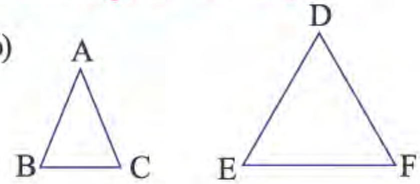
मारिया ने अपनी अभ्यास पुस्तिका में तीन जोड़े समानकोणिक त्रिभुज अंकित किये हैं।

अंकित त्रिभुज हैं -

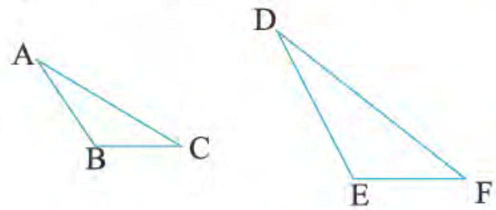
(a)



(b)



(c)



चित्र (a) में Δ ABC और Δ DEF में $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$;
अब Δ ABC और Δ DEF की भुजाओं को पैमाने से मापकर पाते है,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{\square}{\square}, \quad \frac{BC}{EF} = \frac{\square}{\square} \text{ और } \frac{AC}{DF} = \frac{\square}{\square}$$

अर्थात् पाते है कि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

अर्थात् पाते है कि Δ ABC और Δ DEF की संगत भुजाओं की लम्बाईयाँ समानुपाती हैं।

चित्र (a), (b) और (c) के त्रिभुजो की भुजाओं को मापकर पाया है

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

अन्य किन्हीं दो समान कोणिक त्रिभुजों को बनाकर देखे कि त्रिभुजों की संगत भुजाओं की लम्बाईयाँ समानुपाती है। [स्वयं करे]

पाते है, दो त्रिभुज समान कोणिक हो तो उनकी संगत भुजाओं की लम्बाईयाँ समानुपाती होती हैं।

दो त्रिभुज समान कोणिक हो तो वे एक दूसरे के सदृश्य होते हैं अर्थात् उनकी संगत भुजाये समानुपाती होती हैं।

चूँकि Δ PAM और Δ BPC समानकोणिक हैं

> "दो त्रिभुज समानकोणिक हो तो उनकी संगत भुजाये समानुपाती होती हैं"। यह प्रमेय हम बाद में पढ़ेंगे।

$\therefore \dfrac{PA}{BP} = \dfrac{AM}{PC} = \dfrac{PM}{BC}$

अर्थात् $\dfrac{PA}{BP} = \dfrac{AM}{PC}$

या, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{27 - x}$

या, $27 - x = 2x$

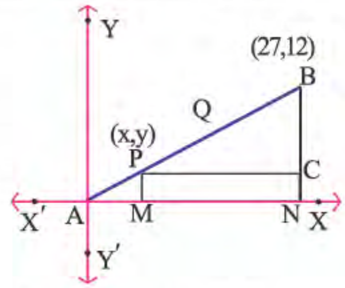
$\therefore \quad x = 9$

फिर, $\dfrac{PA}{BP} = \dfrac{PM}{BC}$

या, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{y}{12 - y}$

या, $12 - y = 2y$

$\therefore \quad y = 4 \qquad \therefore$ P बिन्दु का स्थानांक (9,4)



$\therefore$ (9,4) बिन्दु A और B बिन्दु को AB को आन्तरिक रूप से 1 : 2 अनुपात में विभाजित करता हैं।

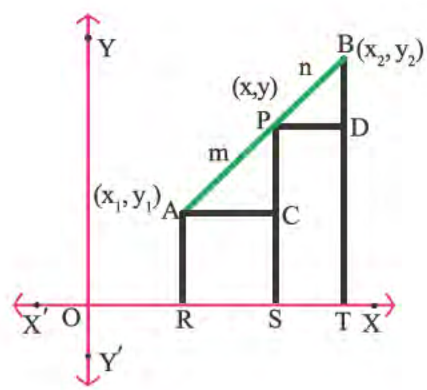
3 इसी प्रकार Q बिन्दु का स्थानांक लिखें जो A और B बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्ड AB को आन्तरिक रूप से 2 : 1 अनुपात में विभाजित करता हैं। [स्वयं करे]

4 यदि A (x_1, y_1) और B (x_2, y_2) किन्ही दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को P बिन्दु m : n अनुपात में आन्तरिक रूप से विभाजित करे तो चित्र बनाकर P का स्थानांक क्या होगा गणना करते हैं।

माना कि P बिन्दु का स्थानांक (x, y) हैं।

A, B और P बिन्दु से x अक्ष पर क्रमशः AR, PS और BT तीन लम्ब खींचा जो x अक्ष को क्रमशः R, S और T बिन्दु पर काटते हैं।

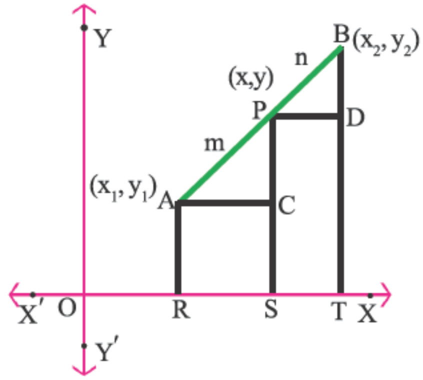
A और P बिन्दु से PS और BT पर क्रमशः AC और PD दो लम्ब खींचा तो PS और BT से क्रमशः C और D बिन्दुओं पर मिलते हैं।।



पाते हैं, Δ PAC और Δ PBD समान कोणिक है।

$\therefore \Delta$ PAC और Δ PBD सदृश्य हैं अर्थात् इनकी संगत भुजाओं की समानुपाती हैं।

अत : $\dfrac{PA}{BP} = \dfrac{AC}{PD} = \dfrac{PC}{BD}$ .... (i)



चूँकि, A और B बिन्दु के स्थानांक क्रमशः (x_1, y_1) और (x_2, y_2)

$\therefore$ $AC = RS = OS - OR = x - x_1$

$PD = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PC = PS - CS = PS - AR = y - y_1$

$BD = BT - DT = BT - PS = y_2 - y$

अतः (i) से पाते हैं, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$

यहाँ $\dfrac{m}{n} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$

या, $mx_2 - mx = nx - nx_1$

या, $mx_2 + nx_1 = mx + nx$

या, $x(m + n) = mx_2 + nx_1$

$\therefore x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

फिर $\dfrac{m}{n} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$

या, $my_2 - my = ny - ny_1$

या, $my_2 + ny_1 = my + ny$

या, $my_2 + ny_1 = y(m + n)$

$\therefore y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$

पाया है, बिन्दु **A (x_1, y_1)** और **B (x_2, y_2)** की मिलाने वाली रेखा खण्ड को **m : n** अनुपात में आन्तरिक रुप से विभाजित करने वाले बिन्दु का स्थानांक,

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

इसे विभाजक सूत्र (**Section Formula**) कहा जाता है।

यदि, बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ बिन्दुओं के बीच मध्य बिन्दु हो अर्थात् तब 1 : 1 अनुपात में AB सरल रेखा खण्ड को आन्तरिक रूप से विभाजित करे तो P बिन्दु का स्थानांक होगा,

$$\left(\frac{1.x_2 + 1.x_1}{1+1}, \frac{1.y_2 + 1.y_1}{1+1}\right) \quad [\text{यहाँ}, m = 1, n = 1]$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

अर्थात् (x_1, y_1) और (x_2, y_2) दो बिन्दुओं के मध्य बिन्दु का स्थानांक $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ है।

5 अब (6,4) और (7,–5) बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्ड को जो बिन्दु 3 : 2 अनुपात में आन्तरिक रूप से बाँटता हो उसका स्थानांक ज्ञात करे।

जो बिन्दु (6,4) और (7,–5) को मिलाने वाले रेखा खण्ड को आन्तरिक रूप से 3 : 2 अनुपात में विभाजित करता है उसका स्थानांक $= \left(\frac{3\times7+2\times6}{3+2}, \frac{3\times(-5)+2\times4}{3+2}\right)$

$$= \left(\frac{33}{5}, -\frac{7}{5}\right)$$

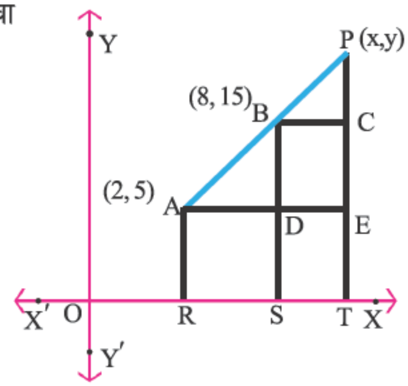
∴ अभीष्ट स्थानांक $\left(\frac{33}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

6 (9,5) और (–7,–3) बिन्दुओं के मिलाने वाली रेखा को P बिन्दु 3 : 2 अनुपात में आन्तरिक रूप से विभाजित करता है तो चित्र बनाकर P बिन्दु का स्थानांक ज्ञात करे। [स्वयं करे]

7 यदि A (2,5) और B (8,15) बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्ड को P बिन्दु 3:2 अनुपात में विभाजित करे तो बिन्दु का स्थानांक ज्ञात कर लिखें। माना कि P बिन्दु का स्थानांक (x, y) है ।

A,B और P से x अक्ष पर क्रमशः AR, BS और PT लम्ब खींचा जो x अक्ष से क्रमशः R,S और T बिन्दु पर मिलते हैं।

फिर, A और B बिन्दु से BS और PT पर क्रमशः AD और BC लम्ब खींचा जो BS और PT से क्रमशः D और C बिन्दु पर मिलते हैं। AD का बढ़ा हुआ भाग PT से E बिन्दु पर मिलता हैं। चूँकि BS और CT समानान्तर हैं और AD, BS पर लम्ब हैं, अतः AE, PT पर भी लम्ब हैं।



Δ APE और Δ BPC समान कोणिक हैं।

∴ Δ APE और Δ BPC सदृश्य हैं।

अर्थात् त्रिभुजों की संगत भुजाओ की समानुपाती हैं।

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BC} = \frac{PE}{PC}$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{x-2}{x-8} = \frac{y-5}{y-15}$$

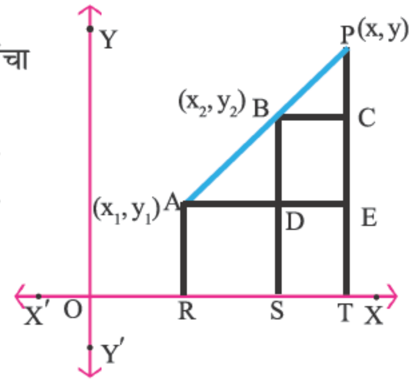
यहाँ, $\frac{3}{2} = \frac{x-2}{x-8}$ और $\frac{3}{2} = \frac{y-5}{y-15}$ ∴ x = ☐ और y = ☐

∴ P बिन्दु का स्थानांक (20,35) हैं

∴ (20,35) बिन्दु A (2,5) और B (8,15) दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को बाह्य रूप से 3 : 2 अनुपात में बाँटता है।

8 अब चित्र बनाकर P बिन्दु का स्थानांक ज्ञात करते हैं जो A (x_1, y_1) और B (x_2, y_2) बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्ड को बहिर्स्थ रूप से m : n अनुपात में विभाजित करता हैं।

माना कि P बिन्दु का स्थानांक (x,y) है।



A, B और P बिन्दु से x अक्ष पर क्रमशः AR, BS और PT लम्ब खींचा जो x-axis से क्रमशः R, S और T बिन्दुओं पर मिलते हैं।

A और B बिन्दु से BS और PT पर क्रमशः AD और BC लम्ब अंकित किया जो BS और PT से क्रमशः D और C बिन्दुओं पर मिलते हैं। AD का बढ़ा हुआ भाग PT से E बिन्दु पर मिलता है।

चूँकि BS और PT परस्पर समानान्तर हैं AD, BS पर लम्ब हैं

अतः AE, PT पर भी लम्ब है।

Δ AEP और Δ BCP समान कोणिक हैं

$\therefore$ Δ AEP और Δ BCP सदृश्य है अर्थात इन त्रिभुजों की संगत भुजाये समानुपाती हैं।

अतः $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AE}{BC} = \dfrac{PE}{PC}$ .... (i)

यहाँ $AE = RT = OT - OR = x - x_1$

$BC = ST = OT - OS = x - x_2$

फिर $PE = PT - TE = PT - AR = y - y_1$

$PC = PT - CT = PT - BS = y - y_2$

अतः (i) से पाते है, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{x - x_1}{x - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y - y_2}$

यहाँ, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{x - x_1}{x - x_2}$

या, $mx - mx_2 = nx - nx_1$

या, $mx - nx = mx_2 - nx_1$

या, $x(m - n) = mx_2 - nx_1$

$\therefore$ $x = \dfrac{mx_2 - nx_1}{m - n}$

फिर, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{y - y_1}{y - y_2}$

या, $my - my_2 = ny - ny_1$

या, $my - ny = my_2 - ny_1$

या, $y(m - n) = my_2 - ny_1$

$\therefore$ $y = \dfrac{my_2 - ny_1}{m - n}$

$\therefore$ जो बिन्दु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्ड को m : n अनुपात में बहिर्स्थ रूप से विभाजित करता है उसका स्थानांक

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}\right) \text{ है।}$$

9 यदि A = (1,5) और B (– 4,7) हो, तो P बिन्दु का AB सरल रेखा खण्ड को 3 : 2 अनुपात में बाहरी रूप से विभाजित करता हैं।

$$\therefore \text{ P बिन्दु का स्थानांक} = \left(\frac{3\times(-4) - 2\times1}{3-2}, \frac{3\times7 - 2\times5}{3-2}\right)$$

$$= \left(\frac{-12-2}{1}, \frac{21-10}{1}\right)$$

$$= (-14, 11)$$

∴ P बिन्दु का स्थानांक = (–14, 11)

10 (4, 3) और (5,–4) बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखा खण्ड x अक्ष द्वारा किस अनुपात में विभक्त हुआ हैं, ज्ञात कर लिखें।

माना कि (4,3) और (5, –4) बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखा खण्ड x अक्ष के द्वारा P बिन्दु पर m : n अनुपात में विभक्त हुआ है।

$$\therefore \text{ P बिन्दु को कोटि (y स्थानांक का मान)} = \frac{m(-4)+n(3)}{m+n}$$

चूँकि P बिन्दु x अक्ष पर स्थित है, अतः y = 0 होगा

$$\therefore \quad \frac{-4m+3n}{m+n} = 0$$

या, $-4m + 3n = 0$

या, $3n = 4m$

या, $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$

$\therefore \ m : n = 3 : 4$

∴ (4,3) और (5,– 4) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा खण्ड x अक्ष द्वारा 3 : 4 अनुपात में अन्तर्विभक्त होता है।

11 प्रमाणित करे कि (–7,2), (19,8), (15,–6) और (–11,–12) बिन्दुओं को परस्पर मिलाने से समानान्तर चतुर्भुज बनता है।

माना कि A = (–7, 2) , B = (19,8) , C = (15, – 6) और D = (–11,–12) बिन्दुओं को परस्पर मिलाने से कार्टेसियन तल पर अंकित करने पर ABCD चतुर्भुज तैयार हुआ।

$$\text{AC विकर्ण के मध्य बिन्दु का स्थानांक} = \left(\frac{-7+15}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = (4, -2)$$

$$\text{BD विकर्ण के मध्य बिन्दु का स्थानांक} = \left(\frac{19-11}{2}, \frac{8-12}{2}\right) = (4, -2)$$

ABCD चतुर्भुज के विकर्ण AC और BD एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

∴ ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है।

हल करें — 19

1. निम्न दो बिन्दुओं को मिलाने वाले सरल रेखा खण्ड को दिये गये अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु का स्थानांक निर्णय करें।

(i) (6,–14) और (–8, 10); 3 : 4 अनुपात में अन्त:रूप रूप से।

(ii) (5, 3) और (–7, –2); 2 : 3 अनुपात में आन्तरिक रूप से।

(iii) (–1, 2) और (4, –5); 3 : 2 अनुपात में बहिस्थः रूप से।

(iv) (3, 2) और (6, 5); 2 : 1 अनुपात में बाहरी रूप से।

2. निम्न दो बिन्दुओं से बनी सरल रेखा खण्डों के मध्य बिन्दु का स्थानांक निर्णय करें।

(i) (5,4) और (3,–4) (ii) (6,0) और (0,7)

3. (1, 3) बिन्दु (4, 6) और (3, 5) दो बिन्दुओं से बने रेखा खण्ड को किस अनुपात में विभाजित करता हैं – ज्ञात कर लिखें।

4. (7, 3) और (–9, 6) दो बिन्दुओं को मिलाने से बना रेखा खण्ड y अक्ष द्वारा किस अनुपात मे विभक्त हुआ है – लिखे।

5. प्रमाणित करें कि A (7, 3), B (9, 6), C (10, 12) और D (8, 9) बिन्दुओं को परस्पर मिलाने से एक समानान्तर चतुर्भुज बनता है।

6. यदि (3, 2), (6, 3), (x, y) और (6, 5) बिन्दुओं को परस्पर मिलाने से समानान्तर चतुर्भुज बने तो (x, y) का मान कितना है ज्ञात कर लिखें।

7. यदि (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) और (x_4, y_4) बिन्दुओं को मिलाने से एक समानान्तर चतुर्भुज बने तो प्रमाणित करे कि $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ और $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$

8. ABC त्रिभुज के A, B और C शीर्ष बिन्दुओं के स्थानांक क्रमश: (–1, 3), (1,–1) और (5, 1) है। AD मध्यमा की लम्बाई ज्ञात करें।

9. एक त्रिभुज के तीन शीर्ष बिन्दुओं के स्थानांक क्रमश: (2, –4), (6, –2) और (–4, 2); त्रिभुज की तीनों मध्यमाओं की लम्बाई ज्ञात करें।

10. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु के स्थानांक (4, 3), (–2, 7) और (0, 11) है। त्रिभुज के तीनों शीर्ष बिन्दुओं का स्थानांक ज्ञात करें।

11. बहुविकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.):

(i) $(\ell, 2m)$ और $(-\ell + 2m, 2\ell - 2m)$ बिन्दुओं से बने रेखा खण्ड के मध्य बिन्दु का स्थानांक है

(a) (ℓ, m) (b) $(\ell, -m)$ (c) $(m, -\ell)$ (d) (m, ℓ)

(ii) A(1, 5) और B (–4, 7) बिन्दुओं से बने रेखा खण्ड को P बिन्दु आन्तरिक रूप से 2 : 3 अनुपात से विभाजित करता है तो P बिन्दु के भुज का मान है

(a) –1 (b) 11 (c) 1 (d) –11

(iii) किसी वृत्त के व्यास के सिरों के बिन्दुओं के स्थानांक (7, 9) और (–1, –3) है। वृत्त के केन्द्र का स्थानांक है

(a) (3, 3) (b) (4, 6) (c) (3, –3) (d) (4, –6)

(iv) (2, –5) और (–3, –2) बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्ड को एक बिन्दु 4 : 3 अनुपात में बहिर्स्थ रूप से विभाजित करता है। उस बिन्दु का कोटि है

(a) –18 (b) –7 (c) 18 (d) 7

(v) PQRS समानान्तर चतुर्भुज में P(1, 2), Q (4, 6), R (5, 7) और S (x, y) शीर्ष बिन्दु हैं तो

(a) x = 2, y = 4 (b) x = 3,y = 4 (c) x = 2, y = 3 (d) x = 2, y = 5

12. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्नः

(i) एक वृत्त का केन्द्र C और व्यास AB है। A और C के स्थानांक क्रमशः (6, –7) और (5, –2) हो तो B बिन्दु का स्थानांक ज्ञात करें।

(ii) P और Q बिन्दु क्रमशः पहले और तीसरे पाद में स्थित हैं और x अक्ष तथा y अक्ष से दोनों बिन्दुओं की दूरी क्रम से 6 इकाई और 4 इकाई। PQ सरल रेखा खण्ड के मध्य बिन्दु का स्थांनाक लिखें।।

(iii) A और B बिन्दु क्रमशः द्वितीय और चतुर्थ पाद में स्थित है और x अक्ष और y अक्ष से दोनो बिन्दुओं की दूरी क्रमशः 8 इकाई और 6 इकाई है। तो AB रेखा खण्ड के मध्य बिन्दु का स्थानांक ज्ञात करें।

(iv) AB सरल रेखा खण्ड पर P कोई बिन्दु है और AP = PB है, A और B बिन्दुओं के स्थानांक क्रमशः (3, –4) और (–5, 2) है, P बिन्दु का स्थानांक लिखें।

(v) ABCD आयताकार क्षेत्र की भुजायें दो अक्षों के समानान्तर हैं। B और D बिन्दु के स्थानांक क्रमशः (7, 3) और (2, 6) हैं, A और C बिन्दु के स्थानांक और AC विकर्ण के मध्य बिन्दु का स्थानांक लिखें।

20 स्थानांक ज्यामिति : त्रिभुजाकृति क्षेत्र का क्षेत्रफल
CO-ORDINATE GEOMETRY: AREA OF TRIANGULAR REGION

आज हम नौवीं और दसवीं कक्षा के सभी साथी वर्गाकित कागज के बिना ही विभिन्न प्रकार के बिन्दु लेकर कुछ मजेदार खेल तैयार करने की कोशिश करते हैं। इसीलिए दसवीं कक्षा की रफिका बेगम और गोरा ने बड़ी कक्षा के एक बोर्ड पर कई बिन्दुओं के स्थानांक लिखें।

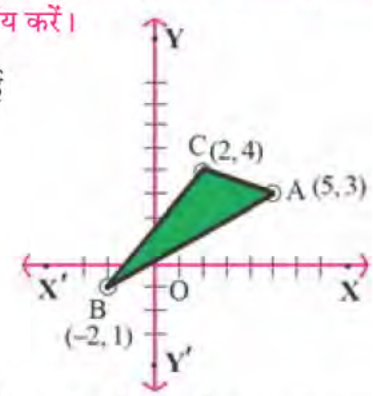
1 पहले मैं और विवेक बगल के बोर्ड पर कुछ बिन्दुओं को अंकित करेगें और उनके बीच की दूरी ज्ञात करेगें। विवेक ने A (5, 3) और B (– 2, 1) लिखा। अब मैं बोर्ड पर A और B बिन्दु अंकित करता हूँ और इनके बीच की दूरी ज्ञात करता हूँ। AB एक सरल रेखाशं की लम्बाई निर्णय करें।

AB सरल रेखा खण्ड की लम्बाई $=\sqrt{\{5-(-2)\}^2+(3-1)^2}$ इकाई

$=\sqrt{49+4}$ इकाई $=\sqrt{53}$ इकाई

बुलू ने एक और बिन्दु C (2, 4) अंकित किया।

मैंने A, B और C बिन्दुओं को परस्पर मिलाकर एक त्रिभुज पाया।



2 अब Δ ABC क्षेत्र का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेगें ?

