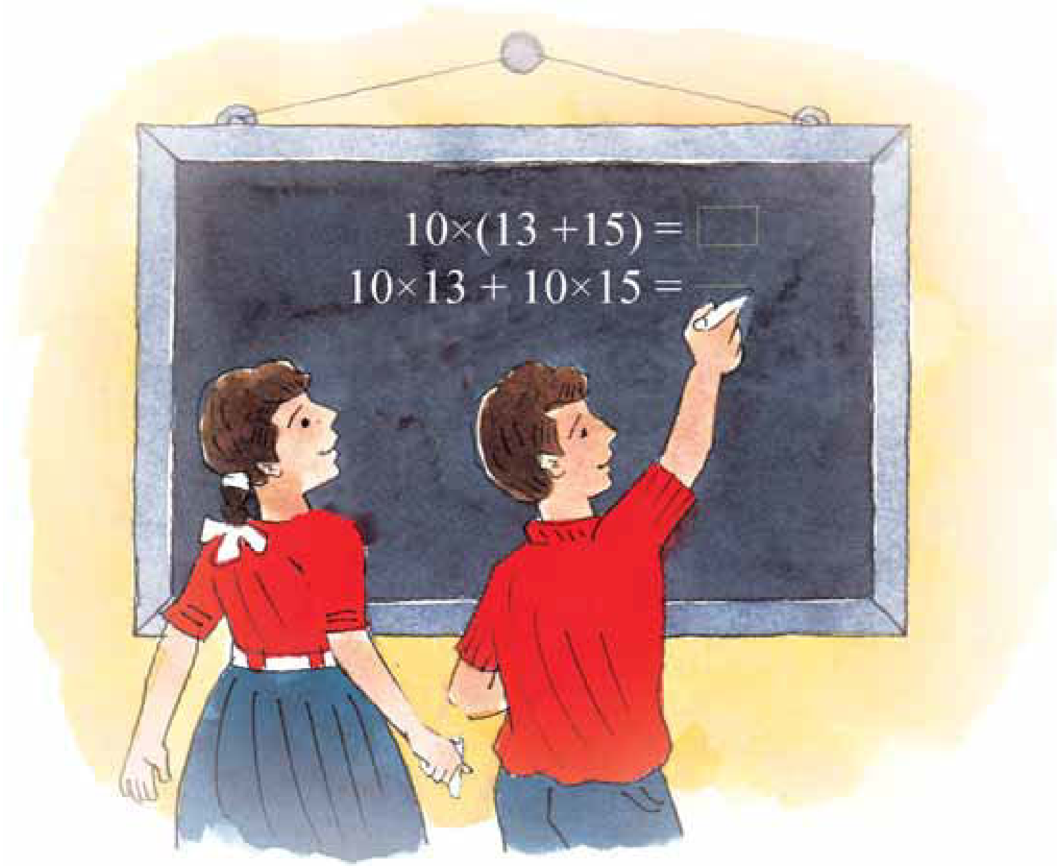
गणित प्रभा

सप्तम श्रेणी



पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद

प्रथम संस्करण : जनवरी, 2014
द्वितीय संस्करण : दिसम्बर, 2014

पुस्तक अधिकार : पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद

प्रकाशक :
प्राध्यापिका नवनीता चटर्जी
सचिव, पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद
77/2, पार्क स्ट्रीट, कोलकाता – 700 016

मुद्रक :
वेस्ट बेंगल टेक्सबुक कारपोरेशन
(पश्चिमबंग सरकार का उपक्रम)
कोलकाता – 700 056

सत्यमेव जयते

भारतीय संविधान

प्रस्तावना

हम, भारत के लोग, भारत के एक संपूर्णप्रभुत्वसंपन्न धर्मनिरपेक्ष समाजवादी लोकतंत्रात्मक गणराज्य बनाने के लिए तथा उसके समस्त नागरिकों को न्याय— सामाजिक, आर्थिक और —राजनीतिक, स्वतंत्रता, विचार की अभिव्यक्ति की, विश्वास की धर्म एवं पूजा की समानता- प्रतिष्ठा एवं अवसर की समता प्राप्त करने के लिए तथा उन सब में, भ्रातृत्व- जिसमें व्यक्ति की गरिमा और राष्ट्र की एकता सुनिश्चित रहे का वर्धन करने के लिए इस संविधान सभा में आज **26** नवम्बर **1949** को इसके द्वारा इस संविधान को स्वीकार करते है, कानून का रूप देते हैं और अपने-आप को इस संविधान को अर्पण करते है।

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC and to secure to all its citizens : JUSTICE, social, economic and political; LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship; EQUALITY of status and of opportunity and to promote among them all – FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation; IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November 1949, do HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.

भूमिका

राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रूपरेखा 2005 एवं शिक्षा अधिकार कानून 2009 इन दोनों को महत्त्व देते हुए वर्ष 2011 में पश्चिम बंगाल के नेतृत्व में गठित '**विशेषज्ञ समिति**' के विद्यालय स्तर का पाठ्यक्रम, पाठ्यसूची एवं पाठ्य-पुस्तकों की समीक्षा और पुनर्विवेचना का दायित्व दिया गया। इस समिति के विषय विशेषज्ञ के अथक प्रयत्न एवं परिश्रम से इस पुस्तक को तैयार कर पाना सम्भव हो सका है।

इस गणित की पुस्तक में सप्तम श्रेणी के पाठ्यसूची के अनुसार ही प्रणयन और नामकरण किया गया। '**गणित प्रभा**'। इस पुस्तक में गणित की भाषा में समाधान करने की प्रचलित अवधारणा को अपनाया गया है, जिससे गणित की भाषा में भाषातंरित समस्या को देखकर विद्यार्थी आसानी से समझ पाए कि संश्लिष्ट समस्या में किस गणित की प्रक्रिया, सूत्र अथवा पद्धति के प्रयोग करने की जरुरत है।

अंकगणित, बीजगणित और ज्यामिती विषयों को सुन्दर और सहज भाषा में इस तरह से बतलाया गया है कि जिससे समस्त विद्यार्थियों के समाधान करने में सफलता हासिल करने के उद्देश्य को भली-भाँति इस पुस्तक में प्रसारित किया गया है।

विभिन्न शिक्षक, शिक्षाप्रेमी, शिक्षाविद, विषय विशेषज्ञ और अलंकरण के लिए प्रसिद्ध कलाकार-जिनके निरंतर श्रम एवं अथक प्रयास से इस महत्त्वपूर्ण पुस्तक को तैयार करना सम्भव हो सका। उन सभी को पर्षद की ओर से आंतरिक धन्यवाद और कृतज्ञता ज्ञापित करता हूँ।

पश्चिमबंग सर्वशिक्षा मिशन की सहायता से यह पुस्तक छात्र-छात्राओं को बिना मूल्य के वितरण की जाएगी। इस परियोजना को कार्यान्वित करने के लिए पश्चिम बंगाल सरकार का शिक्षा विभाग, पश्चिमबंग शिक्षा अधिकार एवं पश्चिम बंगाल सर्व शिक्षा मिशन ने विभिन्न प्रकार से सहायता की है। उनकी भूमिका को अनदेखा नहीं किया जा सकता है।

आशा करता हूँ कि पर्षद द्वारा प्रकाशित इस '**गणित प्रभा**' पुस्तक विद्यार्थियों में विज्ञान विषय के प्रति आकर्षित करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका का पालन करेगी और माध्यमिक स्तर पर गणित चर्चा का मान उन्नयन करने में सहायक होगा। इससे छात्र-छात्राएं लाभान्वित होगे। इस तरह से ही पर्षद की सामाजिक प्रतिबद्धता सार्थक होगी।

समस्त शिक्षाप्रेमी, शिक्षक-शिक्षिका और संश्लिष्ट सभी से मेरा विनित अनुरोध है कि आप अपने बहुमूल्य परामर्श एवं सुझाव देने का प्रयास करें ताकि आगामी दिनों में आने वाले संस्करण में संशोधन किया जा सके। इस पुस्तक के जरिए मान उन्नयन होगा और छात्र-छात्राएँ लाभाविन्त होगे। अंग्रेजी में एक कहावत है— 'even the best can be bettered' पुस्तक की उत्कृष्टता के लिए शिक्षक समाज और विद्वान व्यक्तियों के विचार एवं परामर्श को हमेशा ग्रहण करेंगे।

जुलाई, 2014
77/2 पार्क स्ट्रीट
कोलकाता 700 016

कल्याणमय गांगुली
प्रशासक
पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद

प्राक्कथन

पश्चिम बंगाल की माननीया मुख्यमंत्री सुश्री ममता बनर्जी ने 2011 में विद्यालय की शिक्षा के लिए एक 'विशेषज्ञ समिति' का गठन किया। इस विशेषज्ञ समिति को यह दायित्व दिया गया कि विद्यालय स्तर के समस्त पाठ्यक्रम, पाठ्सूची एवं पाठ्य-पुस्तक की पुनः पुनर्विवेचना एवं पुनर्विन्यास प्रक्रिया को संचालित करें। उस समिति की सिफारिश के अनुसार नवीन पाठ्यक्रम, पाठ्यसूची एवं पाठ्य-पुस्तक तैयार किया गया। इस पूरी प्रक्रिया में राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रूपरेखा 2005 शिक्षा अधिकार नियम 2009 (RTE, 2011) इन दोनों को ध्यान में रखा गया है। इसके साथ ही साथ समग्र परिकल्पना में रवीन्द्रनाथ ठाकुर के शिक्षा दर्शन की रूपरेखा को आधार के रूप में ग्रहण किया है।

उच्च माध्यमिक स्तर पर गणित की पुस्तक का नाम '**गणित प्रभा**' है। पुस्तक में क्रम से गणित की समस्या के समाधान की पद्धति को बतलाया गया है। विद्यार्थियों की सुविधा के लिए प्रत्येक क्षेत्र में यत्नपूर्वक मौलिक अवधारणाओं को सरल भाषा एवं स्वयं करों पद्धति के जरिए दर्शाया गया है। 'गणित' विषय के वैचित्र्यमय एवं आकर्षणीय बनाने के प्रयास को पुस्तक में सहजता से देखा जा सकता है। विद्यार्थियों के प्रायोगिक सामर्थ्य वृद्धि की ओर भी ध्यान दिया गया है। आशा करता हूँ कि शिक्षा जगत् में यह पुस्तक प्रशंसनीय होगा। इस 'गणित प्रभा' पुस्तक को नवीन शैक्षणिक वर्ष (2014) में पश्चिमबंग सर्व शिक्षा मिशन की सहायता से राज्य के समस्त छात्र-छात्राओं को बिना मूल्य वितरण किया जाएगा।

चयनित शिक्षाविद शिक्षक-शिक्षिका एवं विषय विशेषज्ञों ने अल्प समय में इस पुस्तक को प्रस्तुत करने का प्रयास किया है। पश्चिम बंगाल के माध्यमिक शिक्षा व्यवस्था के विद्वत लोगों ने पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद के पाठ्य-पुस्तक का अनुमोदन कर हमें कृतज्ञ किया है समय-समय पर पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद, पश्चिम बंगाल सरकार का शिक्षा विभाग, पश्चिम बंगाल सर्व शिक्षा अभियान एवं पश्चिम बंगाल शिक्षा अधिकार ने जो सहायता प्रदान किया है, उन्हें भी धन्यवाद देना चाहूँगा।

पश्चिम बंगाल के माननीय शिक्षा मंत्री डॉ. पार्थ चटर्जी ने आवश्यक विचार एवं परामर्श देकर हमें कृतज्ञ किया है। उनके प्रति अपनी कृतज्ञता व्यक्त करते है।

पुस्तक की उत्कृष्टता के लिए शिक्षा अनुरागी लोगों के विचार -परामर्श को हम सादर ग्रहण करेंगे।

জুলাই, 2014
निवेदिता भवन, पंचम तल्ला
विधाननगर, कोलकाता - 700 091

অভীক মজুমদার
चेयरमैन
विशेषज्ञ समिति
विद्यालय शिक्षा विभाग
पश्चिम बंगाल सरकार

विशेषज्ञ समिति द्वारा संचालित पाठ्य-पुस्तक प्रणयन पर्षद

निर्माण और परिकल्पना

प्राध्यापक अभीक मजूमदार (चेयरमैन, विशेषज्ञ समिति)

प्राध्यापक रथीन्द्रनाथ दे (सदस्य सचिव, विशेषज्ञ समिति)

शंकरनाथ भट्टाचार्य

सुमना सोम

तपसुन्दर बन्दोपाध्याय

मलय कृष्ण मजूमदार

पार्थ दास

प्रदूत्त पाल

आवरण और अलंकरण

देवाशीष राय

मुद्रण

विप्लव मण्डल

सहयोग

अनुपम दत्त, पिनाकी दे

विषय सूची

अध्याय	विषय	पृष्ठ
1	पूर्व पाठों की पुनरावृत्ति	1
2	अनुपात	22
3	समानुपात	34
4	पूर्ण संख्याओं का जोड़, घटाव, गुणा और भाग	46
5	सूचकों की धारणा	70
6	बीजगणितीय प्रक्रिया	77
7	कम्पास की सहायता से निर्दिष्ट कोण बनाना	110
8	त्रिभुज बनाना	117
9	सर्वांगसमता की धारणा	126
10	आसन्न मान	129
11	भिन्नों का वर्गमूल	134
12	बीजगणितीय सूत्रावली	146
13	समानान्तर सरल रेखा कटान बिन्दुओं की धारणा	168
14	त्रिभुज की विशेषताएँ	172
15	समय और दूरी	178
16	द्विस्तंभ लेख	189
17	आयत क्षेत्र और वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल	196
18	प्रतिसाम्य	209
19	उत्पादकों का विश्लेषण	219
20	चतुर्भुज का वर्ग विभाजन	229
21	चतुर्भुज बनाना	240
22	समीकरणों का गठन और समाधान	250
23	मजेदार अंक	266
24	मिलाकर देखें (उत्तरमाला)	275

1. पूर्व पाठों की पुनरावृत्ति

आज हम मैदान में पेड़ के नीचे बैठकर चित्र बनायेंगे। चन्द्रा बहुत सुन्दर चित्र नहीं बना सकती है। लेकिन बहुत सुन्दर ढंग से रंग करती है। अतः वह हमारे बनाये गए चित्रों के कुछ अंशों को रंगेगी।

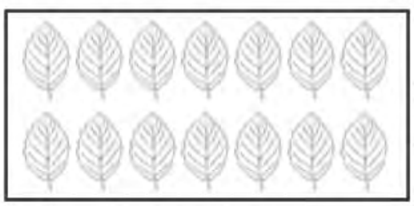
मैनें बनाया

इस चित्र के गेंदों के कुल संख्या के $\frac{1}{4}$ भाग गेंदों को चन्द्रा ने रंग किया।

चन्द्रा ने रंग किया

$\frac{1}{4}$ भाग गेंदों को मैंनें स्वंय रंगा।

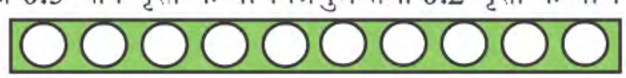
इन चित्रों के फूलों के कुल संख्या का $\frac{1}{3}$ भाग को लाल रंग से रंग किया। स्वंय रंग किया



इस चित्र के पत्तों की कुल संख्या का $\frac{1}{7}$ भाग पत्तों को हरा रंग किया । स्वंय रंग किया।

लेकिन महिम ने बहुत से वृत्तों को बनाया —

मैं महिम के बनाये वृत्तों की संख्या का 0.5 भाग वृत्तों के बीच त्रिभुज तथा 0.2 वृत्तों के बीच चतुर्भुज बनाया — [जैसे :— △ □]



इसका $\frac{1}{3}$ भाग रुपये [ ] मैंने स्वंय बनाया।

तथागत केवल एक फाँका मैदान बनाया

इस चित्र को 6 बालक-बालिकाओं ने बनाया जिनका $\frac{1}{3}$ भाग बालिकाओं ने स्वंय बनाया।

स्वंय करें 1.1

1) 1रुपया का $\frac{1}{2}$ भाग = ☐ पैसा।

2) 1 वर्ष का $\frac{1}{4}$ भाग = ☐ महीने।

3) 4 रुपये का $\frac{5}{8}$ भाग = ☐ रुपये ☐ पैसे।

4) 2 कि०ग्रा० का $\frac{1}{5}$ भाग = ☐ ग्राम।

5) 5 लीटर 2 डेसीलीटर का $\frac{1}{2}$ भाग = ☐ लीटर ☐ डेसीलीटर

6) एक संख्या के $\frac{1}{3}$ भाग के साथ 20 जोड़ने पर 35 होता है। वह संख्या कितनी होगी, बतलाओ।

7) हिसाब करके बताओ कि $\frac{5}{7}$ के 2 गुना के साथ कितना जोड़ने पर 3 होगा।

8) $\frac{5}{7}$ के साथ किस संख्या से गुणा करने पर 4 मिलेगा।

9) $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$ तथा $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ इनमें से कौन सी संख्या सबसे छोटी है।

10) $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{3}$ तथा $\frac{5}{2} \times \frac{7}{3}$ इनमें से कौन सी संख्या सबसे बड़ी है।

1 उज्जवल बाबू ऑफिस से 50,000 रुपये पाये। उन्होंने आधा रुपये अपने मुहल्ले के प्राथमिक विद्यालय के विकास के लिए दान दिया। बाकी रुपये का $\frac{1}{5}$ भाग बगीचे को घेरने में खर्च किया। शेष रुपये का आधा रुपया अपने पत्नी के नाम पर बैंक में स्थायी रूप से जमा किया एवं बाकी आधा अपने नाम से पोस्ट ऑफिस में जमा किए। तो उज्जवल बाबू ने कहाँ कितना रुपये दिए या रखे। बतलाओ ?