AB,BC और CA भुजाओं की लम्बाई मापकर हेरन के सूत्र की सहायता से ΔABC क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

इसके अलावा आधार और ऊँचाई ज्ञात रहें तो त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई की सहायता से क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

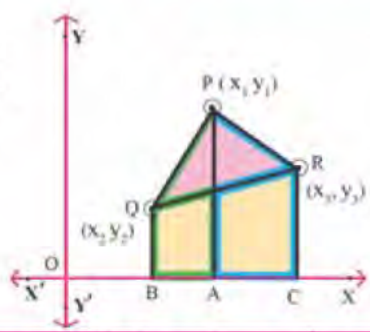
3 तीन बिन्दुओं के स्थानांक ज्ञात रहने पर आसानी से कैसे इन बिन्दुओं को त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु मानकर त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते है – देखते हैं।

माना कि, P (x_1 y_1), Q (x_2 y_2) और R (x_3 , y_3) कोई तीन बिन्दु हैं। P, Q और R से x अक्ष को क्रम से PA, QB और RC तीन लम्ब खींचा जो x अक्ष को क्रम से A,B और C बिन्दुओं पर काटते हैं।

चित्र से पाते हैं

Δ PQR का क्षेत्रफल

= QBAP ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल + PACR ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल – QBCR ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल।



ट्रेपिजियम आकार के क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ समानान्तर भुजाओं की लम्बाई का योग × उनके बीच की लम्बवत् दूरी

$= \frac{1}{2}$ (QB + PA) × BA + $\frac{1}{2}$ (PA + RC) AC – $\frac{1}{2}$ (QB + RC) × BC

$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 + y_1) - x_2(y_2 + y_1) + x_3(y_1 + y_3) - x_1(y_1 + y_3) - x_3(y_2 + y_3) + x_2(y_2 + y_3)\}$

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 + \cancel{y_1} - \cancel{y_1} - y_3) + x_2(\cancel{y_2} + y_3 - \cancel{y_2} - y_1) + x_3(y_1 + \cancel{y_3} - y_2 - \cancel{y_3})\}$

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$

पाया, Δ PQR क्षेत्र का क्षेत्रफल,
$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$............(i)

4 अब (i) न० सूत्र की सहायता से A (5, 3), B (– 2, 1) और C (2, 4) बिन्दुओं द्वारा निर्मित त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Δ ABC क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\{5(1-4) + (-2)(4-3) + 2(3-1)\}$ वर्ग इकाई

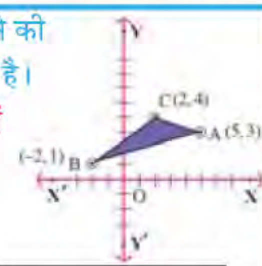
$= \frac{1}{2}(-15 - 2 + 4)$ वर्ग इकाई

$= -\frac{13}{2}$ वर्ग इकाई $= -6\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

यहाँ
$(x_1, y_1) = (5, 3)$,
$(x_2, y_2) = (-2, 1)$
और $(x_3, y_3) = (2, 4)$

चूँकि ΔABC क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करते समय बिन्दुओं को घड़ी की सूई के घूमने की दिशा में (Clock wise) लिया गया है अत: ΔABC का क्षेत्रफल ऋणात्मक मिला है।

अब यदि घड़ी की सूई के घूमने की दिशा के विपरीत दिशा में बिन्दुओं को लिया जाय तो ΔABC क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा – देखें।



ΔABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\{5(4-1) + 2(1-3) + (-2)(3-4)\}$ वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2}\{5 \times 3 + 2 \times (-2) + (-2)(-1)\}$ वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2}(15 - 4 + 2)$ वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2} \times 13$ वर्ग इकाई $= 6\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

यहाँ
$(x_1, y_1) = (5, 3)$,
$(x_2, y_2) = (2, 4)$
और $(x_3, y_3) = (-2, 1)$

पाते हैं कि बिन्दुओं को घड़ी की सूई के घूमने की दिशा के विपरीत दिशा में लिया जाय तो ΔABC क्षेत्र का क्षेत्रफल धनात्मक होता या मिलता है।

इसलिए (i) न० सूत्र को त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ लिखा जाता है। '| |' चिन्ह को मोड्युलस (modulus) या संक्षेप में मोड् (mod) कहा जाता है।

$|x|$ का अर्थ है, $|x| = x$ जहाँ $x \geq 0$
$= -x$ जहाँ $x < 0$

जैसे $|5| = 5$
और $|-5| = -(-5) = 5$

चूँकि क्षेत्रफल का मान ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

∴ ΔABC क्षेत्र का क्षेत्रफल $= 6\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई।

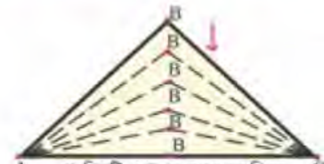
5 P (3,5) , Q (– 4 , 4) और R (5,2) शीर्ष बिन्दु वाले त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Δ PQR क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[3(4-2)+(-4)(2-5)+5\ (5-4)]$ वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2}\ [3 \times 2 + 12 + 5]$ वर्ग इकाई $= 11\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

6 प्रमाणित करते हैं कि (1, 4) , (2, 3) और (0, 5) बिन्दुयें एक रेखीय हैं।

यदि A (1, 4), B (2, 3) और C(0, 5) शीर्ष बिन्दु वाले त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल शून्य हो जाय तो (1, 4), (2, 3) और (0, 5) बिन्दु एक रेखीय बिन्दु होगें।



B বিন্দুটি AC রেখাংশে অবস্থিত হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে

$\therefore \Delta$ ABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\ [1(3-5)+2(5-4)+0(4-3)]$ वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2}[-2+2+0]$ वर्ग इकाई = 0 वर्ग इकाई

$\therefore$ (1, 4), (2, 3) और (0, 5) एक रेखीय बिन्दु हैं।

> **अत: $(x_1\ y_1), (x_2\ y_2)$ और (x_3, y_3) बिन्दयें एक रेखीय बिन्दु हैं जब**
> **$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$ हो।**

7 प्रमाणित करें कि (3a, 0), (0, 3b), और (a, 2b) बिन्दु एक रेखीय बिन्दु हैं। [स्वयं करें]

8 (0, – 4), (–1, y) और (3, 2) तीन बिन्दु एक रेखीय बिन्दु हो तो y का मान कितना होगा देखें।

माना कि A बिन्दु का स्थानांक = (0, – 4), B बिन्दु का स्थानांक = (– 1, y) और C बिन्दु का स्थानांक = (3, 2) है।

चूँकि A, B और C एक रेखीय बिन्दु हैं

$\therefore\quad 0 \times (y-2) + (-1)(2+4) + 3(-4-y) = 0$

या, $\ -6 - 12 - 3y = 0$

या, $\ -3y = 18$

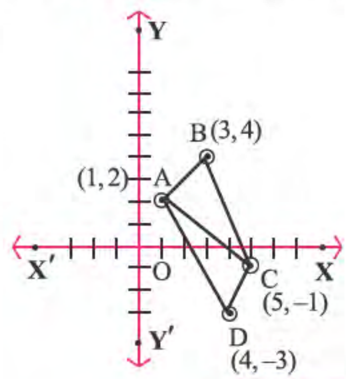
$\therefore\quad y = -6$

$\therefore\quad$ y = – 6 होने पर A , B और C तीनों बिन्दु एक रेखीय बिन्दु होगें।

9 किसी चतुर्भुज के लगातार कोणिय बिन्दुओं के स्थानांक क्रमश: (1, 2), (3, 4), (5, – 1) और (4, – 3); है तो चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

माना कि A बिन्दु का स्थानांक = (1, 2), B बिन्दु का स्थानांक = (3, 4), C बिन्दु का स्थानांक = (5, – 1) और D बिन्दु का स्थानांक = (4, – 3)

AC विकर्ण खींचा।



$\therefore \Delta$ ABC और Δ ACD क्षेत्र का क्षेत्रफल

$\therefore \Delta$ABC क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\ |1(4+1)+3(-1-2)+5(2-4)|$ वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2}\ |5-9-10|$ वर्ग इकाई

$= |-7|$ वर्ग इकाई = 7 वर्ग इकाई।

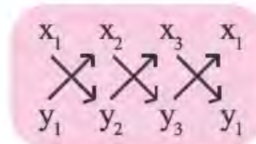
फिर, Δ ACD क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\square$ वर्ग इकाई [स्वयं करें]

$\therefore$ ABCD चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $(7 + 5\frac{1}{2})$ वर्ग इकाई = $12\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

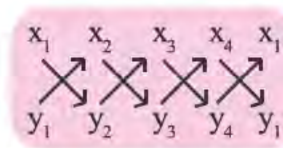
$$= \frac{1}{2} \left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) \right|$$



इसी प्रकार चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

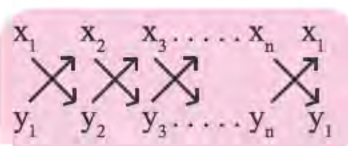
$$= \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1) \right|$$



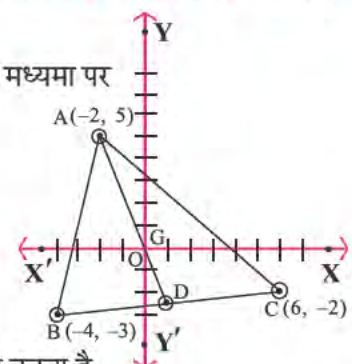
चतुर्भुजाकार क्षेत्र के क्षेत्रफल तक नौंवी कक्षा के पाठ्यक्रम में शामिल है।

n संख्यक भुजा वाले बहुभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \dots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + \dots + y_nx_1) \right|$$



10 ABC त्रिभुज के A, B और C तीन बिन्दुओं का स्थानांक कमश: (– 2, 5), (– 4, –3) और (6, – 2); है। त्रिभुज के गुरुत्व केन्द्र का स्थानांक कैसे पाते हैं देखें।



माना कि BC भुजा का मध्य बिन्दु D; है त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र G, AD मध्यमा पर स्थित है। फिर AG : GD = 2 : 1

माना कि G बिन्दु का स्थानांक (x, y) है।

BC भुजा के मध्य बिन्दु D का स्थानांक = $\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-3-2}{2}\right)$

= $\left(1, \frac{-5}{2}\right)$ है।

G बिन्दु मध्यमा AD को 2 : 1 अनुपात में आन्तरिक रूप से विभाजित करता है,

अत: $x = \frac{2 \times 1 + 1 \times (-2)}{2 + 1}$ या $x = \frac{2-2}{3}$ $\therefore$ $x = 0$

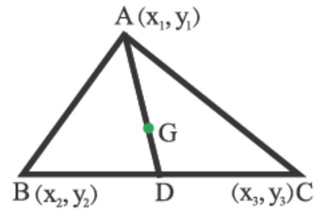
फिर $y = \frac{2 \times (-\frac{5}{2}) + 1 \times 5}{2 + 1}$ या $y = \frac{-5+5}{3}$ $\therefore$ $y = 0$

अत: Δ ABC त्रिभुज के गुरुत्व केन्द्र G का स्थानांक (0, 0) है।

11 ABC त्रिभुज के A, B और C तीनों शीर्ष बिन्दुओं के स्थानांक क्रमशः (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) हो तो त्रिभुज के गुरुत्व केन्द्र का स्थानांक क्या होगा देखें।

माना कि BC भुजा का मध्य बिन्दु D है; G, AD पर स्थित है और AG : GD = 2 : 1

माना कि गुरूत्व केन्द्र G का स्थानांक (x, y) है।



$\therefore$ D बिन्दु का स्थानांक = $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

G बिन्दु मध्यमा AD को 2 : 1 अनुपात में आन्तरिक रूप से विभाजित करता है।

अतः $x = \dfrac{2 \times \frac{(x_2+x_3)}{2} + 1 \times x_1}{2+1}$ $\qquad \therefore x = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$

फिर, $y = \dfrac{2 \times \frac{(y_2+y_3)}{2} + 1 \times y_1}{2+1}$ $\qquad \therefore y = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$

$\therefore$ त्रिभुज के गुरुत्व केन्द्र का स्थानांक $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ .... (ii)

(ii) न० सूत्र की सहायता से (7, – 5), (– 2, 5) और (4, 6) बिन्दुओं द्वारा निर्मित त्रिभुज के गुरुत्व केन्द्र का स्थानांक निर्णय करें। [स्वयं करें]

हल करें — 20

1. निम्न शीर्ष बिन्दुओं से निर्मित त्रिभुजाकार प्रत्येक क्षेत्र का क्षेत्रफल निर्णय करें।
   (i) (2, – 2) , (4, 2) और (– 1, 3)
   (ii) (8, 9) (2, 6) और (9, 2)
   (iii) (1, 2), (3, 0) और मूल बिन्दु
2. प्रमाणित करें कि (3, – 2), (– 5, 4) और (– 1, 1) बिन्दु एक रेखीय बिन्दु हैं।
3. K के किस मान के लिये (1, – 1) ,(2, – 1) और (K, – 1) तीनों बिन्दु एक ही सरल रेखा में होगें ?
4. प्रमाणित करें कि (1, 2) और (–2, – 4) बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा मूल बिन्दु गामी है।
5. प्रमाणित करें कि (2, 1) और (6, 5) बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा का मध्य बिन्दु (– 4, – 5) और (9, 8) बिन्दुओं को मिलाने से बनी रेखा-खण्ड पर स्थित है।
6. निम्न प्रत्येक दिये गये चार बिन्दुओं से निर्मित चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल निर्णय करें।
   (i) (1, 1), (3, 4), (5, –2), (4, –7) (ii) (1, 4), (– 2, 1), (2, – 3), (3, 3)
7. A, B, C तीन बिन्दुओं के स्थानांक क्रमशः (3, 4) (– 4, 3) और (8, – 6); ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें और A बिन्दु से BC पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई ज्ञात करें।

8. ABC त्रिभुज के A बिन्दु का स्थानांक (2, 5) और त्रिभुज के गुरुत्व केन्द्र का स्थानांक (–2, 1) हो तो BC के मध्य बिन्दु का स्थानांक निर्णय करें।

9. किसी त्रिभुज के तीनों शीर्ष बिन्दुओं के स्थानांक (4, – 3), (– 5, 2) और (x, y); है। यदि त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र मूल बिन्दु हो तो x और y के मान ज्ञात करें।

10. A (–1, 5), B (3, 1) और C (5, 7) त्रिभुज ΔABC = के शीर्ष बिन्दु हैं। D, E, और F क्रमश: BC, CA और AB भुजाओं के मध्य बिन्दु हैं, DEF त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें और दिखाए कि $\Delta ABC = 4\Delta DEF$

11. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.) :

(i) (0,4), (0, 0) और (–6, 0) बिन्दुओं द्वारा निर्मित त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल है।
(a) 24 वर्ग इकाई (b) 12 वर्ग इकाई (c) 6 वर्ग इकाई (d) 8 वर्ग इकाई

(ii) (7, – 5), (– 2, 5) और (4, 6) बिन्दुओं द्वारा निर्मित त्रिभुज के गुरुत्व क्षेत्र का स्थानांक है।
(a) (3, – 2) (b) (2, 3) (c) (3, 2) (d) (2, – 3)

(iii) ABC समकोणिक त्रिभुज में $\angle ABC = 90°$; A और C बिन्दुओं के स्थानांक क्रमश: (0, 4) और (3, 0) हो तो ABC त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल है
(a) 12 वर्ग इकाई (b) 6 वर्ग इकाई (c) 24 वर्ग इकाई (d) 8 वर्ग इकाई

(iv) (0, 0), (4, – 3) और (x, y) बिन्दु एक रेखीय बिन्दु हो तो
(a) x = 8, y = –6 (b) x = 8, y = 6 (c) x = 4, y = – 6 (d) x = –8, y = – 6

(v) ABC त्रिभुज के A शीर्ष बिन्दु का स्थानांक (7, –4) है और त्रिभुज के गुरुत्व केन्द्र के स्थानांक (1, 2) हो तो BC भुजा के मध्य बिन्दु का स्थानांक है
(a) (–2, –5) (b) (– 2, 5) (c) (2, – 5) (d) (5, –2)

12. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न:

(i) ABC त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के स्थानांक (0, 1) (1, 1) और (1, 0) है। त्रिभुज के गुरुत्व केन्द्र का स्थानांक बताएं।

(ii) किसी त्रिभुज के गुरुत्व केन्द्र का स्थानांक (6, 9) है और दो शीर्ष बिन्दुओं का स्थानांक (15, 0) और (0, 10); है तो तीसरे शीर्ष बिन्दु का स्थानांक ज्ञात करें।

(iii) (a, 0), (o, b) और (1, 1) बिन्दु एक रेखीय हो तो दिखाएं कि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

(iv) (1, 4), (–1, 2) और (– 4, 1) बिन्दुओं द्वारा निर्मित त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

(v) (x – y, y – z), (– x, –y) और (y, z) द्वारा निर्मित त्रिभुज के गुरुत्व केन्द्र का स्थानांक लिखें।

21 लॉगरिथ्म
(LOGARITHM)

मेरे मित्र तथागत ने एक काले रंग के चार्ट पेपर पर अनेक संख्याएं लिखकर कक्षा-घर की दीवार पर लटका दिया है। हमलोग चार्ट पर लिखी संख्याओं को प्रयोग करके एक मजेदार खेल खेलेंगे। मेरे मित्र बुलू ने श्यामपट्ट (ब्लैक बोर्ड) पर एक संख्या 2 लिखा। हम तथागत द्वारा लिखी संख्या चार्ट पेपर की संख्याओ में से कोई एक संख्या बोर्ड पर लिखेंगे और जानने का प्रयास करेंगे कि वह संख्या 2 के किस घात का मान है।

नजरिन ने 2 के बगल में चार्ट पेपर से संख्या 8 बोर्ड पर लिखा।

अब 2 के किस घात का मान 8 होगा, देखें।

$2^3=8$

फिर नजरिन ने 2 के पास चार्ट पेपर से दूसरी संख्या 64 देखकर बोर्ड पर लिखा।

2 के किस घात का मान 64 होगा, योजना करें।

माना कि $2^x = 64 = 2^6$

$\Rightarrow x = 6$

समझा कि 2 के 6 वे बात का मान 64 है।

इस बार नजरिन ने 2 के बगल में चार्ट पेपर पर देखकर 7 संख्या को लिखा।

देखें 2 के किस बात का मान 7 होता है।

माना कि $2^x=7$ ....(i)

चार प्राथमिक प्रक्रियाओ योग, वियोग, गुणा और घात वृद्धि [(Involution) जैसे 5^2, $3^{4/3}$] मूल निर्णय (Evolution) [जैसे $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$ आदि] इन 6 मौलिक प्रक्रियाओं द्वारा x का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता।

किन्तु (i) न० समीकरण का समाधान कैसे पायेंगे ?