प्राथमिक विद्यालय में दान किए 50,000 रुपये का आधा

$$= 50,000 \text{ रुपये का } \frac{\square}{\square} \text{ भाग}$$

$$= \overset{25,000}{\cancel{50,000}} \times \frac{\square}{\square} \text{ रुपये}$$

$$= 25,000 \text{ रुपये}$$

बाकी बचा, (50,000 — 25,000) रुपये = 25,000 रुपये

बाकी रुपये का $\frac{1}{5}$ भाग = $\square \times \frac{\square}{\square}$ रुपये = $\square$ रुपये = 25,000 रुपये का $\frac{1}{5}$

∴ बगीचा को घेरने में खर्च हुआ $\square$ रुपये

शेष रुपये = (25,000 — 5,000) रुपये = 20,000 रुपये।

शेष रुपये का आधा = $\square$ रुपये का आधा

$$= \square \text{ रुपये} \times \frac{\square}{\square}$$

$$= \square \times \frac{\square}{\square} \text{ रुपये}$$

$$= \square \text{ रुपये}$$

∴ उज्जवल बाबू ने स्त्री के नाम से बैंक में स्थायी रुप से जमा किए $\square$ रुपये।

एवं अपने नाम से पोस्ट ऑफिस में जमा किए $\square$ रुपये।

दूसरे महीने में उज्जवल बाबू ने कुछ और रुपये प्राप्त किए। उसने इस रुपये का $\frac{1}{6}$ भाग गाँव के दातव्य चिकित्सालय में दान किए। उसने 5,000 रुपये दातव्य चिकित्सालय में दान दिया था। अतः दूसरे महीने में उन्होंने कितना रुपया पाया था, बतलाओ ?

माना कुल रुपया = 1 भाग

उज्जवल बाबू के रुपये का $\frac{1}{6}$ भाग = 5,000 रुपये

$\therefore$ उज्जवल बाबू के रुपये का 1भाग = $(5,000 \div \frac{1}{6})$ रुपये

= $\square \times \square$ रुपये

= 30,000 रुपये

$\therefore$ अतः उज्जवल बाबू दूसरे महीने ऑफिस से 30,000 रुपये पाये थे।

बनाकर देखें 1.1

1. सितारा बेगम के दुकान में 60 अमरूद थे। उसने कुल अमरूद का $\frac{1}{4}$ भाग बेच दिया। अब उसके पास कितना अमरूद बचा, बतलाओ ?
2. माँ ने मुझे 60 रुपये का $\frac{5}{6}$ भाग, भैया को 45 रुपये का $\frac{5}{9}$ भाग दिया। तो माँ ने किसे अधिक रुपये दिए। बतलाओ ?
3. गणेश बाबू ने तीन दिन में एक काम का क्रमशः $\frac{3}{14}$, $\frac{4}{7}$ और $\frac{1}{21}$भाग खत्म किया। उसने तीन दिन में कुल कितना भाग काम खत्म किए एवं कितना भाग काम बाकी रहा। बतलाओ ?
4. एक बाँस के लम्बाई का $\frac{1}{3}$ भाग लाल रंग, $\frac{1}{5}$ भाग हरे रंग तथा बाकी 14 मीटर पीले रंग से रंग किया गया। बाँस की लम्बाई कितना मीटर है बतलाओ।
5. एक कॉपी का मूल्य 6.50 रुपये हो, तो 15 कॉपियों का मूल्य कितना होगा ?
6. एक बक्सा में चीनी के 12 पॉकेट है। प्रत्येक पॉकेट का वजन 2.84 कि॰ग्रा॰ है। बक्सा सहित कुल पैकटों का वजन 36 कि॰ग्रा॰ हो, तो बतलाओ कि बक्सा का वजन कितना है।
7. एक बोरा चावल के परिमाण का 0·75 भाग चावल का मूल्य 1800 रुपये है तो उसके 0·15 भाग का मूल्य बताओ ?
8. अनिता दीदी ने अपने जमीन के परिमाण के आधा भाग का $\frac{7}{8}$ भाग अपने भाई को दिया एवं बाकी जमीन अपने तीन बेटों में बराबर बाँट दिया। प्रत्येक लड़का जमीन का कितना भाग पाया उसे एक चित्र की सहायता से दिखलाओं।

9. सरल करो :—

(i) $\frac{13}{25} \times 1\frac{7}{8}$ (ii) $2\frac{5}{8} \times 2\frac{2}{21}$ (iii) $10\frac{3}{10} \times 6\frac{4}{3} \times \frac{4}{11}$

(iv) $0{\cdot}025 \times 0{\cdot}02$ (v) $0{\cdot}07 \times 0{\cdot}2 \times 0{\cdot}5$ (vi) $0{\cdot}029 \times 2{\cdot}5 \times 0{\cdot}002$

10. सरल करो :—

(i) $3\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{50}{51} \div 15$ (iii) $1 \div \frac{5}{6}$

(iv) $\frac{156}{121} \div \frac{13}{22}$ (v) $1\frac{1}{2} \div \frac{4}{9} \div 13\frac{1}{2}$ (vi) $\frac{9}{10} \div \frac{3}{8} \times \frac{2}{5}$

(vii) $2\frac{1}{3} \div 1\frac{1}{6} \div 2\frac{1}{4}$ (viii) $20 \div 7\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$ (ix) $3{\cdot}15 \div 2{\cdot}5$

(x) $35.4 \div 0.03 \times 0.06$ (xi) $2.5 \times 6 \div 0.5$

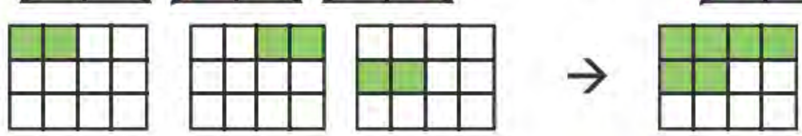
11. चित्र देखकर गुणा करो एवं रंग भरो :—

(i)

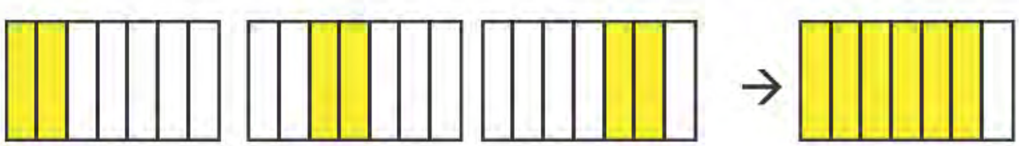
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(ii)

(iii)



(iv)



सरल नहीं वयस्त अनुपात खोजे

2 इसबार छुट्टी में हमलोग पुरी घुमने जायेंगे। इसलिए पिताजी ने 920 रुपये में 4 टिकट खरीद कर लाया। मेरे तीन मित्र भी हमलोगों के साथ घूमने जाना चाहते हैं।

हमलोग कुल (4 + 3) लोग = 7 लोग जायेंगे।

और तीन टिकट कटाना होगा
3 टिकट का मूल्य कितना होगा देखें

गणित की भाषा में समस्या हुई

टिकट की संख्या	दाम (रु०)
4	920
3	?

टिकट की संख्या और टिकट का मूल्य □ में सम्पर्क है। क्योंकि अधिक टिकट के लिए □ रुपये लगेगें।

ऐकिक नियम से हल करने पर हम पाते है,

4 टिकट का मूल्य 920 रु०

1 टिकट का मूल्य $\frac{920}{4}$ रु०

3 टिकट का मूल्य $\frac{\overset{230}{\cancel{920}}}{\cancel{4}} \times 3$ रुपये = 690 रुपये होगा।

3 किसी सम्पत्ति के परिमाण का $\frac{9}{10}$ भाग का मूल्य 6543 रुपये है तो उस सम्पत्ति के परिमाण के $\frac{1}{2}$ भाग का मूल्य कितना होगा ?

गणित की भाषा में समस्या हुई,

सम्पत्ति का परिमाण (भाग)	मूल्य
$\frac{9}{10}$	6543
$\frac{1}{2}$	?

सम्पत्ति का भाग बढ़ने से मूल्य □, अतः सम्पत्ति के भाग के साथ मूल्य का □ सम्पर्क है।

∴ ऐकिक नियम से हल करने पर हम पाते हैं, सम्पत्ति के $\frac{9}{10}$ भाग का मूल्य 6543 रुपये

1 भाग का मूल्य $\square \div \frac{\square}{\square}$ रुपये = $\square \times \frac{\square}{\square}$ रुपये

$\frac{1}{2}$ भाग का मूल्य $\square \times \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square}$ रुपये = 3635 रुपये

4 6 व्यक्ति 7 दिनों में एक काम पूरा करते हैं, उसी काम को 21 दिन में समाप्त करने के लिए कितने लोगों की जरूरत पड़ेगी।

गणित की भाषा में समस्या हुई,

समय (दिनो की संख्या)	लोग (संख्या)
7	6
21	?

दिनों की संख्या से लोगों की संख्या का संबंध □।

एक निदिष्ट काम के लिए दिनों की संख्या बढ़ने पर लोग □ लगते हैं?

ऐकिक नियम से हल करने पर हम पाते हैं —

एक काम 7 दिनों में खत्म करते है 6 लोग

उसी काम को 1 दिन में खत्म करते है 6 × □ लोग

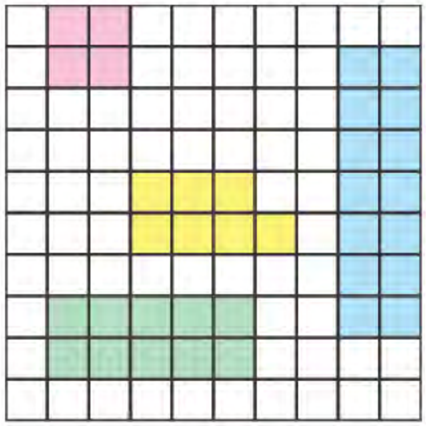
अत: काम 21 दिनों में करेंगे $\frac{\square \times \square}{\square}$ लोग

∴ उस काम को 21 दिनों में खत्म करने के लिए 2 लोगों की जरुरत पड़ेगी।

स्वंय करो 1.2

1) एक चक्का 55 बार घूमने पर 77 मीटर रास्ता तय करता है, 98 मीटर रास्ता तय करने के लिए कितनी बार चक्का घूमेगा, बतलाओ?
2) दीप्तार्क प्रत्येक सप्ताह में एक दिन तैरना सीखता है, 364 दिन में वह कुल कितने दिन में तैरना सीखेगा, निकालें।
3) कविता को 120 पन्नों की जरूरत हैं, प्रत्येक दिस्ता में 24 पन्ने है, कविता कितने दिस्ता कागज खरीदेगी, निकालेंगे।
4) एक दर्जन अंडे का मूल्य 48 रुपये होने पर 32 अंडे का मूल्य कितना होगा हिसाब करके देखें।
5) प्रतिदिन 5 घंटा काम करके एक काम को 30 दिन में खत्म किया जा सकता है। प्रत्येक दिन 6 घंटा काम करने पर उस काम को कितने दिन में खत्म किया जायेगा?
6) किसी सम्पत्ति के परिमाण का $\frac{5}{7}$ भाग का मूल्य 2825 रुपये है। उस सम्पत्ति के $\frac{3}{7}$ भाग का मूल्य कितना होगा? हिसाब करके देखो।
7) एक शिविर में 48 सैनिकों के लिए 7 सप्ताह की भोजन सामग्री है। यदि उस दल में और 4 सैनिक शामिल हो गए तो वह भोजन कितने सप्ताह चलेगा निकालो।
8) एक जहाज पर 50 नाविकों के लिए 16 दिन का खाना मौजूद है। 10 दिन के पश्चात् और 10 नाविक उनके साथ शामिल हो गए। बाकी दिनों का बचा खाना कितने दिनों तक चलेगा, हिसाब करेगे?
9) 20 लोगों ने तय किया कि वे लोग 30 दिन में एक मकान की मरम्मत का काम पूरा कर देंगे। लेकिन 6 दिन के पश्चात् 8 लोग अस्वस्थ हो गए। हमें निकालना होगा कि बाकी बचे मकान को कितने दिन में मरम्मत कर देंगे।
10) 25 किसान 12 दिन में 15 बीघा जमीन को जोत देते है तो हमें निकालना होगा कि 30 किसान 16 दिन में कितना बीघा जमीन जोत पायेंगे।

नीचे 100 समान घरों (वर्ग) के विभिन्न भागों को रंग करें :



लाल रंग दिए है, 100 भाग के 4 भाग में

$= \frac{4}{100}$ अंश

= 0.04 अंश में

= सौ में से 4 या 4% घर में,

पीला रंग दिए है, 100 भागो का □ भाग

$= \frac{\square}{\square}$ भाग

= सौ में □ या □ % घर में

हरा रंग दिए है, 100 भाग का □ भाग

$= \frac{\square}{\square}$ भाग में

= सौ में □ या □ % घर में

नीला रंग दिए है, 100 भाग में = □ भाग में

$\frac{\square}{\square}$ भाग में

= सौ में □ या □ % घर में

खाली घरों को भरों :

भिन्न	दशमलव भिन्न	सौ में कितना
$\frac{6}{100}$	0.06	6
$\frac{26}{100}$	□	□
$\frac{15}{100}$	□	15
□	□	81
$\frac{3}{5}$	□	$\frac{3}{5} \times 100 = \square$
$\frac{7}{25}$	□	$\square = \square$
$\frac{7}{15}$	□	$\frac{7}{15} \times \square = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{3}$
$\frac{8}{35}$	□	$\square = \square$
□	0.25	□
□	0.135	□

आज सुबह से ही बहुत वर्षा हो रही है, तपन ने सोचा था कि वह स्कूल नहीं जायेगा। किन्तु स्कूल न जाने पर तपन को अच्छा नहीं लगता है। अत: वह छाता ओढ़कर वह किसी तरह से स्कूल गया। रास्ते पर काफी पानी जमा हुआ था। बहुत से लोग स्कूल नहीं आ सके थे। कुछ लोग वर्षा में भींग गए थे अत: वे लोग घर लौट गए।

5 स्कूल में मेरी कक्षा के 30 छात्र आये हैं। हमारे कक्षा में कुल छात्र–छात्राओं की संख्या 60 है। हम कितने प्रतिशत स्कूल आए है हिसाब करके देखते हैं।

60 छात्रों में से आये है 30 छात्र

1 छात्रों में से आये हैं $\frac{30}{60}$ छात्र

100 छात्रों में से आये हैं $\frac{\square}{\square} \times \square$ छात्र = 50 छात्र

∴ अत: आज हमारे कक्षा में उपस्थित छात्रों की संख्या का प्रतिशत 50 या 50%

किन्तु कल हमारे कक्षा में अनुपस्थित छात्र 25% थे।

अत: हिसाब करके देखे कि कल कितने छात्र नहीं आये थे।

25% प्रतिशत अनुपस्थित थे।

अर्थात्

100 छात्रों में से अनुपस्थित थे 25 छात्र

1 छात्र में से अनुपस्थित थे $\frac{\square}{\square}$ छात्र

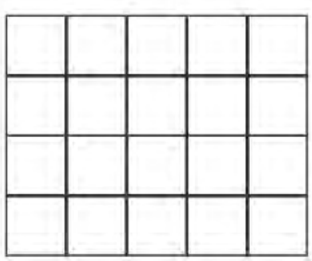
60 छात्रों में से अनुपस्थित थे $\frac{\square}{\square} \times \square$ छात्र