लॉगरिथ्म की सहायता से (i) न० समीकरण का समाधान किया जा सकता है। **लॉगरिथ्म को कभी-कभी सातवीं मौलिक प्रक्रिया कहा जाता है।**

देखते है कि $2^2 = 4$ और $2^3 = 8$

अत: समझ पाते है, $2^x = 7$ हो तो x ऐसी वास्तविक संख्या होगी तो $2 < x < 3$ होगी और उसी वास्तविक संख्या को हम $\log_2 7$ कहते है।

∴ $2^x = 7$ समीकरण को हल करके पाते है $x = \log_2 7$

परिभाषा : यदि a और M दो वास्तविक संख्यायें हो और $a > 0, a \neq 1$ और $M > 0$ हो तो एक वास्तविक संख्या x को आधार a के घात के रूप में सापेक्ष M को लॉगरिथ्म कहा जाता है यदि $a^x = M$ हो और इसे लिखते हैं $x = \log_a M$; $M \neq 1$ के लिए $\log_a M = \log_b M$ होगा यदि और केवल यदि $a = b$ हो अर्थात् $M \neq 1$ के लिए $\log_a M$ एक अनन्य वास्तविक (Unique) संख्या है।

जैसे $\log_2 1 = \log_3 1 = 0$ क्योंकि $2^0 = 1$ और $3^0 = 1$ किन्तु $\log_2 5 \neq \log_3 5$

फिर $\log_2 8 = 3$ क्योंकि $2^3 = 8$

$\log_2 64 = 6$ क्योंकि $2^6 = 64$

1 नजरिन इस बार 2 के निकट श्यामपट पर 0.25 लिखती है। लॉगरिथ्म का सिद्धान्त प्रयोग करके 2 के कौन से घात का मान 0.25 होगा, देखें।

$2^x = 0.25$

या, $2^x = \frac{25}{100}$ 4

$\therefore \quad 2^x = 2^{-2}$

अत: $\log_2 0.25 = -2 \qquad [\because 2^{-2} = 0.25]$

2 अब $\log_{\sqrt{3}} 81$ का मान ज्ञात करें।

माना कि $x = \log_{\sqrt{3}} 81$

$\therefore$ परिभाषा से पाते है $(\sqrt{3})^x = 81 = 3^4$

या $3^{\frac{x}{2}} = 3^4 \Rightarrow \frac{x}{2} = 4$

$\therefore x = 8$

3 अब $\log_{\sqrt[3]{}} 343$ का मान गणना कर ज्ञात करें [स्वयं करें]

यदि $M > 0$ और $a > 0$ और $a \neq 1$ हो तब लॉगरिथ्म की परिभाषा क्या ऐसी पायी जाएगी ?

(i) नजरिन ने $M < 0$ और परिभाषानुसार a लेकर $\log_a M$ का मान पाने की चेष्टा की।

यदि $\log_2 (-5) = x$ हो, तो $2^x = -5$ होना होगा।

किन्तु हमेशा ही $2^x > 0$। अत: $M < 0$ होने की दशा में $\log_a M$ अपरिभाषित है।

(ii) नजरिन की सहेली ने $M = 0$ और a को परिभाषानुसार लेकर $\log_a M$ का मान पाने की चेष्टा की।

यदि $\log_2 0 = x$ हो तो $2^x = 0$ होगा।

किन्तु हमेशा ही $2^x > 0$ होता है, अत: M=0 होने पर $\log_a M$ अपरिभाषित है।

(iii) सहेली के मित्र रजत ने $a < 0$ और M को परिभाषानुसार लेकर $\log_a M$ का मान पाने की चेष्टा की।

(a) यदि $\log_{-2} 16 = x$ हो, तो $(-2)^x = 16$ अत: $x = 4$

फिर यदि $\log_2 16 = y$ हो, तो $2^y = 16$ अर्थात् $y = 4$

$\therefore \log_{-2} 16 = \log_2 16$; किन्तु $\log_a M = \log_b M$ हो तो $a = b$ होता है जब $M \neq 1$ किन्तु $-2 \neq 2$

अत: $a < 0$ और परिभाषानुसार M का मान लेकर $\log_a M$ का मान अनन्य (Unique) नहीं है।

$\therefore a < 0$ हो तो $\log_a M$ अनन्यता की कमी के कारण अपरिभाषित है।

(b) फिर रजन ने $a = 0$ और परिभाषानुसार M लेकर $\log_a M$ का मान पाने की चेष्टा की

$\log_0 16 = x$ $\quad \therefore 0^x = 16$; किन्तु $0^x = 0 \ (x > 0)$

अत: $\log_a M$ अपरिभाषित है जब $a = 0$ हो

(c) इस बार रजत ने $a = 1$ और M को परिभाषानुसार लेकर $\log_a M$ का मान पाने की चेष्टा की

$\log_1 16 = x$ $\quad \therefore 1^x = 16$; किन्तु वास्तविक संख्या x के लिए 1^x का मान 1 होता है।

अत: $\log_a M$ अपरिभाषित है जब $a = 1$

(iv) रजत के साथी सिराज ने $a < 0$ और $M < 0$ लेकर लॉगरिथ्म का मान पाने की चेष्टा की

4 $\log_{-2}(-16)$ का मान पाया जा सकता है कि नहीं, देखें।

स्वयं करें : 20.1

(1) $\log_2(-7)$ (2) $\log_5 0$ (3) $\log_{-3} 2$ (4) $\log_0 2$ (5) $\log_1 7$ के मान पायें जा सकते है कि नहीं, देखें।

जोसेफ ने श्यामपट पर दो संख्याएं 8 और 32 लिखा

5 2 के घात के सापेक्ष 8 और 32 के लॉगरिथ्म लिखें।

$\log_2 8 = 3 \quad [\because 2^3 = 8]$

$\log_2 32 = 5 \quad [\because 2^5 = 32]$

6 2 के घात के सापेक्ष 8×32 और $\frac{32}{8}$ के लॉगरिथ्म लिखें।

$\log_2(8\times32) = \log_2 256 = 8 = 3+5 = \log_2 8 + \log_2 32 \qquad [\because 2^8 = 256]$

फिर $\log_2 \frac{32}{8} = \log_2 4 = 2 = 5 - 3 = \log_2 32 - \log_2 8$

7 M और N कोई दो वास्तविक संख्याएं है, $M > 0$ और $N > 0$ और कोई एक वास्तविक संख्या $a > 0, a \neq 1$ हो तो, $\log_a M, \log_a N$ की सहायता से $\log_a(MN)$ और $\log_a \frac{M}{N}$ का मान क्या मिलता है, देखें।

माना कि $\log_a M = p, \log_a N = q$

$\therefore a^p = M$ और $a^q = N$

$\therefore MN = a^p \times a^q = a^{p+q}$

$\therefore \log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$

$\therefore$ पाते है, $\mathbf{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$ .... **(I)**

और $\frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$\therefore \log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$

पाते है, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ———— **(II)**

8 2 के घात के सापेक्ष 8^5 का लॉगरिथ्म ज्ञात करें और क्या पाते है, देखें।

$$\log_2 8 = 3 \quad [\because 2^3 = 8]$$

फिर, $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$

$$\therefore \log_2 8^5 = 15 = 5 \times 3 = 5 \times \log_2 8$$

9 M, a, c कोई तीन वास्तविक संख्यायें हैं नहीं $M > 0, a > 0, a \neq 1, \log_a M^c$ का मान ज्ञात करें।

मानाकि $\log_a M = p \quad \therefore a^p = M$

$$\therefore \quad M^c = (a^p)^c = a^{pc}$$

$M^C > 0$, क्योंकि $M > 0$

$$\therefore \log_a M^c = pc = c.p = c \log_a M$$

$\therefore$ पाते हैं, $\mathbf{\log_a M^c = c \log_a M}$ ———————— **(III)**

10 यदि लॉगरिथ्म का घात परिवर्तित करना चाहे अर्थात् $\log_a M$ को $\log_b M$ (जहाँ b कोई वास्तविक संख्या हो और $b \neq 1, b > 0$ हो) की सहायता से प्रकट करना चाहें तो कैसे प्रकट करेंगे, देखें।

माना कि; M, a,b तीन वास्तविक संख्यायें है जहाँ $M > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ है।

माना कि $\log_b M = r \quad \therefore b^r = M$

और $\log_a b = d; \quad \therefore a^d = b$

$\therefore M = b^r = (a^d)^r = a^{rd}$

$\therefore \log_a M = rd = \log_b M \times \log_a b$

$\therefore$ पाते है $\mathbf{\log_a M = \log_b M \times \log_a b}$ ———————— **(IV)**

I से IV लॉगरिथ्म के सूत्र पाया और IV न० सूत्र को घात परिवर्तन सूत्र कहा जाता है। $\log_y x$ की तरह किसी संख्या के लिए मान लिया जायेगा कि x और y दो वास्तविक संख्या है $x > 0, y > 0, y \neq 1$ है।

4 सूत्रों के अलावा लॉगरिथ्म की परिभाषा और सूत्रों से क्या-क्या तथ्य लिखे जा सकते है, देखें।

(i) $\log_a 1 = 0 \qquad [\because a^0 = 1]$

(ii) $\log_a a = 1 \qquad [\because a^1 = a]$

(iii) $a^{\log_a M} = M \qquad$ [माना $\log_a M = u \therefore a^u = M \Rightarrow a^{\log_a M} = M$]

(iv) $\log_a b \times \log_b a = \log_a a = 1 \qquad$ [सूत्र संख्या IV से]

(v) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

(vi) $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b} \qquad [\because \log_a M = \log_b M \times \log_a b]$

(vii) $\log_a (M_1 M_2 M_3 ...... M_n) = \log_a M_1 + \log_a M_2 + \log_a M_3 + ... + \log_a M_n$ [जहाँ n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है]

(viii) $\log_a \dfrac{1}{a} = -1 \qquad [\because \log_a \dfrac{1}{a} = \log_a 1 - \log_a a = 0 - 1 = -1]$

(ix) $\dfrac{\log_a M}{\log_a N} = \dfrac{\log_b M}{\log_b N} \qquad$ [सूत्र संख्या IV से]

(x) यदि $\log_a M = \log_a N$ हो तो $M = N$

[$\log_a M = \log_a N$ हो तो $a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \Rightarrow M = N$, (iii) न० सूत्र से]

11 $\log_3 \{\log_2(\log_{\sqrt{3}}81)\}$ का मान निर्णय करें।

$\log_3 \{\log_2(\log_{\sqrt{3}}81)\}$

$= \log_3 \{\log_2 (\log_{\sqrt{3}}3^4)\}$

$= \log_3 [\log_2 (\log_{\sqrt{3}} \{(\sqrt{3})^2\}^4)]$

$= \log_3 \{\log_2 (\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^8)\}$

$= \log_3 \{\log_2 8 (\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3})\}$ $[\because \log_a M^C = c \log_a M]$

$= \log_3 \{\log_2 8\}$ $[\because \log_a a = 1]$

$= \log_3 \{\log_2 2^3\} = \log_3 \{3\log_2 2\} = \log_3 3 = 1$

12 $\log_2 10 - \log_5 125 \times \log_8 5 = 1$ प्रमाणित करें।

बाँया$= \log_2 10 - \log_5 125 \times \log_8 5$

$= \log_2(5\times2) - \log_5 125 \times \log_8 5$

$= \log_2 5 + \log_2 2 - \log_5 5^3 \times \frac{1}{\log_5 8}$ $[\because \log_a MN = \log_a M + \log_a N$ और $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}]$

$= \log_2 5 + 1 - 3\log_5 5 \times \frac{1}{\log_5 2^3}$ $[\because \log_a a = 1$ और $\log_a M^c = c \log_a M]$

$= \log_2 5 + 1 - 3 \times \frac{1}{3\log_5 2} = \log_2 5 + 1 - \log_2 5 = 1 =$ दाँया पक्ष [प्रमाणित]

13 $(7\log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80})$ का सरलतम मान ज्ञात करें।

(घात का उल्लेख न रहने पर इस पाठ में सभी प्रश्नों के लिए $\log M$ की जगह $\log_{10} M$ समझा जायेगा)

$7 \log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80}$

$= 7(\log 10 - \log 9) - 2 (\log 25 - \log 24) + 3 (\log 81 - \log 80)$

$= 7 \{\log (2 \times 5) - \log 3^2\} - 2 \{(\log 5^2 - \log (2^3 \times 3)\} + 3 \{\log 3^4 - \log (5 \times 2^4)\}$

$= 7 \{\log 2 + \log 5 - 2 \log 3\} - 2\{2 \log 5 - 3 \log 2 - \log 3\} + 3 \{4 \log 3 - \log 5 - 4 \log 2\}$

$= 7 \log 2 + 7 \log 5 - 14 \log 3 - 4 \log 5 + 6 \log 2 + 2 \log 3 + 12 \log 3 - 3 \log 5 - 12 \log 2$

$= \log 2$

14 $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$ प्रमाणित करें। (स्वयं करें)

15 $\frac{1}{2}$ का लॉगरिथ्म $\frac{1}{2}$ हो तो आधार ज्ञात करें।

माना कि आधार $= x$ है

$\therefore \log_x \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \quad x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

या, $(x^{-\frac{1}{2}})^2 = (\frac{1}{2})^2$ (दोनों पक्षों का वर्गीकरण करने पर)

या, $x^{-1} = \frac{1}{4}$ या, $\frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$ $\therefore$ अभीष्ट आधार $= 4$

16 0.04 का लॉगरिथ्म – 2 हो, तो आधार क्या होगा, ज्ञात करें। (स्वयं करें)

17 यदि $a^2 + b^2 = 7ab$ हो तो दिखाएं कि $\log \frac{1}{3}(a + b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

दिया गया है, $a^2 + b^2 = 7ab$

या, $a^2 + b^2 + 2ab = 9ab$

या, $(a + b)^2 = 9ab$

या, $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = (ab)$

या, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log (ab)$ [दोनों पक्षों का log करने पर]

या, $2 \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \log (ab)$

$\therefore \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ [प्रमाणित]

18 यदि $a^2 - 11ab + b^2 = 0$ हो तो दिखाएं कि $\log \frac{1}{3}(a - b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ [स्वयं करें]

फिरोज ने बोर्ड पर अनेक लॉगरिथ्म लिखा जिनके आधार पर 10 हैं।

फिरोज ने लिखा (i) $\log_{10}10$, (ii) $\log_{10}100$, (iii) $\log_{10}1000$, (iv) $\log_{10}125$

19 फिरोज द्वारा लिखे लॉगरिथ्म का मान निर्णय करें।

(i) $\log_{10}10 = 1$ (ii) $\log_{10}100 = \log_{10}10^2 = 2\log_{10}10 = 2$

(iii) $\log_{10}1000 = \square$ [स्वयं करें]

(iv) $\log_{10}125$

$= \log_{10}5^3$

$= 3\log_{10}5$

$= 3\log_{10}\frac{10}{2}$

$= 3(\log_{10}10 - \log_{10}2)$

$= 3(1 - \log_{10}2)$

जिन logarithms लॉगरिथ्म का आधार 10 होता है, उन्हें कहा जाता है?

आधार 10 के सापेक्ष किसी वास्तविक संख्या $M(>0)$ के लॉगरिथ्म को उस संख्या का साधारण लॉगरिथ्म (Common Logarithm) कहा जाता है।

साधारण लॉगरिथ्म की अवधारणा पहले पहल हेनरी ब्रिग्स (Henry Briggs) ने आरम्भ किया उनके नाम के अनुसार कभी-कभी लॉगरिथ्म को ब्रिगारीय पद्धति (Briggarian system of Logarithm) कहा जाता है।

साधारण लॉगरिथ्म के अलावा हम अन्य कौन सा लॉगरिथ्म व्यवहार में लाते है?

साधारण लॉगरिथ्म के अलावा हमलोग प्राकृतिक लागरिथ्म (Natural Logarithm) व्यवहार करते है।

किसी वास्तविक संख्या M(>0) के जिस लॉगरिथ्म का आधार e (जहाँ e = 2.71828 प्राय: अर्थात् 2 और 3 के मध्य एक स्थिरांक अपरिमेय संख्या (Transcendental Irrational Number)] हो, उस लॉगरिथ्म M को **स्वाभाविक लॉगरिथ्म** कहा जाता है।

प्राकृतिक लॉगरिथ्म की अवधारणा सर्वप्रथम अंग्रेजी गणितज्ञ नेपियर द्वारा लिखी पुस्तक में मिलती है। प्राकृतिक लॉगरिथ्म को प्राय: लॉगरिथ्म की नेपियर पद्धति भी कहा जाता है।

20 $\log_{10}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)=\log_{10}4$ हो तो a और b के बीच सम्बंध लिखें।

$\log_{10}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)=\log_{10}4$

या, $\log_{10}\left(\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}\right)=\log_{10}2^2$

या, $\frac{(a+b)^2}{ab}=4$

या, $(a+b)^2=4ab$

या, $(a+b)^2-4ab=0$

या, $(a-b)^2=0$

या, $a-b=0$ $\therefore a=b$ यही a और b का सम्बंध है।

21 दिखाएं कि $\log_{10}3$ का मान $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच है।

माना कि $\log_{10}3=x$

$\therefore 10^x=3$

$\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के हरों का ल०स०प० ☐

$10^x=3$

$\therefore (10^x)^6=3^6=729$

$\therefore 10^{6x}=729$

चूँकि $100<729<1000$

या, $10^2<10^{6x}<10^3$

या, $2<6x<3$

या, $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$

अत: $\frac{1}{3}<\log_{10}3<\frac{1}{2}$

22 यदि $x = \log_{2a} a$, $y = \log_{3a} 2a$ और $z = \log_{4a} 3a$ हो तो प्रमाणित करें कि $x\,y\,z + 1 = 2yz$

$x = \log_{2a} a$, $y = \log_{3a} 2a$ और $z = \log_{4a} 3a$

बाँया पक्ष $= xyz+1 = \log_{2a} a \times \log_{3a} 2a \times \log_{4a} 3a + 1$

$= \log_{3a} a \times \log_{4a} 3a + 1$

$= \log_{4a} a + 1 = \log_{4a} a + \log_{4a} 4a$

$= \log_{4a} 4a^2$

$= \log_{4a} (2a)^2$

$= 2\log_{4a} 2a$

$= 2\log_{3a} 2a \times \log_{4a} 3a$

$= 2yz =$ दाँया पक्ष $\therefore$ पाते है $xyz + 1 = 2yz$ (प्रमाणित)

23 $x = \log_a bc$, $y = \log_b ca$ और $z = \log_c ab$ हो तो दिखाये कि $x + y + z = xyz - 2$ [स्वयं करें]

24 $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y}$ हो तो दिखाये कि $x^x . y^y . z^z = 1$

माना कि $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y} = k$ [जहाँ $k \neq 0$]

$\therefore$ $\log x = k(y - z)$, फिर $\log y = k(z - x)$ तथा $\log z = k(x - y)$

या, $x \log x = xk(y - z)$, या, $y \log y = yk(z - x)$ या, $z \log z = zk(x - y)$

या, $\log x^x = k(xy - zx)$,...(i) या, $\log y^y = k(yz - xy)$...(ii) या, $\log z^z = k(zx - yz)$ ...(iii)

(i) + (ii) + (iii) से पाते हैं $\log x^x + \log y^y + \log z^z = k[xy - zx + yz - xy + zx - yz] = 0$

या, $\log x^x y^y z^z = \log 1$ [$\because \log 1 = 0$]

$\therefore$ $x^x . y^y . z^z = 1$ (प्रमाणित)

25 यदि $\dfrac{\log x}{b-c} = \dfrac{\log y}{c-a} = \dfrac{\log z}{a-b}$ हो तो दिखाये कि $x^a . y^b . z^c = 1$

माना कि $\dfrac{\log x}{b-c} = \dfrac{\log y}{c-a} = \dfrac{\log z}{a-b} = k\ (k \neq 0)$

$\therefore \log x = k(b - c)$, $\log y = k(c - a)$, $\log z = k(a - b)$

अब $\log(x^a . y^b . z^c) = \log x^a + \log y^b + \log z^c$

$= a \log x + b \log y + c \log z$

$= a k(b - c) + b k(c - a) + c k(a - b)$

$= k(ab - ca + bc - ab + ca - bc)$

$= k \times 0 = 0 = \log 1$

अत: $x^a . y^b . z^c = 1$ (प्रमाणित)

26 यदि $a^{2-x}.\ b^{5x} = a^{x+3}.\ b^{3x}$ हो तो दिखाये कि $x \log \frac{b}{a} = \log \sqrt{a}$

$a^{2-x}.\ b^{5x} = a^{x+3}.\ b^{3x}$

या, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{x+3}}{a^{2-x}}$

या, $b^{5x-3x} = a^{x+3-2+x}$

या, $b^{2x} = a^{2x+1}$

या, $b^{2x} = a^{2x}.a$

या, $(\frac{b}{a})^{2x} = a$

अतः $\log (\frac{b}{a})^{2x} = \log a$ [दोनों पक्षों का log करने पर]

या, $2x \log (\frac{b}{a}) = \log a$

या, $x \log (\frac{b}{a}) = \frac{1}{2} \log a$

या, $x \log (\frac{b}{a}) = \log a^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ x \log (\frac{b}{a}) = \log\sqrt{a}$ (प्रमाणित)

27 हल करें : (i) $\log_{10}x - \log_{10}\sqrt{x} = \frac{2}{\log_{10}x}$ (ii) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 1$

(i) $\log_{10}x - \log_{10}\sqrt{x} = \frac{2}{\log_{10}x}$

या, $\log_{10}x - \log_{10}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\log_{10}x}$