= 15 छात्र

∴ कल हमारे कक्षा में 15 छात्र अनुपस्थित थे।

बनाकर देखें - 1.2

1. (i) 2 रुपये का $12\frac{1}{2}$% कितना होगा। (ii) 840 ग्राम का 30% कितना?
   (iii) 25 रुपये का 8% कितने रुपये। (iv) 55 ग्राम, 5 कि०ग्रा० का कितना प्रतिशत है
   (v) 1·25 रुपया 5 रुपये का कितना % है। (vi) 16 लीटर 1000 लीटर का कितना % है।
2. एक मकान का $\frac{1}{5}$ भाग रंग किया गया है। घर का कितना प्रतिशत रंग करना बाकी है, हिसाब लगाएँ।
3. नूरजहाँ के कक्षा में 30% छात्राएँ है। कुल छात्र-छात्राओं की संख्या 60 है। हिसाब करके देखे कि नूरजहाँ के कक्षा में कुल कितने छात्र है।
4. 120 कि०ग्रा० मिश्रित खाद्य में यूरिया तथा पोटाश का परिमाण क्रमश: 60% तथा 40%। है। तो उस खाद्य में कितना कि०ग्रा० यूरिया तथा पोटाश है, निकाले।
5. मेरे विद्यालय के एक कॉपी का मूल्य 10 रुपये था अभी वही कॉपी मैनें 12 रुपये में खरीदा। हिसाब करके देखना है कि कॉपी का मूल्य कितना प्रतिशत बढ़ गया।
6. सुमित्रा के घर से स्कूल जाने का बस भाड़ा 4 रुपये था। अब उसे स्कूल जाने के लिए बस भाड़ा 6 रुपये देना पड़ता है, तो कितना प्रतिशत भाड़ा बढ़ गया।
7. चीनी का दाम बढ़ने के पहले 125 रुपये में जितना चीनी खरीदा जाता था, लेकिन अभी 150 रुपये में खरीदना पड़ता है। अभी कितना प्रतिशत चीनी का दाम बढ़ गया है।
8. रोजिना 1 दिन में 90 हिसाब बनाती है। शेफाली उसी समय में 65 हिसाब बनाती है। अत: उस समय में रोजिना ने शेफाली से कितना प्रतिशत हिसाब बनायी। उसी समय में शेफाली ने रोजिना से कितना प्रतिशत कम हिसाब बनाया।
9. नीचे के कुल छोटे घरों का 10% घर लाल रंग एवं 40% घर पीले रंग से रंग करो?



सूबीर और मासूम ने आज तय किया है कि वे दोनों नया खेल तैयार करेंगे। सूबीर १२ बराबर समान वर्ग क्षेत्र के आकार का घर काटकर कागज तैयार किया तथा लाल रंग से रंग दिया। मासूम भी इसी तरह का १२ बराबर वर्ग क्षेत्र के आकार का घर काटकर कागज तैयार किया तथा पीला रंग से रंग दिया।

सूबीर ने लाल रंग के कागज पर

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

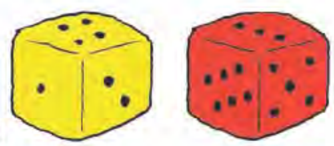
लिखा।

मासूम ने पीले रंग के कागज पर

-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1

लिखा। अब दोनों के कागज के टुकड़े के बीच में एक नये हरे रंग के एक उसी माप के वर्गाकार कागज पर ▢ 0 लिखा।

-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



दोनों ने तय किया कि दोनों दो बार करके छक्का चलायेंगे।

प्रथम बार जो संख्या आयेगी उतना घर 0 के दाहिने तरफ जायेंगे।

एवं द्वितीय बार जो संख्या आयेगी उतना घर आगे जाने के घर के बॉयी तरफ आयेगा।

सूबीर पहले दो बार छक्का फेंका और 4 और 3 आया।

अत: वह 0 के दाहिने तरफ 4 घर चला। फिर वहाँ से 3 घर बाएँ तरफ लौट आया। अत: प्राप्त किया।

सूबीर पहले दो बार छक्का चला और ① नम्बर घर में आया। अर्थात् दो बार छक्का चला और 4 तथा दूसरे बार 3 आया।

$4 + (-3) = 1$

इस बार मासूम दो बार छक्का चला। किन्तु मासूम भी प्रथम बार 4 तथा द्वितीय बार 3 पाया।

मैं यदि प्रथम बार 0 से बाँयें तरफ 3 घर चला। उसके पश्चात् वहाँ से 4 घर दाहिने तरफ अर्थात् यदि $(-3) + (+4) = 1$ करें तो क्या पाते हैं देखें।

मासूम इस तरह से दो बार छक्का चाल चलकर 1 नम्बर घर में आया। अर्थात् मासूम दो बार छक्का चाल चलकर पाया।

$(-3) + (+4) = \square$

हम पाते हैं, $(+4) + (+3) = (-3) + (+4)$

संख्या रेखा के अन्य पूर्ण संख्याओं को लेकर जाँच करें।

6 $(-5) + (-3) = \square$ एवं $(-3) + (-5) = \square$

$\therefore (-5) + (-3) \square (-5) + (-3)$ [= / ≠ बैठायें]

7 $(+7) + (+2) \square (+2) + (+7)$ [= / ≠ बैठायें]

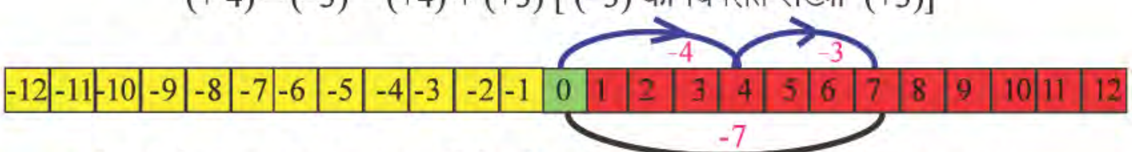
8 इसी प्रकार किसी भी 4 के सम्पर्क को परखे। [स्वयं करें।]

देखते है कि संख्या रेखा पर भी पूर्ण संख्या का योग विनियम नियम मानकर चलता है।)

लेकिन पूर्ण संख्या का वियोग विनिमय नियम मानकर चलता है क्या ? संख्या रेखा पर वियोग करके देखें।

9 संख्या रेखा पर $(+4) - (-3)$ का मान खोजें।

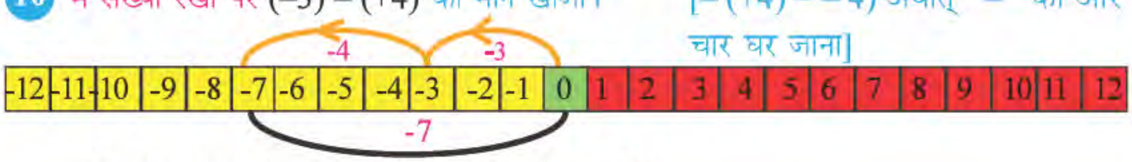
$(+4) - (-3) = (+4) + (+3)$ [(–3) की विपरीत संख्या (+3)]



0 के दाहिने तरफ 4 घर जाकर वहाँ से और 3 घर दायें की ओर जाकर 7 पर आये।

संख्या रेखा पर हम पाते हैं $(+4) - (-3) = 7$

10 मैं संख्या रेखा पर $(-3) - (+4)$ का मान खोजा। [$-(+4) = -4$) अर्थात् " – " की ओर चार घर जाना]



$-3 - (+4) = -3 + (-4)$ के विपरीत संख्या – 4]

संख्या रेखा पर हम पाते हैं, $-4 - (+4) = \square$

$\therefore \quad +4 - (-3) = \square \ (-3) - (+4)$ [= / ≠ बैठायें]

11 अन्य संख्या लेकर जाँच करके देखें। [स्वयं करें]

देखते है कि संख्या रेखा पर पूर्ण संख्या का वियोग विनिमय नियम मानकर नहीं चलता है

12 स्वयं संख्या रेखा पर जाँच करें एवं खाली घर में [=/≠] लिखें :

(i) (+6) – (+ 7) ☐ (+ 7) – (+ 6) **(ii)** 0 – (– 2) ☐ (–2) – 0

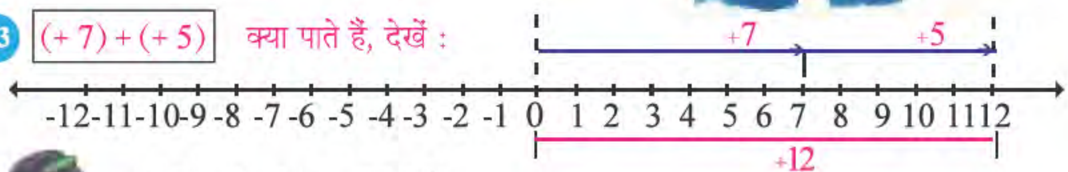
(iii)(– 8) – (– 5) ☐ (– 5)—(– 8) **(iv)** (– 13) – (+ 13) ☐ (+ 13) – (– 13)

(v) (– 9) – (+ 5) ☐ (+ 5) – (– 9) **(vi)** (+ 15) + 0 ☐ 0 + (+ 15)

(vii) (– 7) + 0 ☐ 0 + (– 7) **(viii)** (+ 11) + (- 11) ☐ (– 11) + (+ 11)

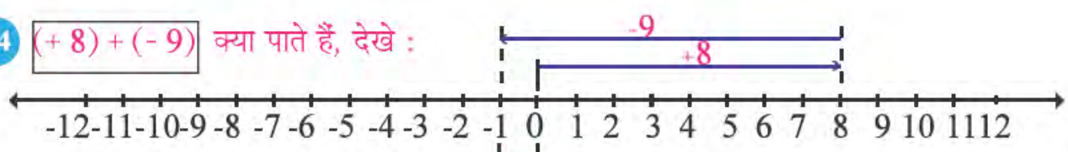
अब हम संख्या रेखा की सहायता से योग तथा वियोग करें।

13 (+ 7) + (+ 5) क्या पाते हैं, देखें :



(+ 7) + (+ 5) = + 12 पायें।

14 (+ 8) + (- 9) क्या पाते हैं, देखे :



(+ 8) + (-9) = -1 पायें।

15 (+6) + {(- 2) + (-3)} क्या पाते हैं, देखे — (+ 6) + {(- 2) + (- 3)} = (+ 6) + (- 5) = (+1)

16 अब {(+6) + (-2)} + (-3) = क्या पाते हैं, देखे — {(+6) + (-2)} = (+4) + (-3) = (+1)

देखते हैं, (+ 6) + {(- 2) + (-3)} = {(+6) + (- 2)} + (- 3)

∴ पूर्ण संख्या का संयोग नियम मानकर नहीं चलता हैं।

अब हम देखेंगे कि पूर्ण संख्या वियोग संयोग नियम मानकर चलती है या नहीं।

$(+6) - \{(-2) - (-3)\}$

$= (+6) - \{(-2) + (+3)\}$

$= (+6) - \{(+1)\}$

$= (+6) - (+1) = (+6) + (-1) = +5$

फिर, $\{(+6) - (-2)\} - (-3)$

$= \{(+6) + (+2)\} - (-3)$

$= (+8) - (-3) = (+8) + (+3) = +11$

$\therefore (+6) - \{(-2) - (-3)\} \neq \{(+6) - (-2)\} - (-3)$

क्या पाते हैं, देखें :

बनाकर देखें — 1.3

1. नीचे की संख्या रेखा से मान निर्णय करें —

-12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

(i) $(+6) + (+3) = \square$ (ii) $(+3) + (+6) = \square$

(iii) $(+2) + (-2) = \square$ (iv) $(-4) + (+4) = \square$

(v) $(+3) + (-6) = \square$ (vi) $(+3) - (-6) = \square$

(vii) $(+6) - (-9) = \square$ (viii) $(-6) + (-3) = \square$

(ix) $(-6) + (-5) = \square$

2. संख्या रेखा बनाकर उदाहरण की सहायता से योग के विनियम नियम दिखाओं ?

3. संख्या रेखा बनाकर उदाहरण की सहायता से योग के विनियम नियम मानकर चलता है या नहीं ?

4. स्वयं संख्या रेखा की सहायता से जाँच करें —

(i) $(+2) + \{(+3) + (+5)\} = \{(+2) + (+3)\} + (-5)$

(ii) $(-8) + \{(-2) + (+6)\} = \{(-8) + (-2)\} + (+6)$

(iii) $(+2) - \{(+3) - (-5)\} \neq \{(+2) - (+3)\} - (-5)$

(iv) $(-8) - \{(-2) - (+6)\} \neq \{(-8) - (-2)\} - (+6)$

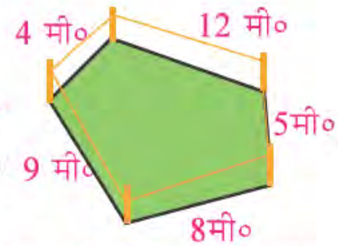
17 आज रविवार है। अतः माम्पी ने तय किया है कि वह अपने पढ़ने वाले टेबल के ऊपर चारों किनारों को रंगीन कागज से मढ़ देगी। किन्तु कितना लम्बा कागज खरीदेगी, यह देखना है।

माम्पी फीता से मापकर देखी,

टेबल की लम्बाई 90 सें०मी० एवं चौड़ाई 60 सें०मी०

रंगीन कागज लगेगा = □ × (□, □) सें०मी०

= □ × □ सें०मी० = 300 सें०मी०



18 हसीना के मकान के चारों तरफ बेड़ा देना है। जमीन की आकृति →

हसीना के मकान के चारों तरफ घेरने में (5 मी०+ 8मी०+9 मी०+ 4मी० +12मी०)

=38 मीटर लम्बा बेड़ा लगेगा।

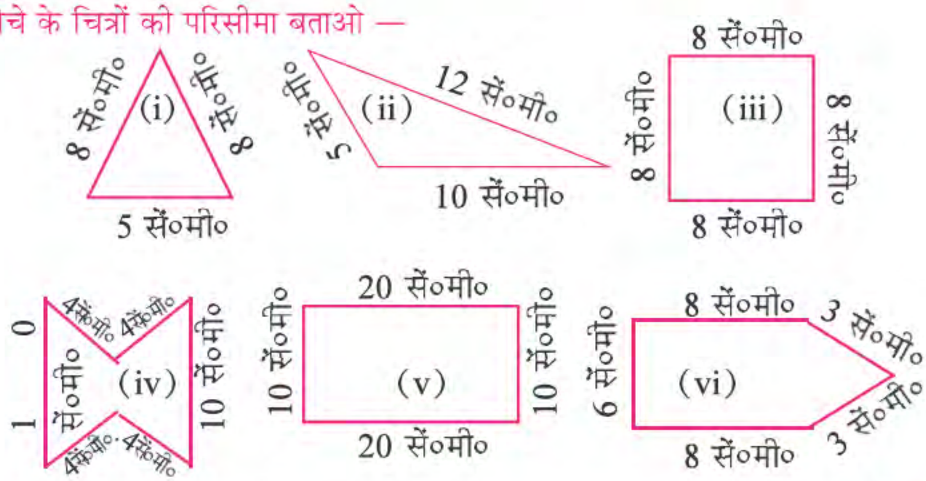
19 रफीकुल 121 वर्ग मीटर वर्गक्षेत्र के आकार की जमीन के एक किनारे पर फूल के पौधे लगायेगा। कितना लम्बा जमीन पर फूल के पौधे लगायेगा, हिसाब करके देखेंगे।

```
        11
     ┌────
     │121
      -1
 21  │ 21
     │-21
     │  0
```

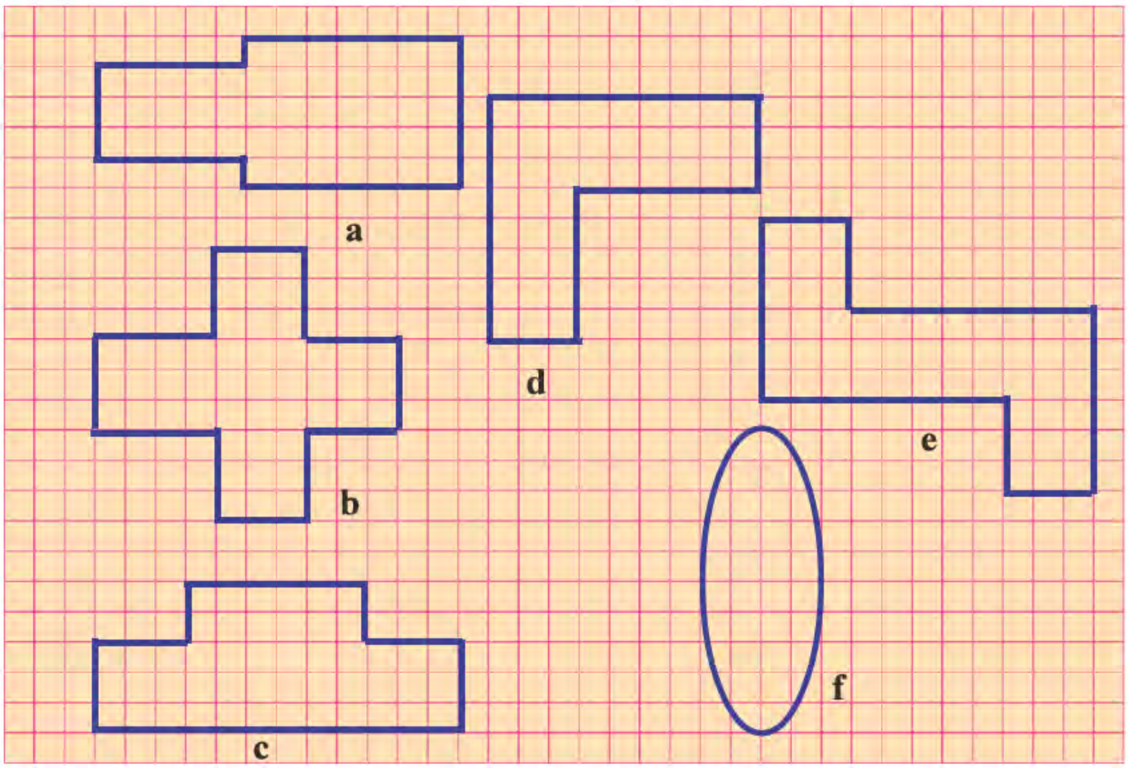
∴ रफीकुल 11 मीटर लम्बे जमीन पर फूल के पौधे लगायेगा।