या, $\log_{10}x - \frac{1}{2}\log_{10}x = \frac{2}{\log_{10}x}$

या, $\frac{1}{2}\log_{10}x = \frac{2}{\log_{10}x}$

या, $(\log_{10}x)^2 = 4$

या, $\log_{10}x = \pm 2$

$\log_{10}x = 2$ हो तो $x = 10^2$ $\therefore\ x = 100$

फिर $\log_{10}x = -2$ हो तो $x = 10^{-2}$ $\therefore\ x = \frac{1}{100}$

अभीष्ट हल $x = \frac{1}{100}$ या 100

(ii) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 1$

या, $\log_2\log_2 x = 2^1$ या, $\log_2\log_2 x = 2$ या, $\log_2 x = 2^2$ या $\log_2 x = 4$

या, $x = 2^4$ $\therefore\ x = 16$ अभीष्ट हल : $x = 16$

हल करें 21

1. मान ज्ञात करें :-

(i) $\log_{2\sqrt{3}} 1728$ (ii) $\log_{0.01} 0.000001$ (iii) $\log_{\sqrt{6}} 216$ (iv) $\log_4 (\frac{1}{64})$

2. (a) 625 का लॉगरिथ्म 4 हो तो आधार क्या होगा, ज्ञात करें।

(b) 5832- का लॉगरिथ्म 6 हो तो आधार क्या होगा ज्ञात करें।

3. (a) $1 + \log_{10}a = 2 \log_{10}b$ हो तो a को b के रूप में व्यक्त करें।

(b) $3 + \log_{10}x = 2 \log_{10}y$ हो तो x को y के रूप में व्यक्त करें।

4. मान ज्ञात करें :

(a) $\log_2 [\log_2 \{\log_3 (\log_3 27^3)\}]$

(b) $\dfrac{\log\sqrt{27} + \log 8 - \log\sqrt{1000}}{\log 1.2}$

(c) $\log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \log_6 7 \times \log_7 3$

(d) $\log_{10} \dfrac{384}{5} + \log_{10}\dfrac{81}{32} + 3\log_{10} \dfrac{5}{3} + \log_{10}\dfrac{1}{9}$

5. प्रमाणित करें :

(i) $\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243} = \log 2$

(ii) $\log_{10}15 (1+\log_{15}30) + \frac{1}{2}\log_{10}16(1+\log_4 7) - \log_{10}6(\log_6 3+1+\log_6 7)=2$

(iii) $\log_2\log_2\log_4 256+2\log_{\sqrt{2}} 2=5$

(iv) $\log_{x^2} x \times\log_{y^2} y\times\log_{z^2} z=\frac{1}{8}$

(v) $\log_{b^3} a\times\log_{c^3} b\times\log_{a^3} c=\frac{1}{27}$

(vi) $\dfrac{1}{\log_{xy}(xyz)} + \dfrac{1}{\log_{yz}(xyz)} + \dfrac{1}{\log_{zx}(xyz)} = 2$

(vii) $\log \dfrac{a^2}{bc} + \log \dfrac{b^2}{ca} + \log\dfrac{c^2}{ab} = 0$

(viii) $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$

6. (i) यदि $\log \dfrac{x+y}{5} = \dfrac{1}{2} (\log x + \log y)$ हो तो दिखाये कि $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 23$

(ii) यदि $a^4 + b^4 = 14a^2b^2$ हो तो दिखाये $\log (a^2 + b^2) = \log a + \log b + 2\log 2$

7. यदि $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ हो तो दिखाये कि $xyz = 1$

8. यदि $\frac{\log x}{b-c} = \frac{\log y}{c-a} = \frac{\log z}{a-b}$ हो तो प्रमाणित करें कि

(a) $x^{b+c} . y^{c+a} . z^{a+b} = 1$ (b) $x^{b^2+bc+c^2} . y^{c^2+ca+a^2} . z^{a^2+ab+b^2} = 1$

9. यदि $a^{3-x} . b^{5x} = a^{5+x} . b^{3x}$ हो तो दिखाये कि $x \log (\frac{b}{a}) = \log a$

10. हल करें :

(a) $\log_8 [\log_2 \{\log_3 (4^x + 17)\}] = \frac{1}{3}$ (b) $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$

11. दिखाये $\log_{10} 2$ का मान $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच स्थित है।

12. बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.)

(i) यदि $\log_{\sqrt{x}} 0.25 = 4$ हो तो x का मान है

(a) 0.5 (b) 0.25 (c) 4 (d) 16

(ii) $\log_{10}(7x - 5) = 2$ हो तो x का मान है

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 18

(iii) $\log_2 3 = a$ हो तो $\log_8 27$ का मान है

(a) 3a (b) $\frac{1}{a}$ (c) 2a (d) a

(iv) $\log_{\sqrt{2}} x = a$ हो तो $\log_{2\sqrt{2}} x$ है

(a) $\frac{a}{3}$ (b) a (c) 2a (d) 3a

(v) $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ हो तो x- का मान है

(a) 27 (b) 9 (c) 3 (d) $\frac{1}{27}$

13. संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न :

(i) $\log_4 \log_4 \log_4 256$ का मान ज्ञात कर लिखें।

(ii) $\log \frac{a^n}{b^n} + \log \frac{b^n}{c^n} + \log \frac{c^n}{a^n}$ का मान ज्ञात कर लिखें।

(iii) दिखायें कि $a^{\log_a x} = x$

(iv) $\log_e 2 . \log_x 25 = \log_{10} 16 . \log_e 10$ हो तो x का मान ज्ञात करें।

22 समुच्चय सिद्धान्त
(SET THEORY)

जाने अनजाने समुच्चय के बारे में सभी कुछ न कुछ जानते हैं। छात्रों का दल या छात्राओं का समूह, मधुमक्खियों का झुण्ड, एक हड़िया मिठाई, पुस्तकालय में पुस्तक समूह, अखण्ड संख्याओं का समूह, मूल बिन्दुगामी सरल रेखाओं का समूह आदि शब्द-समूह अक्सर सुनते रहते हैं। पहले पाँच उदाहरणों में समूह बने हैं किन्तु ये समुच्चय नहीं बनाते। अन्त के दो समूह सेट बनाते हैं।

इन सभी कथनों में एक समूह को एक नये उपादान के रूप में सोचने की मौलिक धारणा अन्तर्निहित है। हम प्रत्येक क्षेत्र में ससीम (finite) (जैसे नौवीं कक्षा की छात्रायें) अथवा असीम (जैसे अखण्ड संखाओं का समूह) संख्या वाले मूर्त्त (concrete) (जैसे नौंवीं कक्षा की छात्रायें) या अमूर्त्त (abstact) (जैसे अखण्ड संख्याओं का समूह) उपादानों के संकलन (collection) की विवेचना या चर्चा करते हैं।

सेट का सिद्धान्त गणित-शास्त्र का एक मौलिक आधार है। गणित-शास्त्र में किसी भी विषय के बारे में जैसे कैलकुलस (calculus), बीजगणित, मूल कम्प्यूटर विद्या आदि को सेट के सिद्धान्त के बिना चर्चा अधूरी रहती है या संभव नहीं होती। अंग्रेज गणितज्ञ जॉर्ज बूल [George Boole (1815-1864)] ने सर्वप्रथम इस पर प्रकाश डाला था। बाद में जर्मन गणितज्ञ जॉर्ज एल० पी० कैण्टर [George L. P. Cantor (1845-1918)] ने इस विषय को काफी आगे बढ़ाया। अत: उन्हें ही सेट-थियरी का जनक कहा जाता है।

सेट की अवधारणा :

एक सुपरिभाषित भिन्न-भिन्न वस्तुओं के समूह को व्यक्त करने के लिए सेट शब्द का व्यवहार किया जाता है। अत: किसी वस्तु वर्ग के समूह या समष्टि (Aggregate) को समुच्चय कहा जाता है। यदि

(i) समूह सुपरिभाषित (Well-defined) हो और

(ii) समूह में प्रत्येक वस्तु एक दूसरे से भिन्न (distinct) हो।

सुपरिभाषित कहने का अर्थ क्या है :

नौवीं कक्षा के छात्र-छात्राएं जिनकी आयु 14 वर्ष से 14 वर्ष 3 माह हैं ये सेट बनाना संभव है। क्योंकि ये सुपरिभाषित हैं।

किन्तु नौवीं कक्षा के बुद्धिमान छात्र-छात्राओं का सेट बनाना संभव नहीं है। क्योंकि बुद्धिमान शब्द सुपरिभाषित नहीं है। सप्ताह के सात दिनों का सेट बनता है किन्तु तीन दिनों का नहीं।

प्रतीकों का व्यवहार :

साधारणत: अंग्रेजी के बड़े अक्षरों (Capital Letters) A, B, C, ... X, Y, Z आदि द्वारा सेट और छोटे अक्षरों (Small Letters) a, b, c, ... x, y, z द्वारा सेट के उपादान या सदस्य (elements) को प्रकट किया जाता है।

a यदि किसी सेट A का सदस्य हो तो इस कथन को $a \in A$ (a belongs to A) चिन्ह द्वारा प्रकट करते हैं। फिर यदि a किसी सेट A का सदस्य या उपादान न हो, तो इस कथन को $a \notin A$ (a does not belong to A) द्वारा प्रकट करते हैं।

'$\in$' चिन्ह ग्रीक भाषा का एक अक्षर एफसाइलेन है। इटली के गणितज्ञ Peano (1854-1932) ने सर्वप्रथम इस चिन्ह का व्यवहार किया था।

सेट या समुच्चय को लिखने की विधि (या ढंग) :

किसी समुच्चय को दो प्रकार से प्रदर्शित किया जाता है।

(i) तालिका विधि (Roster or Tabular method) (ii) सेट निर्माण विधि (Set builder method)

अंग्रेजी वर्णमाला के स्वर वर्ण समूह का समुच्चय :

तालिका विधि : अंग्रेजी वर्णमाला के स्वर वर्ण के समूह को V द्वारा प्रदर्शित किया जाए तो V = {a, e, i, o, u} अर्थात् इस विधि में समुच्चय के सभी सदस्यों को मझले कोष्ठक में लिखा जाता है।

सेट निर्माण विधि : V = {x | P(x)}, जहाँ P(x) अंग्रेजी वर्णमाला के स्वर वर्ण समूह है। अर्थात् इस विधि में यदि किसी समुच्चय A के प्रत्येक सदस्य x हो, तो P(x) एक साधारण नियम से बंधा होता है। और A = {x | P(x)} या A = {x : P(x)} रूप में A समूह प्रदर्शित किया जाता है।

परस्पर भिन्न करने का क्या अर्थ है : A = {2,2} और A = {2} समान हैं। यहाँ 2 और 2 अभिन्न होने पर भी 2 को दो बार के बदले एक बार ही लिया जायेगा।

प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय :

तालिका विधि : प्राकृतिक संख्या समूह को N द्वारा प्रदर्शित करने पर N = {1, 2, 3, ...}

सेट निर्माण विधि : A = {x | x एक प्राकृतिक संख्या}

अंग्रेजी वर्णमाला के स्वर वर्ण समूह का समुच्चय V हो तो V = {a, e, i, o, u}, इसमें किसी भी सदस्य आगे या पीछे (पहले या बाद में) लिखा जा सकता है। जैसे V = {a, i, e, o, u}

ससीम समुच्चय (Finite Set) :

जिस समुच्चय के सदस्यों / उपादानों की संख्या निश्चित संख्या तक (ससीम) रहती है उसे ससीम समुच्चय कहते हैं। A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, V = { a, e, i, o, u} इत्यादि।

समुच्चय के उपादान समूह की संख्या :

किसी ससीम समुच्चय A के सदस्यों / उपादानों की संख्या (Number of elements of the Set A) यदि n हो तो n को A समुच्चय की मात्रा (Order of the Set A) कहते हैं और इसे | A | या n (A) [Order of Set A] द्वारा प्रकट करते हैं। n को A का अंकवाचक संख्या (Cardinal number of A) कहते हैं।

n (A) = 6 এবং n (V) = 5

यदि X = {1, 1, 1, 1} एक समुच्चय हो तो X = {1} अत: n (x) = 1

असीम समुच्चय (Infinite Set) :

जिस समुच्चय के सदस्यों / उपादानों की संख्या असीम (अनन्त) हो उसे असीम समुच्चय कहते हैं।

जैसे, (i) प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय N = {1, 2, 3, 4, ...} एक असीम समुच्चय है।

(ii) पूर्ण संख्याओं का समुच्चय Z = {........ –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ....} एक असीम समुच्चय है।

एकपदी समुच्चय (Singleton Set) :

जिस समुच्चय के सदस्य की संख्या एक हो उसे एकपदी समुच्चय कहते हैं। जैसे, A = {2} एक एकपदी समुच्चय (Singleton Set) है।

शून्य समुच्चय (Null or Empty or Void Set) :

किसी समुच्चय में कोई सदस्य / उपादान नहीं होने पर उसे शून्य समुच्चय कहते हैं।

शून्य समुच्चय को ग्रीक अक्षर Φ (फाई) या { } चिन्ह द्वारा प्रकट किया जाता है।

जैसे, $\Phi = \{x : x$ एक अखण्ड संख्या है और $2 < x < 3\}$

(i) शून्य समुच्चय के सदस्य की संख्या शून्य होती है।

(ii) शून्य समुच्चय एक ससीम समुच्चय है।

(iii) Φ समुच्चय और {0} समुच्चय एक समान नहीं हैं।

(iv) Φ समुच्चय और {Φ} समुच्चय समान नहीं हैं। Φ द्वारा शून्य समुच्चय प्रकट होता है जबकि {Φ} समुच्चय द्वारा एकल समुच्चय है जिसका एक सदस्य Φ (शून्य) है।

(v) शून्य समुच्चय अनन्य (unique) है अत: कभी एक या किसी शून्य समुच्चय नहीं लिखा जाता। हमेशा शून्य समुच्चय लिखा जाता है।

समुच्चय समूहों का समुच्चय (Set of Sets) :

किसी समुच्चय का प्रत्येक सदस्य एक समुच्चय हो तो उसे समुच्चय समूहों का समुच्चय कहते हैं।

जैसे $\{\{1, 2\}, \{1\}\}$

यहाँ एक समुच्चय दूसरे समुच्चय के सदस्य / उपादान के रूप में है। किसी समूह को एक नये सदस्य के रूप में लेना (या सोचना) समुच्चय सिद्धान्त की एक महत्त्वपूर्ण अवधारणा है। जैसे भारत एक राष्ट्र है, एशिया एक महादेश है आदि।

समुच्चय की समानता (Equality of Sets) :

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 1\}$ अत: $A = B$

$C = \{x \mid x$, 'steep' शब्द का एक अक्षर है$\} = \{s, t, e, p\}$

$D = \{x \mid x$, 'step' शब्द का एक अक्षर है$\} = \{s, t, e, p\}$

$\therefore \quad C = D$

यदि दो समुच्चयों A और B में एक ही सदस्य हो, तो दोनों समुच्चय समान कहे जाते हैं।

अत: $A = B$ होगा यदि $x \in A \rightarrow x \in B$ और $y \in B \rightarrow y \in A$ हो।

कई बार '$\rightarrow$' चिन्ह के बदले '$\Rightarrow$' चिन्ह व्यवहार किया जाता है। '$\Rightarrow$' या '$\rightarrow$' चिन्ह द्वारा युक्तिगत फलन (Logical Implication) बनाया जाता है। ('$\Rightarrow$' चिन्ह को Implies that or means that पढ़ा जाता है।)

- $n(A) = n(B)$ हो तो सर्वदा $A = B$ नहीं होता। जैसे $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$

अत: $n(A) = n(B)$ किन्तु $A \neq B$ क्योंकि $3 \in A \not\Rightarrow 3 \in B$ ('$\not\Rightarrow$' चिन्ह को does not imply that पढ़ते है)

- किन्तु $A = B$ हो तो सर्वदा ही $n(A) = n(B)$ होगा।

उपसमुच्चय और अपर समुच्चय (subset and super set) :

यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{1, 2, 3, 4\}$ दो समुच्चय हो तो A समुच्चय को B समुच्चय का उप समुच्चय कहा जाता है और B समुच्चय को A समुच्चय का अपर समुच्चय कहा जाता है।

यदि किसी समुच्चय A के प्रत्येक सदस्य / उपादान (element) दूसरे एक समुच्चय B के सदस्य हो तो A समुच्चय को B समुच्चय का उप समुच्चय और B समुच्चय को A समुच्चय का अपर समुच्चय कहा जाता है। यदि $A = B$ न हो, और A, B का उप समुच्चय हो, तब लिखा जाता है $A \subset B$.

$A \subseteq B$ का अर्थ है $x \in A \Rightarrow x \in B$

$B \subseteq A$ का अर्थ है $y \in B \Rightarrow y \in A$

यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$ हो तो $A = B$ होगा।

{1, 2, 3} समुच्चय के उप समुच्चय है Φ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}, {1, 2, 3}.

Φ शून्य सेट सभी समुच्चयों का उप समुच्चय होता है।

किसी ससीम समुच्चय के उप समुच्चयों की संख्या 2^n है जहाँ n ससीम समुच्चय के सदस्यों की संख्या है। यहाँ A समुच्चय के उप समुच्चयों की संख्या $2^3 = 8$ है क्योंकि n(A)=3 है।

A, B का स्वाभाविक उप समुच्चय होगा यदि और केवल यदि A, B का उप समुच्चय हो किन्तु $A \neq B$ हो।

{1, 2, 3} के स्वाभाविक उप समुच्चय है Φ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}

अत: किसी ससीम समुच्चय के स्वाभाविक उप समुच्चयों की संख्या $2^n - 1$ है; जैसे उपरोत्त्क दशा में उप समुच्चय की संख्या $(2^3 - 1) = 7$ है।

समतुल्य समुच्चय (Equivalent Set) :

दो ससीम समुच्चय को समतुल्य कहा जायेगा यदि दोनों समुच्चयों के सदस्यों की संख्या एक समान हो।

A = {1, 2, 3, 4} और B = {a, b, c, d}; n (A) = n (B) = 4; अत: A और B समतुल्य समुच्चय है।

दो ससीम समुच्चय समान हो तो वे समतुल्य होगे। किन्तु दो समतुल्य समुच्चय समान नही भी हो सकते है।

दो समुच्चयों का अन्तर (Difference of two Sets) :

A = {1, 2, 3, 4, 5} और B = {2, 4, 6, 8, 10} हो तो A – B = {1, 3, 5}

A और B दो समुच्चयों का अन्तर कहने से एक ऐसा समुच्चय समझा जाता है जिसके सदस्य A में है किन्तु B में नहीं है और इस अन्तर को 'A – B' द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

$A - B = \{x \mid x \in A$ और $x \notin B\}$

A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 4, 6, 8, 10} हो तो

B – A = {6, 8, 10}

A – Φ = A और Φ – A = Φ

$A - B \neq B - A$ जब $A \neq B$

सार्विक समुच्चय (universal Set) :

समुच्चय से सम्बंधित गणित की समस्याओं में कभी-कभी ऐसे समुच्चय की आवश्यकता पड़ जाती है कि उस समस्या के विवेचनीय समुच्चय उप समुच्चय हो। इस नये समुच्चय को उस समस्याओ के विवेचनीय समुच्चयों के सापेक्ष सार्विक समुच्चय कहते है। सार्विक समुच्चय को सामान्यत: U अक्षर द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

जैसे माना कि एक अंक की संख्याओं के तीन समुच्चय A, B, C है।

और A = {0, 1}, B = {2, 3}, C = {1, 2, 3, 4} है

इस दशा में सार्विक समुच्चय लिया जा सकता है U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

सार्विक समुच्चय अनन्य (unique) नहीं होता।

उपसमुच्चय समूह (Power Set) :

A एक समुच्चय हैं; A समुच्चय के सभी उप समुच्चयों के समुच्चय को A का उप समुच्चय समूह (Power set) कहते हैं इसे P (A) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

जैसे, $A = \{a, b, c\}$ हो तो उप समुच्चयों का समूह होगा

$$P(A) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$$

किसी ससीम समुच्चय A के सदस्यों की संख्या n हो तो A सेट का Power set P (A)के सदस्यो की संख्या 2^n होगी।

पूरक समुच्चय (Complement of Set) :

किसी सार्विक समुच्चय U के सापेक्ष एक समुच्चय A के पूरक समुच्चय को A^c द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। अतः पूरक समुच्चय कहने का अर्थ हैं, $A^c = U - A = \{x \mid x \in U$ और $x \notin A\}$। जैसे, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ और $A = \{0, 1\}$ हो तो A का पूरक समुच्चय $A^c = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; होगा फिर यदि $U = \{x \mid x$ वास्तविक संख्या हैं$\}$, और $A = \{x \mid x$ परिमेय संख्या हो$\}$ हो तो $A^c = U - A = \{x \mid x$ अपरिमेय संख्या है$\}$ होगा।

दो समुच्चयों का योग (Union of two Sets) :

A और B दो समुच्चय दिये गये हैं। A और B समुच्चय के योग को $A \cup B$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है और इसका अर्थ है, $A \cup B = \{x \mid x \in A$ या $x \in B\}$ जैसे

(i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = (2, 3, 6, 7\}$

$\therefore$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

(ii) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$

$\therefore$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(iii) $A \cup \Phi = A$