बनाकर देखें —1.4

1. नीचे के चित्रों की परिसीमा बताओ —

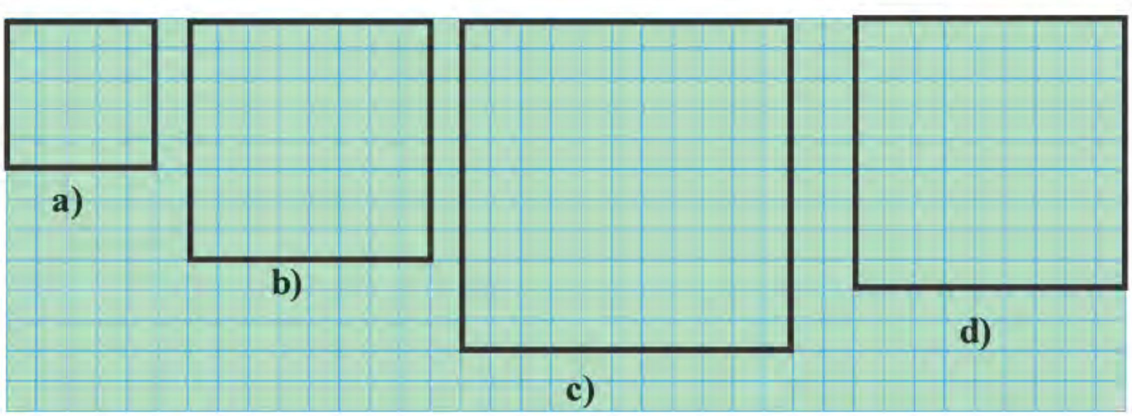


2. नीचे के चित्रों ने कितना जगह घेर रखा है, देखेंगे (प्रत्येक छोटे वर्ग का माप 1 वर्ग सें०मी०)



3. स्वयं एक कागज पर 25 वर्ग क्षेत्र, 40 वर्ग क्षेत्र, 36 वर्ग क्षेत्र तथा 62 वर्ग क्षेत्र बनाओ।

4. नीचे के वर्ग क्षेत्र के कागज के वर्गक्षेत्र के एक-एक भुजा की लम्बाई मापेगें एवं क्षेत्रफल निर्णय करेंगे।
(माना, 1 वर्गक्षेत्र = 1 वर्ग सें०मी०)



5. वर्गमूल निर्णय करें :

(a) $5^2 \times 8^2$ (b) 4225 (c) 10609 (d) 108241 (e) 186624

6. 3000 का निकटतम पूर्ण वर्ग संख्या खोजें जो (a) 3000 से बड़ा (b) 3000 से छोटा।

7. 9545 से कौन सी सबसे छोटी धनात्मक पूर्ण संख्या को घटाने पर वियोगफल एक पूर्ण वर्ग संख्या होगी।

8. 5050 का कौन सी सबसे छोटी धनात्मक पूर्ण संख्या के साथ जोड़ने पर योगफल एक पूर्ण वर्ग संख्या होगी।

9. बरूईपुर के एक अमरूद के बगीचे में इस प्रकार से अमरूद के पौधे लगाए गए है कि जितनी कतारों में पौधे लगे हैं। प्रत्येक कतार में उतने पौधे हैं, यदि पौधों की संख्या 1764 हो, तो प्रत्येक कतार में कितने पौधे हैं।

10. होमियोंपैथिक दवाई रखने के लिए एक वर्गाकार बक्से में 1225 शीशी को रखने का घर बना है। घरों को इस प्रकार सजाया गया है कि बक्से में जितनी कतारें हैं, प्रत्येक कतार में उतने घर है, तो बक्से में कितनी कतारें है।

11. तीन धनात्मक संख्याओं में पहली एवं दूसरी संख्या का गुणनफल 24, दूसरी और तृतीय संख्या का गुणनफल 48 एवं प्रथम एवं द्वितीय संख्या का गुणनफल 32 है, तो तीनों संख्याएँ क्या–क्या है।

12. शिवाजी संघ क्लब में जितने सदस्य है। संघ के प्रत्येक सदस्य ने सदस्य संख्या के पाँच गुना रुपया चंदा दिए हैं। कुल 515205 रुपये चंदा इकट्ठा हुआ। तो हमें निकालना होगा कि क्लब के सदस्यों की संख्या कितनी है।

13. दीर्जिलिंग के एक बगीचे के मालिक ने 1080 कमला नीबू तोड़ा है, बाजार में भेजने के लिए कई टोकरियाँ को लाया गया। प्रत्येक टोकरी में उतने नीबू भरे गए जितनी टोकरियों की संख्या है। ऐसा करने से 9 कमला नीबू कम हो गये। तो बगान मालिक ने कितनी टोकरियाँ लाई थी।

14. बकुलतल्ला के एक तालाब को साफ करने के लिए पंचायत ने जितने मजदूरों को नियुक्त किया था। प्रत्येक ने उतने दिन काम करके कुल 12375 रुपये मजदूरी पाये हैं, यदि प्रत्येक मजदूर की दैनिक मजदूरी 55 रुपये है तो कितने मजदूरों ने काम किया है, हमें निकालना है।

15. चार अंकों की कौन सी सबसे बड़ी संख्या 12,18 और 30 से विभाजित होगी।

16. पाँच अंकों की कौन सी सबसे छोटी संख्या 8,15,20 और 25 से विभाजित होगी ?

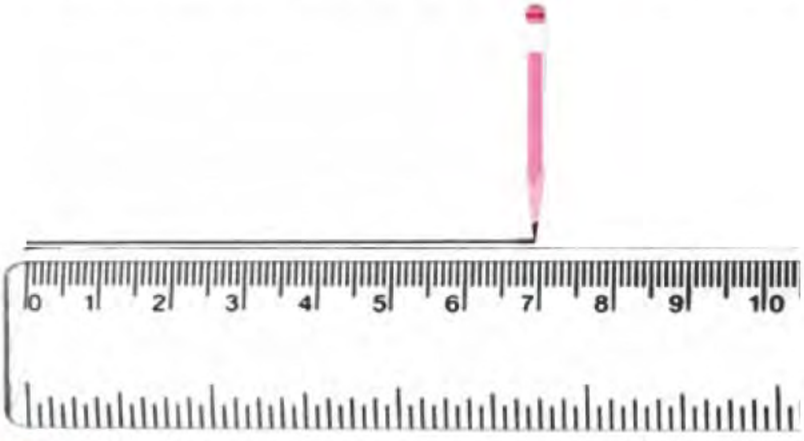
सुहाना और अर्पिता आज घर पर तराजू बनायेगी। एक काठ के डंडे AB को लिया। लेकिन AB के मध्य बिन्दु पर कांटा लगाना होगा।

AB का कौन सा बिन्दु मध्य बिन्दु होगा। कैसे जानेगें ?