दो समुच्चयों को अन्तः प्रतिच्छेदन (Intersection of two Sets) :

दो समुच्चय A और B को अन्तःप्रतिच्छेदन को $A \cap B$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है और इसका अर्थ हैं $A \cap B = \{x \mid x \in A$ और $x \in B\}$ जैसे, (i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ हो तो $A \cap B = \{2, 3\}$ होगा।

(ii) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ हो तो $A \cap B = \Phi$

(iii) $A \cap \Phi = \Phi$

विच्छिन्न समुच्चय (Disjoint Sets) :

दिये गये दो समुच्चय A और B के बीज कोई उभयनिष्ठ सदस्य (उपादान न हो तो इन दोनों समुच्चयों को एक दूसरे से विच्छिन्न समुच्चय कहते हैं अर्थात् $A \cap B = \Phi$ जहाँ Φ शून्य समुच्चय है) हो तो A और B दोनो समुच्चय को विच्छिन्न समुच्चय कहते हैं। जैसे, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ हो तो

$A \cap B = \Phi$; अतः A और B Disjoint Sets हैं।

दो समुच्चयों का सममित अन्तर (Symmetric difference of two sets) :

दो समुच्चयों A और B का प्रतिसम / सममित अन्तर $A \Delta B$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। और $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ होता हैं।

जैसे, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, e, f\}$,

$A - B = \{a, c\}$, $B - A = \{e, f\}$,

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, c, e, f\}$

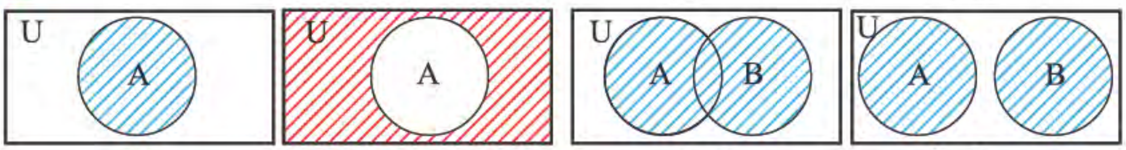
वेन चित्र समूह (Venn diagrams) :

जिस चित्र-समूह द्वारा समुच्च-प्रक्रिया समूह को प्रदर्शित / उपस्थित किया जाता है उसे व्हेन डायग्राम या मानचित्र या व्हेन चित्र समूह कहा जाता है। जोन व्हेन (John Venn) समूच्चय की प्रक्रिया -समूह की अवधारणा देने के लिये इस प्रकार के चित्रों का सबसे पहले प्रयोग किया था।

व्हेन चित्र में सार्विक समुच्च्य को सामान्यतः एक आयत क्षेत्र के रूप में दिखाया जाता है और सार्विक समुच्चय के उप समुच्चयों के समूह को आयत क्षेत्र के अन्दर एक वक्र रेखा द्वारा बन्द क्षेत्र या वृत्त क्षेत्र द्वारा प्रकट किया जाता है। प्रेत्येक चित्र में रेखांकित किये हुए या भरे हुए अंशों के माध्यम से उस चित्र के नीचे लिखे हुये समुच्चय को प्रदर्शित किया गया हैं।

1

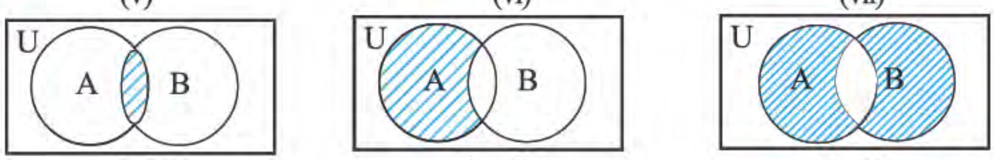
(i) (ii) (iii) (iv)



A | $U - A = A^c$ | $A \cup B$ | $A \cup B$

2

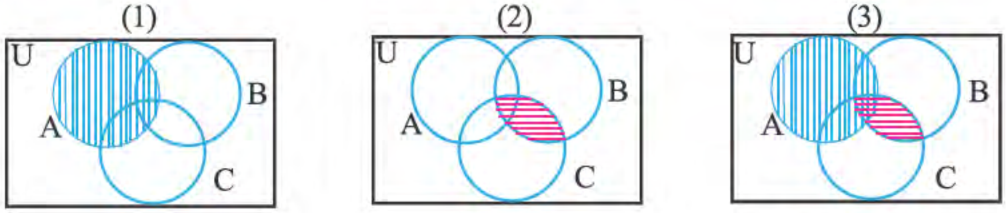
(v) (vi) (vii)



$A \cap B$ | $A - B$ | $A \Delta B$

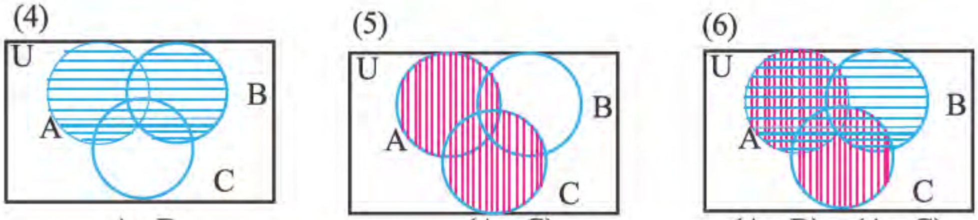
3 व्हेन चित्र की सहायता से पाते हैं, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(1) (2) (3)



A | $B \cap C$ | $A \cup (B \cap C)$

(4) (5) (6)



$A \cup B$ | $(A \cup C)$ | $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

व्हेन चित्र की सहायता से पाते हैं, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4 व्हेन चित्र की सहायता से दिखायें कि

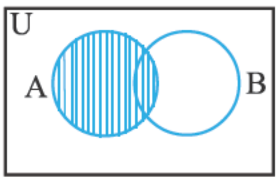
(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

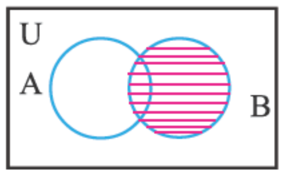
(c) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ [स्वयं करे]

5 व्हेन चित्र की सहायता से दिखाये कि

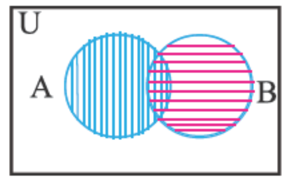
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



A



B

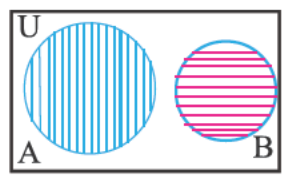


$A \cup B$

माना कि A समुच्चय के सदस्यो की संख्या x हैं अर्थात $n(A) = x$, B समुच्चय के सदस्यों की संख्या y हैं अर्थात् $n(B) = y$ और $A \cap B$ समुच्चय के सदस्यों की संख्या रहै z अर्थात $n(A \cap B) = z$ हैं।

अतः $n(A \cup B) = x + y - z$

$\therefore \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



यदि $A \cap B$ समुच्चय की पद संख्या शून्य हो

अर्थात $n(A \cap B) = 0$ हो तो $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

6 **एक अंचल की समीक्षा करके देखा गया कि 70 लोग अंग्रेजी समाचार पत्र, 73 लोग हिन्दी समाचार पत्र और 64 लोग दोनो प्रकार के समाचार पत्र पढ़ते हैं। यदि 63 लोग किसी भी प्रकार का समाचार पत्र न पढ़ते हो तो कुल कितने लोगों के बीच समीक्षा की गयी थी - गणना कर देखे।**

माना कि अंग्रेजी समाचार पत्र पढ़ने वाले लोगों का समुच्चय = E और हिन्दी समाचार पत्र पढ़ने वाले लोगो की संख्या का समुच्चय = B हैं।

अब दिये गये शर्त्तानुसार, $n(E) = 70$, $n(B) = 73$ और $n(E \cap B) = 64$

अतः $n(E \cup B) = n(E) + n(B) - n(E \cap B)$ [A और B दो समुच्चय हो तो हम जानते है कि $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$]

$= 70 + 73 - 64 = 79$

$\therefore$ 79 लोग दो तरह के समाचार पत्रों में एक या दूसरे प्रकार का समाचार पत्र पढ़ते हैं।

फिर किसी भी प्रकार का समाचार पत्र नहीं पढ़ते ऐसे लोगों की संख्या = $n(E \cup B)^C = 63$

$\therefore$ अभीष्ठ लोगों की संख्या $(79 + 63) = 142$

$\therefore$ अतः वह समीक्षा 142 लोगो के बीच की गयी थी।

23 संभावना-सिद्धान्त (PROBABILITY THEORY)

हम अक्सर कहते है कि वर्षा होने की संभावना है। आज के खेल में भारत के जीतने की संभावना है आदि। 'संभावना' शब्द का प्रयोग तभी किया जाता है जब कि घटना के साथ अनिश्चियता जुड़ी हो। हम इस ''संभावना'' को सुनिश्चित ढंग से समझने का प्रयास करेगें।

संभावना (Probability) शब्द घटना (Event) के साथ जुड़ा होता है और घटना शब्द परीक्षा (Experiment) के साथ जुड़ा है।

क्रमहीन/बेतरतीब परीक्षा (Random Experiment) :

हमलोग संभावना-सिद्धान्त में जिस प्रकार की परीक्षा की चर्चा करेंगे उस परीक्षा को **बेतरतीब परीक्षा (Random Experiment)** कहा जाता है।

इस तरह का एक उदाहरण है —

हम एक छक्का फेंकते है — यह एक क्रमहीन/बेतरतीब परीक्षा है क्योंकि

(i) क्या-क्या हो सकता है — हम नहीं जानते।

(ii) अभी क्या होगा — वह भी अनजाना है।

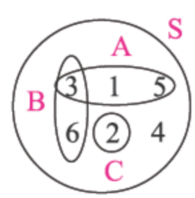
(iii) परीक्षा जितनी बार इच्छा हो उतना बार करना संभव है।

हम जानते है एक छक्का फेकनें पर 1, 2, 3, 4, 5 अथवा 6 में से कुछ न कुछ आयेगा। किन्तु अभी क्या आयेगा अनजाना है।

नमूना देश या घटना देश (Sample Space or Event Space) :

कोई क्रमहीन परीक्षा करने पर जो-जो परिणाम **(Outcome)** हो सकते है उनके समुच्चय को **नमूना देश या घटना देश (Sample Point)** कहा जाता है।

इस क्रमहीन परीक्षा के लिए जो **घटनायें** होंगी वे वास्तव में इस नमूना देश या घटना देश के उपसमुच्चय होंगे। जैसे हम यदि एक छक्का फेंके (या गिराए) तो नमूना देश होंगा।



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

यहाँ, 1, 2, 3, 4, 5 और 6 सभी एक-एक परिणाम (Outcome) है और $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{2\}$ आदि S के उप समुच्चय इस क्रमहीन परीक्षा के एक-एक घटना (Event) है। इन घटनाओं की संभावना हम ज्ञात करेंगे।

यदि छक्का बिल्कुल निष्पक्ष या सुनिर्मित (Fair) या पक्षपात हीन (Unbiased) हो और हम उस छक्का के लिये $A = \{1, 3, 5\}$ इस घटना के घटने की संभावना को P(A) चिन्ह द्वारा लिखें और पढ़ें 'A घटना घटने की संभावना'।

तो हम पायेंगे $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

फिर यदि $B = \{3, 6\}$ या $C = \{2\}$ इत्यादि घटनायें घटने की संभावना ज्ञात करे तो पायेंगे

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ एवं $P(C) = \frac{1}{6}$

जहाँ, देखते है कि $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ और $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ लिया गया है। जहाँ n(A), n(B), n(C) और n(S) क्रम से A, B, C और S समुच्च के बिन्दु की संख्या प्रकट करते है।

संभावना की पुरानी संज्ञा (Classical definition of Probability) या प्राथमिक संज्ञा (A Priori definition of Probability) या गणितिक संज्ञा (Mathematical definition of Probability)

E एक क्रमहीन परीक्षा (Random experiment) और इस परीक्षा के फलस्वरूप नमूना देश या घटना देश (Sample space or Event space) S हो यहाँ S समुच्चय के परिणाम (Outcome) की संख्या ससीम या समान रूप से संभाव्य (equally likely or mutually symmetrical) है। यदि A एक घटना (Event) हो अर्थात् A, S का एक उप समुच्चय हो और A समुच्चय के बिन्दु की संख्या n(A) और S समुच्चय के बिन्दुओं की संख्या n(S) हो तब A घटना के घटने की संभावना P(A) द्वारा प्रकट किया जायेगा और $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ होगा।

1 किसी शुद्ध या चिकनी मुद्रा को क्रम से दो बार फेकनें पर दोनों बार हेड गिरने की संभावना कितनी है?

हेड और टेल गिरने को क्रम से H और T द्वारा निरुपित किया जाता है।

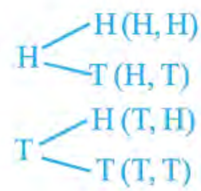
यहाँ नमूना देश है S = {(H, H), (H, T), (T, H), (T, T) }

और हम जिस घटना की संभावना ज्ञात करना चाहते हैं वह A = {(H, H)}

यहाँ देखते हैं n (A) = 1 और n (S) = 4

∴ प्राथमिक संज्ञा (परिभाषा) के अनुसार पाते हैं

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$



2 एक शुद्ध अथवा चिकना छक्का दो बार गिराया गया और दोनों बार छक्का के ऊपर की ओर जो संख्या उछली (या ऊपर उठी) अन्तर को ध्यान से देखा गया। इस अंतर के 3 होने की संभावना कितनी है?

इस दशा में नमूना-देश होगा,

S = {(1,1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2),................................(2,6),
(3,1), (3,2),................................(3,6),
....
(6,1), (6,2),................................(6,6)}

और हम जिस घटना की संभावना ज्ञात करना चाहते है वह

A = {(1,4), (2,5), (3,6),(4,1), (5,2), (6,3)} है।

यहाँ देखते है n(A) = 6 और n(S) = 36

$$\therefore P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

3 एक शुद्ध या चिकने सिक्के (मुद्रा) को 3 बार उछाले जाने पर सही-सही दो हेड (H) और एक टेल (T) पड़ने की संभावना कितनी है?

इस दशा में नमूना देश

S = {(T, T, T), (T, H, H), □, □, □, □, □, (H, H, H)}

और हम जिस घटना के घटने की संभावना ज्ञात करना चाहते हैं वह

A = {(H, H, T), (H, T, H), □} है। $\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\square}{\square}$

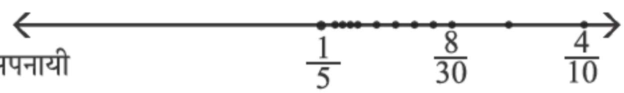
पहले की चर्चा में हमने किसी क्रमहीन परीक्षा में एक बिन्दु युक्त घटना के घटने की संभावना क्या होगी इसे मान लिया करते थे। (हम जब कहते हैं कि एक)(Fair) छक्का गिराते हैं तब उसे चिकना कहने के माध्यम से हम मान लेते हैं {1}, {2}, {3}, {4}, {5} और {6} इन एक बिन्दु युक्त घटनाओं के घटने की संभावना $\frac{1}{6}$ अर्थात् $P(\{1\}) = \frac{1}{6}, P(\{2\}) = \frac{1}{6}, ..., P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ और इसकी सहायता से ही हम उस परीक्षा में अन्य घटना घटने की संभावना ज्ञात कर रहे थे।

अर्थात् $P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

अब हम चिकना नहीं है ऐसे छक्के के एक बिन्दु युक्त घटनाओं के घटने की संभावना ज्ञात करने की चेष्टा करेंगे। यह पद्धति आवृत्ति आधारित व्याख्या (frequency interpretation) के नाम से परिचित है।

इस असम छक्का के लिये A = {3} इसी एक बिन्दु युक्त घटना के घटने की संभावना ज्ञात करना चाहते हैं। पहले हम उस छक्के को 10 बार फेकतें हैं और {3}, 4 बार पड़ा और बाद में फिर छक्के को 20 बार फेंका और {3}, 6 बार पड़ा। इसी प्रकार हमने छक्के को 30 बार फेंका और {3}, 8 बार पड़ा। इसी प्रकार 40 बार, 50 बार, 60 बार इसी छक्के को फेंकता रहा और {3} कितनी बार पड़ता है गिनता रहा और प्रत्येक बार हम एक भिन्न संख्या पाते रहें जो क्रम से है : $\frac{4}{10}, \frac{6}{20}, \frac{8}{30}, ...$

यदि हम इन संख्याओं की संख्या रेखा पर स्थापित करें तो देखेगें कि सभी मित्र क्रमशः एक निर्दिष्ट संख्या के निकट एकत्रित हो रहे हैं। उस निर्दिष्ट संख्या को ही A = {3} घटना को घटने की संभावना माना जाता हैं। संभावना की उस परिमाप को आवृति आधारित परिभाषा (Frequency definition) कहा जाता हैं। यहाँ, शायद A = {3} घटना के घटने की संभावना $\frac{1}{5}$ होगी।



चिकने छक्का के लिये भी एक पद्धति अपनायी

आवृत्ति आधारित परिमापा (Frequency definition):

माना कि एक क्रमहीन परीक्षा (Random Experiment) N बार की गयी और इस परीक्षा के साथ युक्त एक बिन्दु युक्त घटना A उसी N के भीतर N (A) बार घटी तब एक भिन्न संख्या $\frac{N(A)}{N}$ पायेंगे। N के विभिन्न बड़े-बड़े मानों के लिये इसी तरह वे जो भिन्न मिलेगें वे क्रमशः एक निर्दिष्ट संख्या के निकट सिमटते जाते हैं (समेटने के इस विशेष धर्म को (statistical regularity) कहा जाता हैं] और उस निर्दिष्ट संख्या को A घटना के घटने की संभावना कहा जाता है और P (A) चिन्ह द्वारा इसे प्रदर्शित किया जाता है।

अर्थात् $P(A) = \frac{N(A)}{N}$ जब, N बहुत बड़ी संख्या हो।

एक खुरदरा छक्का 10000 बार फेंका गया और एक बिन्दु युक्त घटनाएँ कितनी बार घटी हैं उसे एक सारणी में लिखा गया है : (यहाँ N = 10000)

एक बिन्दु युक्त घटना	{1}	{2}			
आकृति अर्थात् N(A)					

आवृत्ति आधारित परिभाषा के अनुसार एक बिन्दु युक्त घटनाओं के घटने की संभावना पायेगें :

$$P(\{1\}) = \frac{1300}{10000} = \frac{13}{100} \qquad P(\{4\}) = \frac{3500}{10000} = \frac{7}{20}$$

$$P(\{2\}) = \frac{1000}{10000} = \frac{1}{10} \qquad P(\{5\}) = \frac{1700}{10000} = \frac{17}{100}$$

$$P(\{3\}) = \frac{2000}{10000} = \frac{1}{5} \qquad P(\{6\}) = \frac{500}{10000} = \frac{1}{20}$$

देखते हैं : $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$

$$= \frac{13}{100} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{7}{20} + \frac{17}{100} + \frac{1}{20} = 1$$

यदि यहाँ $A = \{1, 3, 5\}, B = \{3, 6\}$ इत्यादि घटना का अर्थात् छक्के को फेंकने पर विषम पड़ेगा या 3के आपवर्तय पड़ेगें, इसकी संभावना ज्ञात करनी हो, तो विषय पड़ने की संभावना और 3 के अपवर्तय पड़ने की संभावना पायेगें :

$$P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{13}{100} + \frac{1}{5} + \frac{17}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$P(\{3, 6\}) = P(\{3\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$$

यदि एक क्रमहीन परीक्षा (Random Experiment) किया जाता है और इस परीक्षा के लिये नमूना देश या घटना देश (Sample Space or Event Space) S हो तब हम कई नियम पायेगें।

उन सभी नियमों को हम यहाँ दे रहे हैं : (A और B परीक्षा के साथ युक्त दो घटनाएँ ये लिया अर्थात् $A \subseteq S$ और $B \subseteq S$ और ϕ शून्य समुच्चय और A^c के A का पूरक समुच्चय माना)

(i) $0 \le P(A) \le 1$ **(ii)** $P(S) = 1$ **(iii)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ यदि $A \cap B = \phi$ हो।
(iv) $P(\phi) = 0$ **(v)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **(vi)** $P(A^c) = 1 - P(A)$

अगले नियम के अनुसार इन नियमों को जाँचते हैं —

माना, $A = \{1, 3, 5\},\ B = \{3, 6\},\ C = \{2, 4\}$

देखते हैं (i) $0 \le P(A) \le 1,\ 0 \le P(B) \le 1,\ 0 \le P(C) \le 1$

$(\because 0 \le \frac{1}{2} \le 1,\ 0 \le \frac{1}{4} \le 1,\ 0 \le \frac{9}{20} \le 1)$

(ii) $P(S) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$

(iii) $P(A \cup C) = P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \frac{19}{20}$ और $P(A) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{9}{20} = \frac{19}{20}$

$(\because A \cap C = \phi)$ (iv), (v), (vi) स्वयं करें

लैपलेस द्वारा दी गयी पुरानी या गणितीय परिभाषा (Classical or Mathematical definition of Probability) और व्हेन मिसेस (Von Mises) द्वारा दिये गये आवृत्ति आधारित परिभाषा (Frequency definition of Probability) कोई भी त्रुटि मुक्त नहीं है। इसलिए बाद में गणितज्ञ कोलमोगोरोभ (Kolmogoroff) ने संभावना की स्वयं सिद्ध आधारित परिभाषा (Axiomatic definition of Probability) देकर संभावना सिद्धान्त को त्रुटि मुक्त किया। विज्ञान की हर शाखा में और दूसरे शाखाओं में भी संभावना सिद्धान्त का अधिकाधिक प्रयोग पाया जाता है। हम बाद में स्वयंसिद्ध आधारित परिभाषा की सहायता से संभावना सिद्धान्त को पढ़ेगें।

मिलाकर देखें (LET'S MATCH)

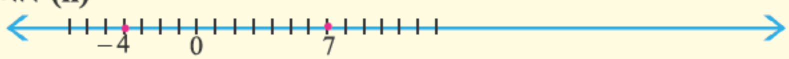
हल करें - 1.1

1. जिस संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जाता हैं, जहाँ p और q पूर्ण संख्यायें हैं और $q \neq 0$ उस संख्या को परिमेय संख्या कहते हैं।

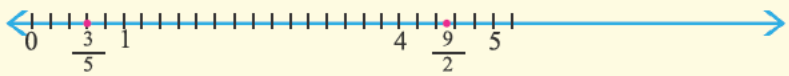
$\frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{11}{13}$ (अन्य चार भी ले सकते हैं)

2. हाँ, $0 = \frac{0}{1}$

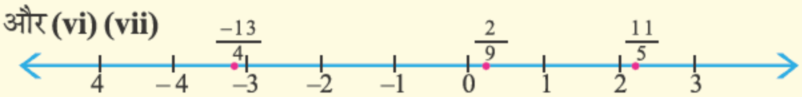
3. **(i)** और **(ii)**



(iii) और **(iv)**



(v) और **(vi)** **(vii)**



4. **(i)** $\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$ **(ii)** $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ **(iii)** $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$ **(iv)** $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{7}{24}$

(v) $\frac{(-2)+(-1)}{2} = -\frac{9}{2}$ (अन्य उत्तर भी संभव हैं)

5. $4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}, 4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}, 4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$ (अन्य उत्तर भी संभव हैं)

6. $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}, 4+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ (अन्य उत्तर भी संभव हैं)

7. $\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{9}{40}, \frac{\frac{1}{5}+\frac{9}{40}}{2}=\frac{17}{80}, \frac{\frac{9}{40}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{19}{80}$ (अन्य उत्तर भी संभव हैं)

8. **(i)** T **(ii)** F **9.** परिमेय संख्या

हल करें - 1.2

1. **(i)** सही **(ii)** मिथ्या/गलत **(iii)** सही **(iv)** मिथ्या/गलत **(v)** सही **(vi)** मिथ्या/गलत

2. जिन सभी वास्तविक संख्याओं को $\frac{p}{q}$ रूप में लिखा नहीं जा सकता जहाँ p और q पूर्ण संख्या हो और $q \neq 0$ उन सभी वास्तविक संख्याओं को अपरिमेय संख्या कहते हैं।

$\sqrt{2}, \sqrt{3}$, e, π (अन्य उत्तर भी संभव हैं)

3. परिमेय– **(i), (ii), (v), (vi),** अपरिमेय– **(iii), (iv), (vii), (viii), (ix)**

हल करें – 1.3

1. **ससीम** (i), (iv) **असीम** (ii), (iii), (v)

2. **(i)** $0.\dot{0}\dot{9}$, **(ii)** 0.625, **(iii)** $0.\dot{2}3076\dot{9}$ **(iv)** 3.125 **(v)** $0.\dot{1}\dot{8}$ **(vi)** 0.28

3. **(i)** $\frac{1}{3}$, **(ii)** $\frac{4}{3}$, **(iii)** $\frac{49}{90}$, **(iv)** $\frac{34}{99}$, **(v)** $\frac{311}{99}$, **(vi)** $\frac{8}{45}$, **(vii)** $\frac{43}{90}$ **(viii)** $\frac{6}{11}$, **(ix)** $\frac{1}{999}$, **(x)** $\frac{163}{999}$

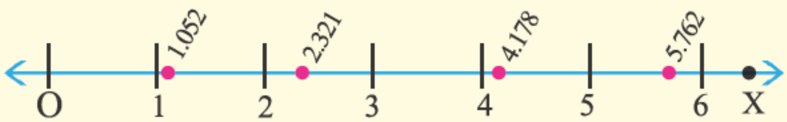
4. 2, 3, 5, 7 (अन्य उत्तर भी संभव हैं)

5. 0.80 800 8000 80000 8......, 0.85 855 8555 85555 8 ......, (अन्य उत्तर भी संभव हैं)
0. 91 911 9111 91111 9 ....,

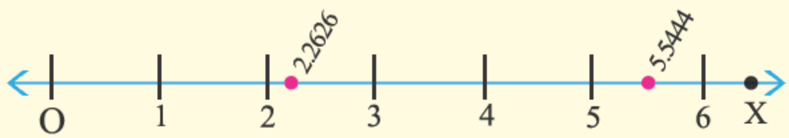
6. 0.121221222122221 ...., 0.373773777377779 ....., (अन्य उत्तर भी संभव हैं)

7. परिमेय → (ii), (iii) अपरिमेय → (i), (iv)

8.



9.



10. 0.22, 0.23 (अन्य उत्तर भी संभव हैं) **11.** 0.2, 0.21 (अन्य उत्तर भी संभव हैं)

14. **(i)** (c), **(ii)** (d), **(iii)** (d), **(iv)** (c), **(v)** (c) **15.** **(i)** $(\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) = 0$ **(ii)** $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

(iii) $\dfrac{\frac{1}{7} + \frac{2}{7}}{2} = \frac{3}{14}$

(iv) 0.151551555155551 .....

(v) $\frac{37}{3000}$ (13 के सभी अंको के लिये अन्य उत्तर भी संभव हैं) **(vi)** (d)

हल करें — 2

1. **(i)** $2^{-\frac{9}{2}}$ **(ii)** 10 **(iii)** 2

2. **(i)** $\frac{1}{4}$ **(ii)** x **(iii)** 2 **(iv)** $\sqrt[3]{abc}$ **(v)** 8 **(vi)** 8 **(vii)** 1

3. **(i)** $10^{\frac{1}{4}}, 6^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{2}}$ **(ii)** $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 8^{\frac{1}{4}}$ **(iii)** $3^{24}, 2^{60}, 4^{36}, 3^{48}$

9. **(i)** $x = 1\frac{1}{2}$ **(ii)** (a) x = 1 **(iii)** x = 3 **(iv)** $x = \frac{2}{9}$ **(v)** $x = \frac{4}{7}$ **(vi)** x = 1
(vii) x = 4

10. **(i)** (b) 3 **(ii)** (c) 4 **(iii)** (b) $\frac{9}{2}$ **(iv)** (c) 49 **(v)** (d) 27

11. **(i)** 4:3 **(ii)** x = 3 **(iii)** x = 7 **(iv)** $\frac{1}{2}$ **(v)** 3^{3^3} वृहत्तर [$\because 3^{27} > 3^9$]

हल करें — 3.1

1.

बिन्दु	(3, –2),	(–4, 2)	(4, 5)	(–5, –5)	(–2, 7)	(7, –7)	(0, 9)	(0, –9)
x अक्ष के ऊपर/नीचे	नीचे	ऊपर	ऊपर	नीचे	ऊपर	नीचे	ऊपर	नीचे

2.

बिन्दु	(5, –7),	(10, 10)	(–8, –4)	(4, 3)	(–6, 2)	(11, –3)	(4, 0)	(–4, 0)
y अक्ष के	दाये	दाये	बाँये	दाये	बाँये	दाये	दाये	बाँये

3. तीसरे पाद में, y अक्ष के ऊपर धनात्मक दिशा में, x अक्ष के ऊपर धनात्मक दिशा में, तृतीय पाद में, चौथे पाद में पहले पाद में, y अक्ष के ऊपर ऋणात्मक दिशा में, x अक्ष के ऊपर ऋणात्मक दिशा में 7. (7, 5)

हल करें — 3.2

1. **(i)** x अक्ष के ऊपर धनात्मक दिशा में **(ii)** y अक्ष के ऊपर ऋणात्मक दिशा में **(iii)** x अक्ष के ऊपर ऋणात्मक दिशा में (iv) y अक्ष के ऊपर ऋणात्मक दिशा में, **(v)** पहले पाद में **(vi)** दूसरे पाद में **(vii)** चौथे पाद में **(viii)** तीसरे पाद में।

3. (i) $3x + 2y = 55$
$4x + 3y = 75$

(ii) $x + y = 80$
$3(x - y) - x = 20$
[माना बड़ी संख्या x छोटी संख्या y हैं]

(iii) $\frac{x+2}{y+2} = \frac{7}{9}$
$\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{2}$

(iv) $x = 2y$
$(10x + y) - (10y + x) = 27$

4. (i) $x - y = 26$ (ii) $x + y = 15$ (iii) $\frac{x+2}{y+2} = \frac{7}{9}$

(iv) $2 \times (x + y) = 80$ (v) $5x = 8y$

6. (i) $x - y = 16$
$x + 8 = 2(y + 8)$
रजत की उम्र 8 वर्ष और रजत के मामा की उम्र 24 वर्ष हैं

(ii) $x + y = 15$
$x - y = 3$
दोनो संख्यायें 9 और 6

(iii) $\frac{x-3}{y+2} = \frac{1}{3}$
$\frac{x-4}{y-2} = \frac{1}{2}$
भिन्न $\frac{5}{4}$

(iv) $2(x + y) = 60$
$(x + 2).(y - 2) = xy - 24$
ल॰ 20 मी॰, चौ॰ 10 मी॰

(v) $16(x + y) = 64$
$8(x - y) = 24$
नाव का वेग 3.5 कि॰मी॰/घ॰
धारा का वेग 0.5 कि॰मी॰/घ॰

7. **(i)** (0,5) **(ii)** (–2, 5) **(iii)** (7, 5) **(iv)** (7, 1)

8. **(i)** $x = 1$, $y = 1$ **(ii)** $x = 2$, $y = 1$ (iii) $x = 1$, $y = 1$ **(iv)** $x = 3$, $y = 2$ (v) $x = 1$, $y = 2$

9. $x=2, y=3$ **10.** 24 वर्ग इकाई **11.** 6 वर्ग इकाई

12. $x = -2$ इसके लिए $y = 0$ और $x = 7$ इसके लिए $y = 3$ होगा **13.** $x = 3$

14. **(i)** (b) **(ii)** (a) **(iii)** (c) **(iv)** (c) **(v)** (d)

15. **(i)** (6, 0) **(ii)** (0, – 4) **(iii)** 6 वर्ग इकाई **(iv)** x अक्ष से दूरी 8 इकाई और y अक्ष से दूरी 6 इकाई **(v)** 45^0

हल करें — 4

1. **(i)** 25 इकाई **(ii)** 5 इकाई , **(iii)** $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ इकाई

2. **(i)** 5 इकाई **(ii)** 13 इकाई **(iii)** 2.5 इकाई **(iv)** 13 इकाई **(v)** $\sqrt{85}$ इकाई **(vi)** 5 इकाई

6. 10 इकाई **8.** $y = -15$ अथवा -3 **9.** (6,0)

15. **(i)** (b)2 $b^2 + d^2$ **(ii)** (a) 0 अथवा 6 **(iii)** (c) $\pm$ 3 **(iv)** (d) समकोणिय समद्विबाहु **(v)** (a) 5 इकाई

16. **(i)** $\pm$ 3 **(ii)** (0,4) **(iii)** (3,0) और (0,3) **(iv)** (1,2) और (3,–2) **(v)** (2,5) और (–2,10)

[**16.** **(iii), (iv), (v)** के लिये अन्य स्थानांक भी हो सकता हैं।]

हल करें — 5.1

1. **(b)** एक उभयनिष्ठ हल मिलेगा **(c)** पिता की आयु 42 वर्ष और बहन की आयु 13 वर्ष

2. **(b)** असंख्य उभयनिष्ठ मान पायेगे **(c)** असंख्य हल अर्थात् 1पेन का दाम 10 रू० हो तो 1पेंसिल का दाम 3रू० फिर, 1पेन का दाम 6 रू० हो तो 1 पेंसिल का दाम 6 रू० ......

3. **(b)** एक भी उभयनिष्ठ हल नहीं

(c) 1आर्ट पेपर और 1स्केच पेन का दाम अलग नहीं पायेंगे।

हल करें — 5.2

1. **(b)** हल योग्य हैं, $x= 2, y =1$ **(b)** हल योग्य हैं, असंख्य समाधान हैं, $x = 2, y = -3; x = 3, y =1; x = 4, y =5;$ .... **(c)** हल योग्य नहीं हैं **(d)** हल करने योग्य हैं $x = \frac{53}{20} y = -\frac{1}{4}$

2. **(a)** हल करने योग्य नहीं **(c)** हल योग्य और मात्र एक उभयनिष्ठ हल **(c)** हल योग्य और असंख्य उभयनिष्ठ हल **(d)** हल योग्य और असंख्य अभयनिष्ठ हल

3. **(a)** परस्पर को काटते हैं **(b)** संपाती हैं **(c)** समानान्तर **(d)** एक दूसरे को काटते हैं

4. **(a)** हल योग्य, असंख्य समाधान $x = 5, y = 0; x = -1, y =8; x = 2, y =4;$ .... **(b)** हल योग्य नहीं **(c)** हल योग्य, $x = 2, y =4$ **(d)** हल योग्य, $p = 9, q = 6$ **(e)** हल योग्य नहीं **(f)** हल योग्य नहीं।

हल करें — 5.3

1. (**a**) $x = 2, y = -1$ (**b**) $x = 2, y = 1$

2. 3

3. $4x - 3y = 16$ को 3 द्वारा और $6x + 5y = 62$ को 2 द्वारा गुणा करना होगा।

4. **(i)** $x = 4, y = -3$ **(ii)** $x = 7, y = 6$ **(iii)** $x = 36, y = 12$ (iv) $x = 12, y = 6$ (v) $x = 2, y = 2$
(vi) $x = 1\frac{1}{5}, y = 1\frac{1}{5}$ **(vii)** $x = 7, y = 9$ **(viii)** $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{7}$ **(ix)** $x = 1\frac{1}{4}, y = 1$
(x) $x = 4, y = 3$ **(xi)** $x = 20, y = 3$, **(xii)** $x = a, y = b$ **(xiii)** $x = a, y = b$ **(xiv)** $x = \frac{c(c-b)}{a(a-b)}$, $y = \frac{c(a-c)}{b(a-b)}$ **(xv)** $x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = \frac{b}{a^2 + b^2}$ (xvi) $x = 1, y = 1$

हल करें — 5.4

1. $x = 3\left(8 - \frac{y}{2}\right)$

2. $y = \frac{7x}{x-2}$

3. **a)** $x = 2, y = \frac{1}{2}$ **b)** $x = 1, y = 1$ **b)** $x = 1\frac{1}{5}, y = 1\frac{1}{5}$ **c)** $x = 51, y = 62$

4. $x = 3, y = 2$

5. **(i)** $x = 4, y = 5$ **(ii)** $x = 10, y = 4$ **(iii)** $x = 8, y = 5$ **(iv)** $x = 7, y = 9$ **(v)** $x = 6, y = 5$
(vi) $x = \frac{3}{2}, y = 2$ **(vii)** $x = 6, y = 2$ **(viii)** $x = 2, y = 3$ **(ix)** $x = 2, y = \frac{2}{3}$
(x) $x = 12, y = 8$ **(xi)** $x = 4, y = 4$, **(xii)** $x = -2, y = 3$

हल करें — 5.5

1. $x = \frac{2y}{y-3}$ 2. $x = 3$ 3. **(a)** $x = 2, y = -1$ **(b)** $x = 2, y = 3$ 4. **(a)** $x = \frac{1}{2}, y = 6$
(b) $x = 2, y = 3$ **(c)** $x = 1, y = \frac{1}{2}$ **(d)** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{5}$

5. **(i)** $x = 2, y = \frac{1}{2}$ **(ii)** $x = 1, y = 1$ **(iii)** $x = \frac{6}{5}, y = \frac{6}{5}$ **(iv)** $x = 6, y = 8$ **(v)** $x = 4, y = 10$
(vi) $x = 8, y = 5$ **(vii)** $x = 7, y = 9$ **(viii)** $x = p + q, y = q - p$

हल करें — 5.6

1. $x = 2$ $x = -1$ **2.** $x = 3, y = 2$ **3.** $x=1, y=2$ **4.** $x = 4, y = -1$ **5.** $x = 16, y = -4$
6. $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{5}$ **7.** $x=5, y=9$ **8.** $x = 16, y = 4$ **9.** $x = 21, y = 24$
10. $x = a + b, y = b - a$ 11. $x = a + b, y = b - a$, 12. $x = a, y = b$,
13. $x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = \frac{b}{a^2 + b^2}$

हल करें — 5.7

1. 1 पेन का मू० 5 रू० 1 पेंसिल का मू० 3 रू० **2.** आएशा 40 कि०ग्रा०, रफीक 45 कि०ग्रा०

3. चाचा 40 वर्ष, बहन 20 वर्ष **4.** पाँच रू० की नोट 22 दस रू० की नोट 48

5. भिन्न $\frac{12}{17}$ **6.** दो संख्यायें 15 और 18 **7.** लालिमा 12 दिनों में, रमेन 9 दिनों में,

8. प्रथम द्रव $77\frac{7}{9}$ लि०, दूसरा द्रव $72\frac{2}{9}$ लि० **9.** अखिल बाबू 235, छन्दा देवी 160

10. लम्बाई 15 मी०, चौ० 12 मी० **11.** मेरी के 160 रू०, ईशान के पास 120 रू० **12.** 12 लोग 180 रू० दिये थे **13.** 1 रू० के सिक्कों की सं० 200, 50 पै० 300 सिक्के। **14.** दूरी 540 कि०मी० वेग 36 कि०मी०/घ० **15.** संख्या 35 **16.** संख्या 95 **17.** नाव का वेग 4 मील/घ० धारा का वेग 1 मील/घ० **18.** दूरी 100 कि०मी०, वेग 25 कि०मी० **19.** संख्या 96

20. कुल कमला नींबू 1200 और 15 बाक्स **21.** **(i)** $t = -3$; **(ii)** $k = -5$; **(iii)** $x = 5, y = 5$;
(iv) $x = 1, y = -2$ **(v)** $r = 3$; (vi) $y = \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)x + \left(-\frac{c_1}{b_1}\right)$ **(vii)** $k \neq 24$ **(viii)** $a = -\frac{13}{9}, b = \frac{1}{3}$

22. **(i)** (a) **(ii)** (b) **(iii)** (c) **(iv)** (c) **(v)** a **(vi)** (c)

हल करें — 6

16. **(i)** (c) **(ii)** (d) **(iii)** (c) **(iv)** (c) **(v)** (a)

17. **(i)** $\angle A = 108° = \angle C, \angle B = 72° = \angle D$ **(ii)** 4 से०मी० **(iii)** 150° **(iv)** 75° **(v)** 6 से०मी०

हल करें — 7.1

1. **(i)** बहुपदी व्यंजक, डिग्री 6 **(iii)** बहुपदी व्यंजक, डिग्री 3 **(v)** बहुपदी व्यंजक, डिग्री 51 **(vii)** बहुपदी व्यंजक, डिग्री 0 **(viii)** बहुपदी व्यंजक, डिग्री अपरिभाषित **(x)** बहुपदी व्यंजक, डिग्री 3 **(xi)** बहुपदी व्यंजक, डिग्री 2

2. **(i)** एक चलराशि युक्त एक घातीय व्यंजक **(vi)** एक चलराशि युक्त एक घातीय व्यंजक **(v)** एक चलराशि युक्त द्विघातीय व्यंजक **(ii)** एक चलराशि युक्त त्रिघातीय व्यंजक **(iv)** एक चलराशि युक्त त्रिघातीय व्यंजक

3. **(i)** 5 **(ii)** –1 **(iii)** 0 **(iv)** $\sqrt{11}$ **4.** **(i)** 4 **(ii)** 1 **(iii)** 0 **(iv)** 3 **(v)** 1**(vi)** 19

5. $x^{17}+1$, $2y^{17} - 9$ (अन्य उत्तर संभव) **6.** x^4, $7y^4$ (अन्य उत्तर संभव)

7. $x^3 + x^2 + 1$, $7y^3 - 9x^2 - 5$ (अन्य उत्तर संभव)

8. **(i), (ii) , (iii), (iv), (v)** बहुपदी व्यंजक

(i) एक चलराशि युक्त, **(ii), (iii), (iv)** और **(v)** दो चलराशि युक्त (a को स्थिरांक लिया गया हैं।)

हल करें — 7.2

1. $f(0) = -6, f(1) = 4, f(3) = 30$

2. **(i)** $f(1) = 8, f(-1) = 2$ **(ii)** $f(1) = 7, f(-1) = 17$ **(iii)** $f(1) = 11, f(-1) = 7$

(iv) $f(1) = 9, f(-1) = -11$

4. **(i)** 2 **(ii)** $-\frac{2}{7}$ **(iii)** –9 **(iv)** 3, **(v)** 0,**(vi)** $-\frac{b}{a}$

हल करें — 7.3

1. **(i)** 5, **(ii)** –19 **(iii)** $5\frac{3}{8}$ **(iv)** $3\frac{1}{8}$

2. **(i)** 68 **(ii)** 52 **(iii)** 6 **(iv)** 5

3. **(i)** –8 **(ii)** a

4. $P(-\frac{1}{2}) = 0$, ∴ गुणक।

5. 1 **6.** $4\frac{2}{3}$ **7.** 62 **9.** a = 1, b = 3 **10.** $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{-5}{3}$, c= 2

11. **(i)** c **(ii)** a **(iii)** b **(iv)** d **(v)** d **12.** **(i)** $\frac{3}{2}$ **(ii)** 8 **(iii)** –3 **(iv)** 128

हल करें — 7.4

1. (x+1) **(i), (ii), (iv), (vi)** के उत्पादक

2. **(i)** g(x), f(x) का एक उत्पादक **(ii)** g(x), f(x) का उत्पादक नहीं **(iii)** g(x), f(x) का उत्पादक **(iv)** g(x), f(x) का एक उत्पादक

3. k = – 1 **4.** (i) k = – 12 (ii) $k = \frac{3}{2}$ (iii) k = – 8 (iv) k = – 7

5. a = 1, b = – 8 **6.** a = 1, b = 0 **7.** a = 0, b = 2 **11.** (i) c , (ii) b, (iii) a, (iv) a (v) a

12. **(i)** a = 4 **(ii)** k = 0 or $k = \frac{1}{27}$ **(iii)** 10 **(iv)** p = r **(v)** $-\frac{3}{2}$

हल करें — 8.1

1. $(x-1)(x^2+x-2)$
2. $(x+1)(x^2-x+3)$
3. $(a+2)^2(a-4)$
4. $(x-2)(x^2+2x-2)$
5. $(x+2)(x+3)(x-5)$
6. $(a-1)(4a^2-5a-2)$
7. $(x-1)(x-3)(x-5)$
8. $(a+1)(5a^2+6a-2)$
9. $(2x+1)(x^2-x+5)$
10. $(y-2)(y+3)(2y-7)$

हल करें — 8.2

1. $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$
2. $\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m+\frac{1}{m}-2\right)$
   या $\frac{1}{m^2}(m^2+1)(m-1)^2$
3. $(3p-4q)(3p-4q+a)$
4. $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$
5. $(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$
6. $(p^2+3pq-q^2)(3p^2-3pq-q^2)$
7. $(a-b+c)(a-b-c)$
8. $(3a-2b)(3a+2b+2c)$
9. $(a-2c)(a-6b+2c)$
10. $(3a+b+c)(a+b-c)$
11. $(x+y-4a)(x-y-2a)$
12. $(a+3b-2c-5d)(a-3b-2c+5d)$
13. $(a+b+c)(3a-b-c)$
14. $(x+149)(x-151)$
15. $(ax-bx+ay+by)(ax+bx-ay+by)$

हल करें — 8.3

1. $(t-2)(t^2+2t+4)(t^6+8t^3+64)$
2. $(3p+q)(3p-q)(9p^2-3pq+q^2)(9p^2+3pq+q^2)$
3. $(2p+1)(4p^2-38p+127)$
4. $\left(\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}\right)\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{4}{b^2}\right)$
5. $2(a-b)(a^2+ab+b^2)(4a^6-2a^3b^3+b^6)$
6. $A(R-r)(R^2+Rr+r^2+Rh+rh)$
7. $(a+b-2)(a^2+2ab+b^2+2a+2b+4)$
8. $4x(2x-5)(4x^2+10x+25)$
9. $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2-2x)$
10. $(x-5)(x^2-x+7)$

हल करें — 8.4

1. $(2x-y+1)(4x^2+y^2+1+2xy+y-2x)$
2. $(2a-3b-1)(4a^2+9b^2+1+6ab-3b+2a)$
3. $(1+2x-3y)(1+4x^2+9y^2-2x+6xy+3y)$
4. $(x+y+4)(x^2+y^2+16-xy-4y-4x)$
5. $3(3a-2b)(2b-5c)(5c-3a)$
6. $3(2x-y)(x+y)(x-2y)$
7. $(a^2+2a-4)(a^4-2a^3+8a^2+8a+16)$
8. $(a^2+3a+5)(a^4-3a^3+4a^2-15a+25)$
9. $3pqr(p-q)(q-r)(r-p)$
10. $\left(p+\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\right)\left(p^2+\frac{1}{p^2}-\frac{8}{9}+\frac{1}{3p}+\frac{3}{p}\right)$

हल करें — 8.5

1. **(i)** $(a+b-3)(a+b-2)$ **(ii)** $(x-1)(3x+5)(3x^2+2x-4)$ **(iii)** $(x^2+x+2)(x^2+x-4)$ **(iv)** $2b^2(15b^2-a^2)$ **(v)** $(x^2+5x+1)(x^2+3x+1)$ **(vi)** $(x-1)(ax-x+a-2)$ **(vii)** $(x+ay+y)(ax-x+y)$ **(viii)** $(x-p+2q)(x+p-3q)$ **(ix)** $(a-2)\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}+1\right)$ **(x)** $(xy-y+x)(xy-x-1)$
2. **(i)** (c) **(ii)** (d) (iii) (b) **(iv)** (d) **(v)** (a)
3. **(i)** $(a+b)(b+c)(c+a)$ **(ii)** $a=b=c$ **(iii)** $a=-15, b=-1$ **(iv)** 0 **(v)** $a=3, p=-7$

हल करें — 9

15. **(i)** (b) **(ii)** (b) **(iii)** (b) **(iv)** (b) **(v)** (b)

16. **(i)** 2 से०मी० **(ii)** 51 से०मी० **(iii)** 5 से०मी० **(iv)** 6 से०मी० **(v)** 3 से०मी०

हल करें — 10.1

1. ₹ 625, ₹ 125; ₹ 279, ₹ 21; ₹ 1150, ₹ 100; ₹ 20000, ₹ 3000 **2.** **(a)** सीधा समानुपाती **(b)** ₹ 75 **(c)** ₹ 100 **(d)** 25 प्रतिशत लाभ **(e)** प्रतिशत लाभ 20 **3.** ₹ 200 **4.** $16\frac{2}{3}$ **5.** ₹ 800 **6.** ₹ 290 **7.** ₹ 300 **8.** $33\frac{1}{3}$ **9.** प्रतिशत लाभ 8 **10.** ₹ 200 **11.** 8 **12.** ₹ 350, ₹ 1050 **13.** प्रतिशत लाभ $12\frac{1}{2}$ **14.** 13.5 **15.** 15 **16.** ₹ 6 **17.** ₹ 4 नुकसान **18.** $44\frac{4}{9}$ **19.** पैण्ट ₹ 360, कमीज ₹ 250 **20.** 25 **21.** 2 : 1

हल करें — 10.2

1. सुबल बाबू 20% लाभ। सहाना बीबी 10% लाभ उत्पल बाबू 12% लाभ

(i) ₹ 9000 **(ii)** ₹ 3696 **(iii)** $47\frac{21}{25}$

2. **(i)** ₹ 80 **(ii)** ₹ 241.50 **(iii)** ₹ 122.50 **(iv)** ₹ 262.50 **(v)** ₹ 184

3. **(i)** 15 **(ii)** 15 **(iii)** 20 **(iv)** 58.7 **(v)** ₹ 301.35

4. **(i)** (d) **(ii)** (a) **(iii)** (b) **(iv)** (a) **(v)** (b)

5. **(i)** $16\frac{2}{3}$ **(ii)** 25 **(iii)** $9\frac{1}{11}$ **(iv)** ₹ 360 **(v)** ₹ 576 **(vi)** 28%

हल करें — 11.1

1.

श्रेणी अन्तर	श्रेणी-सीमा	श्रेणी की लम्बाई	आवृत्ति
0 – 2	0 – 2	2	11
2 – 4	2 – 4	2	17
4 – 6	4 – 6	2	9
6 – 8	6 – 8	2	3

2.

श्रेणी अन्तर	श्रेणी-सीमा	टैली मार्क	आवृत्ति
1 – 10		𝍸 |	6
11 – 20		𝍸 |||	8
21 – 30		𝍸 𝍸 |	11
31 – 40		𝍸 ||	7
41 – 50		𝍸 |||	8
			कुल आवृत्ति = 40

3.

श्रेणी-सीमा	टैली मार्क	आवृत्ति	क्रमवार आवृत्ति न्युनतर/लघूत्तर-सूचक
30 – 40	||||	4	4
40 – 50	~~||||~~ |	6	10
50 – 60	|||	3	13
60 – 70	||||	4	17
70 – 80	~~||||~~ |||	8	25
80 – 90	~~||||~~ ||	7	32
90 – 100	|||	3	35
100 – 110	|||	3	38
110 – 120	||	2	40
		कुल आवृत्ति = 40	

4.

श्रेणी-सीमा	टैली मार्क	आवृत्ति
50 – 60	||	2
60 – 70	~~||||~~ |	6
70 – 80	||||	4
80 – 90	||||	4
90 – 100	~~||||~~ ||	7
100 – 110	~~||||~~ ||	7
110 – 120	~~||||~~ |	6
120 – 130	~~||||~~ ||	7
130 – 140	||	2
		कुल आवृत्ति = 40

5.

आयु (वर्ष में)	रोगियों की संख्या आवृत्ति	क्रमवार आवृत्ति (वृहत्तर सूचक)
10 – 20	80	300
20 – 30	40	220
30 – 40	50	180
40 – 50	70	130
50 – 60	40	60
60 – 70	20	20

6.

श्रेणी	10से कम	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
छात्र-छात्रओं की संख्या	17	5	7	8	13	10

7.

प्राप्तांक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 से ज्यादा
छात्र-छात्रओं की संख्या	8	5	12	35	24	16	0

8. **(i)** (a) **(ii)** (d) **(iii)** (b) **(iv)** (a) **(v)** (b)

9. **(a)** 2m – u **(b)** 37 – 47 **(c)** 0.6 **(d)** 0.4 **(e)** चल— (i), (ii), (iv), गुण— (iii), (v)

हल करें — 11.2

12. **(i)** (c) **(ii)** (c) **(iii)** (b) **(iv)** (d) **(v)** (d)

हल करें — 12

21. **(i)** (c) **(ii)** (b) **(iii)** (c) **(iv)** (d) **(v)** (a)

22. **(i)** 7.5 से०मी० **(ii)** 25 वर्ग इकाई **(iii)** 1 : 2 **(iv)** 10 वर्ग से०मी० **(v)** 1 : 1

हल करें — 15.1

1. **(i)** 400 वर्ग मीटर **(ii)** ₹1500 **(iii)** 480
2. **(i)** 51 वर्ग मीटर **(ii)** 111 वर्ग मीटर **(iii)** 264 वर्ग मीटर **(iv)** 252 वर्ग मीटर **(v)** 882 वर्ग मीटर
3. 6912 वर्ग मीटर **4.** ₹680 **5.** 25 मीटर और 20 मीटर **6.** ₹17982 **7.** 1.5 मीटर
8. 2500 वर्ग से०मी० **9.** ₹4949 **10.** 3मीटर **11.** 38 से०मी० **12.** 196 वर्ग मीटर और 19.796 मीटर
13. 80 मीटर, ₹8000 **14.** $\sqrt{193}$ मीटर, (19 + $\sqrt{193}$) मीटर **15.** ₹1,12,500
16. 288 वर्ग मीटर, **17.** 42 मीटर, 108 वर्ग मीटर, **18.** 5 मीटर × 5 मीटर, 924
19. **(i)** (b) 144 वर्ग से०मी० **(ii)** (a) $A_1:A_2 = 1:2$ **(iii)** (c) 600 **(iv)** (b) S >R **(v)** (b) 15 से०मी०
20. **(i)** 21 प्रतिशत वृद्धि पायेगा **(ii)** 1 प्रतिशत कमी **(iii)** 3 से०मी० **(iv)** 8 से०मी० **(v)** 13 से०मी०

हल करें — 15.2

1. 25$\sqrt{3}$ वर्ग से०मी०, 8$\sqrt{21}$ वर्ग से०मी०, 13.5 वर्ग से०मी०, 247.5 वर्ग से०मी०, 304$\sqrt{5}$ वर्ग से०मी० **2.** 64$\sqrt{3}$ वर्ग से०मी० **3.** 30 से०मी०, 25$\sqrt{3}$ वर्गसे०मी० **4.** 8$\sqrt{6}$ वर्गसे०मी० **5.** 48 वर्गसे०मी० **6.** 13872 वर्गसे०मी० **7.** 72 वर्ग से०मी० **8.** 5 से०मी०, रोम्बस **9.** **(i)** 432$\sqrt{15}$ वर्ग मीटर **(ii)** 9$\sqrt{15}$ मीटर **10.** **(i)** ₹ 1680 **(ii)** ₹ 1422 **11.** 300$\sqrt{3}$ वर्ग से०मी० **12.** 10$\sqrt{2}$ वर्ग से०मी० **13.** 100 वर्ग से०मी० **14.** 1 से०मी०, 0.25 वर्ग से०मी० **15.** 2.89 मिनट (लगभग) **16.** 1.5 मीटर **17.** 180 से०मी० **18.** 30 वर्ग से०मी० **19.** 4.615 से०मी०(लगभग) **20.** $1\frac{5}{7}$ से०मी० **21.** **(i)** (d), **(ii)** (b), **(iii)** (c), **(iv)** (b), **(v)** (a), **(vi)** (c) **22.** **(i)** 2 इकाई **(ii)** 300 प्रतिशत वृद्धि पाता हैं **(iii)** 800 प्रतिशत वृद्धि पाता हैं **(iv)** 10 से०मी० **(v)** 1 : $\sqrt{3}$

हल करें — 15.3

1. 20 वर्ग से०मी० **2.** 14 से०मी० और 7 से०मी० **3.** 168 वर्ग मीटर **4.** 12 से०मी० **5.** 6 से०मी० **6.** 50 वर्ग मीटर, 150 वर्ग मीटर, 12 मीटर **7.** 2420 वर्ग मीटर **8.** 24 वर्ग से०मी० **9.** 60 डेका मीटर, 80 डेका मीटर **10.** $96\sqrt{3}$ वर्ग से०मी० **11.** 114 वर्ग मीटर **12.** 88 वर्ग से०मी० **13.** 72.5 वर्ग से०मी० **14.** 1536 वर्ग से०मी० **15.** $\sqrt{185}$ से०मी०, 88 वर्ग से०मी० **16.** 67.2 वर्ग मीटर **17.** **(i)** (b) **(ii)** (b) **(iii)** (c) **(iv)** (b) **(v)** (b) **18.** **(i)** 8 से०मी० **(ii)** $3\frac{1}{3}$ से०मी० **(iii)** 70 वर्ग से०मी० **(iv)** $31\sqrt{2}$ से०मी० **(v)** 12 वर्ग से०मी०

हल करें — 16

1. **(i)** $24\frac{2}{7}$ मीटर **(ii)** 64 मीटर **2.** 220 मीटर **3.** कि०मी०/घ० 59.4 कि०मी० **4.** 19 मिनट 12 सेकेण्ड **5.** 10.5 से०मी० **6.** 42 मीटर **7.** 17.5 से०मी० **8.** 1760 मीटर की प्रतियोगिता हैं, 176 मीटर से पराजित किया। **9.** 28 से०मी० **10.** 14400 बार **11.** घण्टे की सूई 105.6 से०मी०, मिनट की सूई 2112 से०मी० **13.** 28 मीटर **14.** 12 से०मी० और 8 से०मी० **15.** 22 से०मी० **16.** 105 मीटर **17.** 330 मीटर **18.** 190 मीटर **19.** **(i)** (a) **(ii)** (b) **(iii)** (a) **(iv)** (a) **(v)** (a) **20.** **(i)** 14 से०मी० **(ii)** 11 से०मी० **(iii)** $1 : \sqrt{2}$ **(iv)** 11 से०मी० **(v)** 11 : 14

हल करें — 17

8. **(i)** 12 वर्ग से०मी० **(ii)** 6 वर्ग से०मी० **(iii)** 12 वर्ग से०मी०

9. **(i)** (a) **(ii)** (b) **(iii)** (b) **(iv)** (c) **(v)** (b)

10. **(i)** 10 से०मी० लम्बाई वाली भुजा के मध्य बिन्दु पर **(ii)** 3 से०मी० **(iii)** एक बिन्दु **(iv)** 30° **(v)** 1 से०मी०

हल करें — 18

1. 13.86 वर्ग मीटर **2.** 5.6 मीटर, 98.56 वर्ग से०मी० **3.** 264 मीटर **4.** 154 वर्ग मीटर **5.** 14 मीटर, 88 मीटर **6.** 16:25 **7.** 1920 वर्ग मीटर, 2464 वर्ग से०मी०, वृत्त **8.** ₹ 142800 **9.** ₹ 52360 **10.** ₹ 39424 **11.** 346.5 वर्ग मीटर **12.** $29571\frac{1}{7}$ वर्ग मीटर **13.** **(i)** 56 वर्ग से०मी० **(ii)** 115.5 वर्ग से०मी० **15.** $37\frac{5}{7}$ से०मी०, $30\frac{6}{7}$ वर्ग से०मी० **16.** परिवृत्त 56 से०मी०, 196 वर्ग से०मी०; अन्तर्वृत्त $28\sqrt{2}$ से०मी०, 98 वर्ग से०मी० **17.** **(i)** परिसीमा 35.83 से०मी० (लगभग), क्षेत्रफल $41\frac{1}{7}$ वर्ग से०मी० **(ii)** 86 से०मी०, क्षेत्रफल 5704.19 वर्ग से०मी०(लगभग) **18.** 21 से०मी० **19.** 4.02 वर्ग से०मी० (लगभग) **20.** 115.5 वर्ग से०मी० **21.** 21 सेमि. **22.** 616 वर्ग से०मी० **23.** अन्तर्वृत्त का अर्द्धव्यास 5 से०मी०, क्षेत्रफल वर्ग $78\frac{4}{7}$ वर्ग से०मी०; परिवृत्त के अर्द्धव्यास की ल० 12.5 से०मी०, क्षेत्रफल $491\frac{1}{14}$ वर्ग से०मी० **24.** $8\sqrt{2}$ से०मी० **25.** 88 से०मी० **26.** **(i)** (b) **(ii)** (c) **(iii)** (a) **(iv)** (a) **(v)** (c) **27.** **(i)** 21 **(ii)** 75 **(iii)** $r\sqrt{x}$ मीटर **(iv)** $19\frac{9}{14}$ वर्ग से०मी० **(v)** 9 : 25 : 49

हल करें — 19

1. **(i)** $(0, -\frac{26}{7})$ **(ii)** $(\frac{1}{5}, 1)$ **(iii)** (14,–19) **(iv)** (9,8)

2. **(i)** (4, 0) **(ii)** $(3, \frac{7}{2})$

3. बाहरी रूप से 3:2 अनुपात में विभक्त **4.** 7:9 **6.** (9,6) **8.** $\sqrt{5}$ इकाई **9.** $\sqrt{89}$ इकाई, $\sqrt{17}$ इकाई, $5\sqrt{2}$ इकाई

10. (6,7), (2,–1), (–6,15)मीटर **11.** **(i)** (d) (m,l) **(ii)** (a) –1 **(iii)** (a) (3,3) **(iv)** (d) 7 **(v)** (c) x=2,y=3 **12.** **(i)** (4,3) **(ii)** (0,0) **(iii)** (0,0) **(iv)** (–1,–1) **(v)** (2,3), (7,6) और $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$

हल करें —- 20

1. **(i)** 11 वर्ग इकाई **(ii)** $22\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई **(iii)** 3 वर्ग इकाई

3. k का कोई वास्तविक मान **6.** **(i)** $20\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई **(ii)** $18\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

7. 37.5 वर्ग इकाई, 5 इकाई, **8.** (– 4,–1) **9.** (1,1) **10.** 4 वर्ग इकाई

11. **(i)** (b) 12 वर्ग इकाई, **(ii)** (c) (3,2) **(iii)** (b) 6 वर्ग इकाई, **(iv)** (a) x = 8, y = –6 **(v)** (b) (–4,1)

12. **(i)** $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ **(ii)** (3,17) **(iv)** 2 वर्ग इकाई **(v)** (0,0)

हल करें — 21

1. **(i)** 6 **(ii)** 3 **(iii)** 6 **(iv)** – 3

2. **(a)** 5 **(b)** $3\sqrt{2}$

3. **(a)** $a = \frac{1}{10} b^2$ **(b)** $x = \frac{1}{1000} y^2$

4. **(a)** 0 **(b)** $\frac{3}{2}$ **(c)** 1 **(d)** 2

10. **(a)** x = 3 **(b)** x = 64

12. **(i)** (a) **(ii)** (c) **(iii)** (d) **(iv)** (a) **(v)** (a)

13. **(i)** 0 **(ii)** 0 **(iv)** $\sqrt{5}$

गणितीय शब्दावली (Terminology of Mathematics)

अवतल बहुभुज	Concave Polygon
अखण्ड संख्या	Whole Number
अंक	Digit
अंकन	Construction
कर्ण	Hypotenuse
अनुपात	Ratio
क्षैतिज	Horizontal
संगत कोण	Corresponding Angle
अनन्य	Unique
अन्त:केन्द्र	Incentre
अन्त:कोण	Interior Angle
अन्त:विपरीत कोण	Interior Opposite Angle
अन्तर्वृत्त	Incircle
अन्तर्समद्विभाजक	Internal Bisector
विलोपन पद्धति	Method of Elimination
अशुद्ध भिन्न	Improper Fraction
आपेक्षित आवृत्ति	Relative Frequency
अविच्छिल चलराशि	Continuous Variable
फैलाव/विकाश	Evolution
आवर्त दशमलव	Recurring Decimal
नादात्मय	Identity
अपरिमेय संख्या	Irrational Number
असीम अनावर्त्त दशमलव	Non Terminating and Non Recurring Decimal
असंख्य/अनन्त	Infinite
अपरिभाषित	Undefined
आयत क्षेत्र	Rectangular region
आयत लेखा चित्र	Histogram
आयत/आयताकार	Rectangle
ऊँचाई	Height
उदघात	Involution
उर्ध्वक्रम	Ascending Order
प्रमेय	Theorem
उर्ध्व	Vertical
गुणनखण्ड	Factor
गुणनखण्ड करना	Factorisation
ऋणात्मक	Negative
इकाई	Unit
एकान्तर कोण	Alternate Angle
एकपदी व्यंजक	Monomial Expression
ऐकिक नियम	Unitary Method
उत्तल बहुभुज	Convex Polygon
कोटि	Ordinate
विकर्ण	Diagonal
कोण	Angle
केन्द्र पर निर्मित कोण	Angle Subtended at the Centre
क्रय-मूल्य	Cost Price
हानि/क्षति	Loss
क्षेत्रफल	Area
लघुत्तर	Smaller
गुणा	Multiplication
लक्षण	Attribute
गुण्य	Multiplicand
गुणक	Multiplier
गुणनफल	Product
म.स.प.	Highest Common Factor or,Greatest Common Divisor (H.C.F. or GC.D.)
घटना	Event
घटना देश	Event Space
घात	Power
घन	Cube
आयतन	Volume
घनमूल	Cube Root
चतुर्भुज	Quadrilateral
चाँदा	Protractor
चतुष्पदी व्यंजक	Tetranomial Expression
चल राशि	Variable
तिर्यक रेखा	Transversal
कटान बिन्दु	Point of Intersection
छूट	Discount

तथ्य/आँकड़ा	-	Data	वज्रगुणन पद्धति	-	Method of Cross Multiplcation
तुलनात्मक पद्धति	-	Method of Comparison			
त्रिभुज	-	Triangle	मूल	-	Root
त्रिपदी व्यंजक	-	Trinomial Expression	बीजगणितिक व्यंजक	-	Algebraic Expression
त्रैराशिक नियम	-	Rule of Three	वृत्त	-	Circle
लम्बाई	-	Length	वृत्ताकार	-	Circular
द्विपदी व्यंजक	-	Binomial Expression	वृत्तकला	-	Sector
द्विवीमीय	-	Two Dimentional	वृत की परिधि	-	Circumference of a circle
धनात्मक	-	Positive	वृत्ताकार चकती	-	Circular Disc
स्थिरांक	-	Constant	क्रमविनिमेय नियम	-	Commutative Law
आधार	-	Base	सम्मुखाभ्रिमुख कोण	-	Vertically Opposite Angle
नमूना देश	-	Sample space	व्यस्त समानुपाती	-	Inversely Proportional
घटता हुआ क्रम	-	Decreasing Order	वास्तविक संख्या	-	Real Number
वृत्ताकार चित्र	-	Pie chart	विषमबाहु त्रिभुज	-	Scalene Triangle
शुद्ध भिन्न	-	Proper Fraction	भुज्य	-	Side
पूर्णवर्ग	-	Perfect Square	बहिर्समद्वि भाजक	-	External Bisector
पूर्णांक	-	Integer	बहुपदी व्यंजक	-	Polynomial Expression
पूर्णघन	-	Perfect Cube	बहुपदी का शून्य	-	Zeros of a Polynomial
पाद	-	Quadrant	बहुपदी समीकरण	-	Polynomial Equation
प्रमाण	-	Proof	वहिस्थ कोण	-	Exterior Angle
प्रमाणित	-	Proved	वृहत्तर	-	Greater
क्षेत्र	-	Range	बहुभुज	-	Polygon
प्रतिशत आवृत्ति	-	Percentage Frequency	बढ़ाना	-	Subtraction
क्षेत्रमिति	-	Mensuration	अन्तर	-	Difference
आवृत्ति बहुभुज	-	Frequency Polygon	भाग	-	Division
विस्थापन विधि	-	Method of Substitution	भागफल	-	Quotient
परिवृत्त	-	Circum Circle	भागशेष	-	Remainder
परिकेन्द्र	-	Circum Centre	भिन्न	-	Fraction
परिअर्धव्यास	-	Circum Radius	भुज	-	Abscissa
पूरक कोण	-	Complementary Angle	भाज्य	-	Dividend
पूरक घटना	-	Complementary Event	भाजक	-	Divisor
चौड़ाई	-	Breadth	आधार	-	Base
विक्रय-मूल्य	-	Selling Price	गुरुत्वकेन्द्र	-	Centroid
वर्ग	-	Square	परिमेय संख्या	-	Rational Number
वर्गमूल	-	Square Root	मूल बिन्दु	-	Origin
वर्ग क्षेत्र	-	Square Region	मौलिक संख्या	-	Prime Number
वर्ग	-	Square	मौलिक गुणनखण्ड	-	Prime factor
वितरण निमय	-	Distributive Law	मिश्रण	-	Mixture
निश्चित चल	-	Discrete Variable	जोड़	-	Addition

योगफल	- Sum	एक रेखीय	- Collinear
रैखीक समीकरण	- Linear Equation	समद्विबाहु त्रिभुज	- Isosceles Triangle
रॉम्बस	- Rhombus	समबाहु त्रिभुज	- Equilateral Triangle
किरण	- Ray	समद्विभाजित करना	- Bisect
लेखाचित्र	- Graph	समद्विभाजक	- Bisector
अंश	- Numerator	संगामी	- Concurrent
लाभ	- Profit	क्रमहीन परीक्षा	- Random Experiment
लम्ब	- Perpendicular	सामान्य भिन्न	- Vulgar Fraction
लम्बबिन्दु	- Orthocentre	समानान्तर सरल रेखाएँ	- Parallel Lines
ल.स.प.	- Least Common Multiple (L.C.M.)	समीकरण	- Equation
		हल	- Solution
प्रतिशत	- Percentage	समानुपात	- Proportion
शून्य पद्धति	- Vanishing Method	हल करना	- Solve
श्रेणी सीमान्त	- Class-boundary	समानान्तर चतुर्भुज	- Parallelogram
श्रेणी अन्तर	- Class Interval	समकोण	- Right Angle
आवृत्ति	- Class Frequency	संपूरक कोण	- Supplementary Angle
श्रेणी सीमा	- Class Limit	समभावना	- Probability
शीर्ष बिन्दु	- Vertex	सरल करना	- Simplify
शीर्ष कोण	- Vertical Angle	सरल रेखा	- Straight Line
घातांक	- Index/Exponent	सरल रेखा-खण्ड	- Straightline Segment
सूत्र	- Formula	सीधासमानुपात	- Directly Proportional
स्वयंसिद्ध	- Axiom	अधिक कोण	- Obtuse Angle
स्तंभ लेखाचित्र	- Bar graph	ससिम दशमलव	- Terminating Decimal
संतुष्ट	- Satisfy	समबहुभुज	- Regular Polygon
उभयनिष्ट भुजा	- Common Side	गुण्यंक	- Coefficient
उभयनिष्ट खण्ड	- Common Factor	युगपत समीकरण	- Simultaneous Equations
संलग्न कोण	- Adjacent Angle	संख्या	- Number
स्थानांक	- Coordinates	व्यंजक	- Expression
सर्वांगसमता	- Congruence / Congruent	साहचर्य का नियम	- Associative Law
प्राकृतिक संख्या	- Natural Number	न्यून कोण	- Acute Angle
मूल सिद्धान्त	- Postulate	हर	- Denominator
समतुल्य भिन्न	- Equivalent Fraction	X-अक्ष	- X-axis
		Y-अक्ष	- Y-axis

आपका पन्ना

यह पुस्तक तुम्हें कैसी लगी? लिखकर, अंकित करके समझाओ :

आपका पन्ना

यह पुस्तक तुम्हें कैसी लगी? लिखकर, अंकित करके समझाओं :

यह पुस्तक तुम्हें कैसी लगी? लिखकर, अंकित करके समझाओ :

आपका पन्ना

यह पुस्तक तुम्हें कैसी लगी? लिखकर, अंकित करके समझाओं :

शिक्षण परामर्श

- राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रुपरेखा (NCF) - 2005 का परामर्श यह है कि शिक्षार्थी अपने विद्यालय जीवन और विद्यालय के बाहर के जीवन के साथ सर्वदा सम्पर्क स्थापित कर सके। यह नीति निर्देश करता है कि विद्यार्थी की शिक्षा केवल पुस्तक तक ही सीमित न रह जाय। केवल पुस्तक से शिक्षित होने पर विद्यार्थी का शिक्षा में विद्यालय, घर तथा समाज के अन्दर एक रिक्तता की रचना होती है। राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रुपरेखा के इस मुख्य नीति को आधार मानकर वर्तमान पाठ्यक्रम, पाठ्यसूची एवं पाठ्य पुस्तक को बनाया गया है। यह नीति यह भी परामर्श देती है कि विद्यार्थी की शिक्षा केवल विषय केन्द्रिक न हो। विभिन्न विषयों में जितना सम्भव हो वह सम्पर्क खोज पाये।
- आशा किया जा सकता है, शिक्षक/शिक्षिकाएं जब उस पाठ्य पुस्तक को व्यवहार करेंगे जितना सम्भव हो इस नीति एवं नीचे के परामर्शों का पालन करेंगे।
- वर्तमान समय में शिक्षा शिक्षार्थी केन्द्रिक है। शिक्षक/शिक्षिकाएं केवल सहायक है। अर्थात् शिक्षार्थी जो जन्म के बाद से ही घर, परिवेश, समाज से बहुत सीख जाता है शिक्षक/शिक्षिका यह ख्याल रखेंगे। किसी विषय के बारे में बतलाने से पहले शिक्षार्थी को पहले के अर्जित ज्ञान की ओर ख्याल रखकर सहायता करेंगे। शिक्षार्थी की चिन्ता या सोच किसी प्रकार रुक न जाय, वह स्वतंत्र ढंग तथा सोच के साथ जाय इस तरफ सर्वदा ध्यान रखेंगे।
- पाठ्य-पुस्तक शिक्षार्थी के शिक्षा में मात्र एक सहायक है। एक मात्र सहायक नहीं। शिक्षार्थी की शिक्षा आनन्ददायक हो इसके लिए विभिन्न प्रकार के शिक्षण उपकरण की सहायता लेने की जरुरत है।
- गणित की शिक्षा, शिक्षार्थी के परिचित परिवेश से कुछ वास्तव समस्या तैयार करके गणित के किसी अध्याय को शुरु करेंगे। उसके बाद सम्भव होने पर सक्रियता आधारित काम (Activity) के द्वारा उस अध्याय के विषय में शिक्षार्थी के मन में तर्क युक्त धारणा का जन्म दें। शिक्षार्थी की सोच तथा तर्क की स्वच्छता आने के पश्चात् ही वह विमूर्त को लेकर काम करता है।
- शिक्षक/शिक्षिका यह ध्यान रखे कि शिक्षार्थी पुस्तक से स्वयं कितने दूर तक एक अध्याय को सीख पाता है। जब वह उस अध्याय के किसी एक हिस्से को सीखने में बाधा प्राप्त करता है तभी वे उसे धीरे-धीरे सहायता करें जिससे वह समस्या के समाधान का रास्ता स्वयं खोज पाये।
- शिक्षक/शिक्षिका किसी अध्याय के विषय में शिक्षार्थी को इस प्रकार की कहानी कहेंगे जिससे शिक्षार्थी शुरु में कुछ समझ न पाये कि उसे कुछ सीखाया जा रहा है।
- दलगत शिक्षण शिक्षार्थी के लिए सीखन में यथेष्ट सहायक होता है। शिक्षक/शिक्षिका श्रेणी कक्ष में इसका ध्यान रखेंगे।
- वर्तमान शिक्षा में शिक्षार्थी को पाठदान या कुछ तत्थों की बतलाना नहीं, शिक्षार्थी ज्ञान का गठन कर सके इस तरह शिक्षक/शिक्षिका ध्यान रकेंगं। शिक्षार्थी के ज्ञान का गठित कर सकने से ही वह धीरे-धीरे अनेकों विषयों में से गणित खोजने लगेगा एवं गणित विषय उसके लिए आनन्ददायक बन जायेगा।
- शिक्षार्थी मन ही मन को सवाल कर सके (मानसांक) इस तरफ शिक्षक/शिक्षिका विशेष ध्यान रखेंगे। गणित के प्रत्येक अध्याय से शिक्षार्थी यदि मानसांक करना सीख ले तो शिक्षार्थी की सोच, तर्क तथा गणना करने की क्षमता बहुत जल्दी हो जायेगी।
- शिक्षार्थी गणित के किसी अध्याय को सीखते समय शिक्षक/शिक्षिका उस अध्याय के ऊपर यदि ऐसी एक तालिका बनाये जिससे उस अध्याय से शिक्षार्थी को सीखने के लिए जितनी सम्भावनायें होती है सब सीखता है। जैसे गुणनखण्ड के क्षेत्र में—

  1) बहुपदी संख्या रेखाओं की धारणा।

  2) एकपदी, द्विपदी, त्रिपदी इत्यादि बहुपदी संख्या रेखा की धारणा।

3) एकघात, द्विघात, त्रिघात इत्यादि बहुपदी संख्या रेखा की धारणा।

4) बहुपदी संख्या रेखा के शून्य की धारणा।

5) शून्य बहुपदी की धारणा।

6) बहुपदी संख्या रेखा का योग, वियोग, गुणा और भाग (शून्य के अलावा) धारणा इत्यादि।

- किसी भी अध्याय में कुछ Open ended प्रश्न रहना आवश्यक है।

a) कोई भी एक परिमेय संख्या लिखो।

b) प्रथम पाद के एक बिन्दु का स्थानांक लिखो।

c) दो वृत्तों के परिअर्द्धव्यास की लम्बाई लिखो, जिसमें वृत्ताकार क्षेत्र का अनुपात 4 : 9 है।

d) तीन सरल रेखा की लम्बाई लिखो, जिसके द्वारा गठित त्रिभुज के परिकेन्द्र त्रिभुज के भुजा के ऊपर स्थित है।

- इस प्रकार की संभावना शिक्षक/शिक्षिका स्वयं और बनाये तो शिक्षार्थी के सभी प्रकार के निरविच्छिन्न मूल्यांकन (CCE) में सुविधा होगी।
- गणित की किसी भी प्रक्रिया को शिक्षार्थी न समझकर मुखस्थ याद न कर ले। प्रत्येक प्रक्रिया को वह युक्ति एवं तर्क से समझ सके, क्यों होता है। शिक्षक/शिक्षिका इस तरफ विशेष ध्यान रखें।
- श्रेणी कक्ष में शिक्षक/शिक्षिका द्वारा दिया गया सवाल कोई शिक्षार्थी जल्दी-जल्दी हल करे, चुपचाप बैठे न रहे। जो शिक्षार्थी जल्दी ही अध्याय को समझ कर आगे जाता है शिक्षक/शिक्षिका उसको और कठिन से कठिनतर तर्क पर आधारित सवाल देकर आगे बढ़ा देगें और जो धीरे-धीरे आगे जा रहा है उसके धीरे-धीरे तर्क का विकास करके उस अध्याय में जो सामर्थ्य की कामना है उस पर पहुँचने में सहायता करें।

1. अखिल भारतीय बोर्ड एवं काउन्सिल का पाठ्यक्रम और पाठ्य सूची के बीच सामंजस्य बरकरार रखने के लिए नवम श्रेणी के पाठ्यक्रम और पाठ्य सूची में परिवर्त्तन किया गया है।
2. एकादश श्रेणी के गणित पाठ्यसूची के साथ सामंजस्य बरकरार रखने के लिए नवम् श्रेणी के गणित में विभिन्न नया अध्याय को जोड़ा गया है।
3. नवम् श्रेणी के '**गणित प्रकाश**' पुस्तक में अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिती तथा राशि विज्ञान का अध्याय अलग से नहीं है। क्योंकि, अंकगणित के एक अध्याय के साथ बीजगणित के एक अध्याय ज्यामिती के एक अध्याय के साथ परीमित एक अध्याय परस्पर युक्त है।जैसे समानान्तरिक क्षेत्रफल = भूमि × उच्चता अथवा त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times$ भूमि × उच्चता इस सूत्र को परिमित के प्रयोग के क्षेत्र में प्रयोग करने हेतु ज्यामितिक क्षेत्रफल सम्बंधित उपादानों को जानना जरूरी है। फिर अंक गणित की लाभ और हानि समस्या के समाधान के क्षेत्र में बीजगणितीय रैखिक समीकरण का समाधान जानना जरूरी है। अर्थात् विद्यार्थी किसी भी सूत्र या फार्मूला को याद करने की विद्या (Rote Learning) के ऊपर निर्भर न हो, ऐसा प्रयोग करना होगा। इसलिए गणित के विभिन्न शाखा के अध्यायों को उसी अनुरूप में सजाया अथवा निर्धारित किया गया है।
4. परिशिष्ट सेट तत्त्व और सम्भावना तत्त्व को संयोजित किया गया है, जो नवम् श्रेणी के मूल्यांकन के अन्तर्गत नहीं है लेकिन समस्त विद्यार्थी विभिन्न प्रतियोगितामूलक परीक्षा में आग्रही होते है वे स्वयं पाठ्य पुस्तक को पढ़कर कुछ ज्ञान अर्जित करेगें और वही अर्जित ज्ञान ही प्रतियोगितामूलक परीक्षा में प्रयोग करेगें।
5. पाठ्य पुस्तक के प्रत्येक अध्याय में पहले न देकर अन्त में बहुविकल्प आधारित प्रश्न एवं उत्तर आधारित प्रश्न दिया गया है, क्योंकि विद्यार्थीयों को इससे बड़ी (कठिन) समस्या के समाधान करने में अध्याय से सम्बधित धारणा पूरी होती है एवं इसके पश्चात् वे शीघ्रता से समस्या का समाधान कर सकता है।
6. श्रेणी कक्ष तथा वास्तव की समस्याओं को समझकर शिक्षक/शिक्षिका स्वयं शिक्षार्थी को तर्कपूर्ण आनन्ददायक शिक्षा के लिए पाठ्य-पुस्तक को किस तरह से और भी अच्छी तरह से किस प्रकार व्यवहार किया जा सकता है उसका भी परामर्श देंगे।

पाठ परिकल्पना

महीना	विषय
January	1. वास्तविक संख्या (Real Numbers) 2. घातांक के नियम (Laws of Indices)
February	3. लेखाचित्र (Graph) 4. स्थानांक ज्यामिति : दूरी निकालने का सूत्र (Co-ordinate Geometry : Distance Formula)
March	5. सरल युगपत समीकरण (दो चलराशि युक्त) (Linear Simultaneous Equations) 6. सामानान्तर चतुर्भुज के गुण (Properties of Parallelogram)
April	7. बहुपदी व्यजंक (Polynomial) 8. गुणनखण्ड करना (Factorisation)
May	9. तिर्यक और मध्य बिन्दु युक्त प्रमेय (Transversal & Mid-Point Theorem) 10. लाभ और हानि (Profit and Loss)
June	11. सांख्यिकी (Statistics)
July	12. क्षेत्रफल वाले प्रमेय (Theorems on Area) 13. निर्मेय : (Construction) 14. निर्मेय : चतुर्भुज के समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों का अंकन (Construction)
August	15. त्रिभुज और चतुर्भुज की परिसीमा और क्षेत्रफल (Area & Perimeter of Triangle & Quadrilateral). 16. वृत्त की परिधि (Circumference of Circle)
September	17. संगामी रेखाओं वाले प्रमेय (Theorems on concurrence) 18. वृत्त का क्षेत्रफल (Area of Circle)
October	19. स्थानांक ज्यामिति : सरल रेखा-खण्ड का अन्त:विभाजन और बहिर्विभाजन (Co-ordinate Geometry: Internal and External Division of Straight Line Segment) 20. स्थानांक ज्यामिति : त्रिभुजाकृति क्षेत्र का क्षेत्रफल (Co-ordinate Geometry: Area of Triangular Region)
November	21. लॉगरिथ्म (Logarithm)