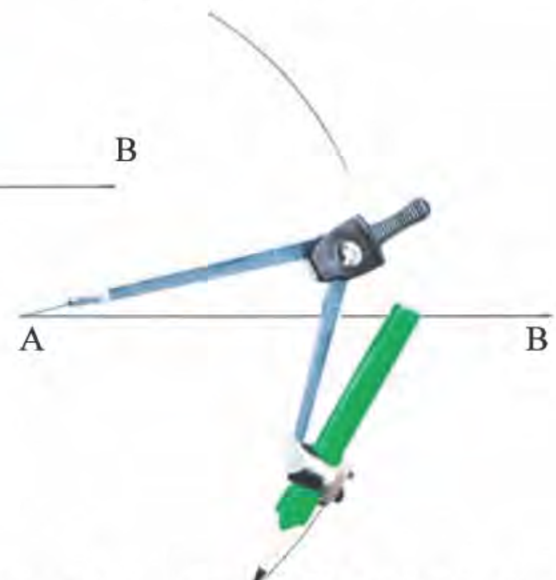
स्केल की सहायता से मापकर देखा गया $\overline{AB}$ की लम्बाई 14 सें०मी० 1 स्केल की सहायता से मापकर मध्य बिन्दु होगा। 14 सें०मी० ÷ 2 = 7 सें०मी० के स्थान पर।

20 पेंसिल कम्पास की सहायता से किस प्रकार मध्य बिन्दु निकलेगा, यह देखना है।

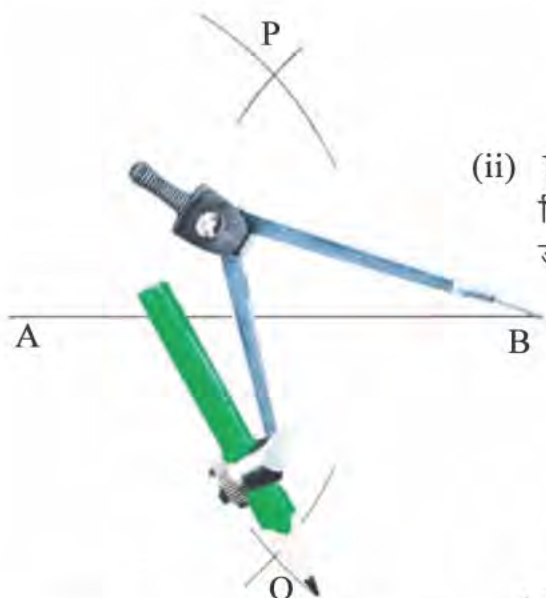
(i) स्केल और पेंसिल की सहायता से एक 7 सें०मी० लम्बाई की एक सरल रेखा खींचा।

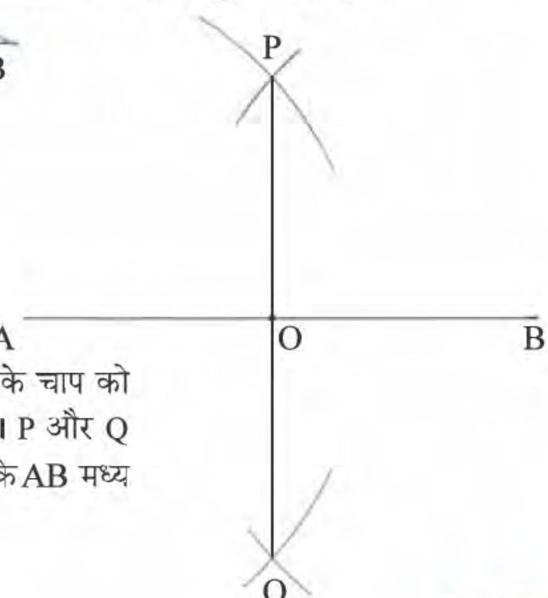


(ii) पेन्सिल कम्पास कांटा A बिन्दु पर रखकर $\overline{AB}$ की लम्बाई का आधा से अधिक लम्बा (अर्द्धव्यास) लिया एवं उस अर्द्धव्यास के ऊपर दो वृत्त चाप बनाया।



(ii) इस प्रकार पेन्सिल कम्पास काँटा B बिन्दु पर लिख दिया एवं उसी लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर AB के ऊपर व नीचे दो वृहत्त चाप बनाया।





(iii) वृत्त का दो चाप आगे के बनाये वृत्त के चाप को क्रमशः P एवं Q बिन्दु पर काटते है। P और Q बिन्दु पर स्केल बैटाकर तथा योग करके AB मध्य का O बिन्दु मिला।

बनाकर देखें—1.5

1. स्केल की सहायता से $\overline{PQ}$ एक सरल रेखा खींचा। इसकी लम्बाइ 9 सें०मी० है। पेन्सिल और कम्पास की सहायता से $\overline{PQ}$ सरल रेखा को समद्विभाजित करके प्रत्येक अंश की लम्बाई मापें।

2. स्केल की सहायता से 12 सें०मी० लम्बाई की एक सरल रेखा को कम्पास और पेंसिल की सहायता से चार भागों में विभक्त करके प्रत्येक भाग की लम्बाई बराबर है या नहीं, बताओ।

3. चांद की सहायता से 72^0 का कोण बनाओ। पेसिंल कम्पास की सहायता से कोणों को समद्विभाजित करो। चांद की सहायता से मापकर देखेगें कि कोण समद्विभाजित हुए हैं या नहीं।

4. $\overline{AB}$ सरल रेखा के B बिन्दु पर पेंसिल कम्पास की सहायता से BC लम्ब बनाओं एवं पेंसिल कम्पास की सहायता से ∠ABC को समद्विभाजित करें।

5. $\overline{MN}$ सरल रेखा के बाहर स्थित बिन्दु P से $\overline{MN}$ सरल रेखा के ऊपर या वर्धित $\overline{MN}$ सरल रेखा के ऊपर या वर्धित $\overline{MN}$ सरल रेखा के ऊपर लम्ब बनाओं ?

6. स्केल और पेंसिल की सहायता से ABC एक त्रिभुज बनाओ। पेंसिल कम्पास की सहायता से उस त्रिभुज के तीन कोणों को समद्विभाजित करो। समद्विभाजक रेखायें एक बिन्दु पर स्थित है या नहीं, बताओ।

7. चांद की सहायता से 80^0 तथा 100^0 के कोण बनाओ और पेंसिल कम्पास की सहायता से 80^0 एवं 100^0 कोणों के समान दो कोण बनाओ। कोण किस प्रकार के कोण है लिखो।

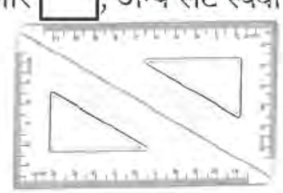
8. स्केल और पेंसिल की सहायता से ABC एक त्रिभुज के तीन भुजाओं को पेंसिल कम्पास की सहायता से समद्विभाजित करो। भुजाओं के समद्विभाजक तीनों समबिन्दु है या नहीं।

ज्यामिति बाक्स में क्या-क्या है

चांद की सहायता से [ ] मापो। स्केल की सहायता से [ ] मापो। पेंसिल कम्पास की सहायता से [ ] बनाओ।

दो सेट स्क्वायर से क्या-क्या बना सकते हैं, देखे

एक सेट स्कवायर के कोण [ ], [ ] और [ ], अन्य सेट स्क्वायरों के कोण [ ], [ ] और [ ] है।



दो 30^0- 60^0-90^0 सेट स्क्वायर [ ] को चित्र के तरह मिलाकर [ ] चित्र प्राप्त हुआ।

बनाकर देखें — 1.6

1. दो 45^0–45^0–90^0 सेट स्क्वायर को मिलाकर ☐ चित्र बनाओ।
2. दो 30^0–60^0–90^0 सेट स्क्वायर के पास के चित्र की तरह मिलाकर ☐ पाया।
3. सेट स्क्वायर की सहायता से हम राम्बस और ट्रापीजियम के आकार का चित्र बनायें।
4. सही/गलत बताओ —

   (1) वर्गाकार चित्र के प्रत्येक कोण समकोण होते हैं।

   (2) किसी भी आयताकार चित्र का प्रत्येक भुजा समान होते हैं।

   (3) राम्बस की चारों भुजायें समान होती है।

   (4) किसी भी समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजा समान होती है।

   (5) किसी भी प्रकार के ट्रापीजियम की प्रत्येक भुजा समान होती है।

   (6) किसी भी आयताकार चित्र के दोनों कोणों की लम्बाई समान होती है।
5. कारण बताओ :

   (1) वर्गाकार चित्र, आयताकार चित्र तथा समानान्तर चतुर्भुज सभी चतुर्भुज है।

   (2) सभी प्रकार के आयताकार चित्र समानान्तर चतुर्भुज है। (3) सभी वर्गाकार चित्र आयताकार चित्र है।

   (4) सभी समानान्तर चतुर्भुज ट्रापीजियम है। (5) सभी राम्बस समानान्तर चतुर्भुज है।
6. नीचे के घरों को भरों

चतुर्भुज	विपरीत भुजा		सब भुजायें	विपरीत कोण	दोनों कर्ण	दोनों कर्ण एक दूसरे को
	समान	समानान्तर	समान	समान	समान	समद्विभाजित करती है
समानान्तर चतुर्भुज	✓	✓	×	✓	×	✓
आयताकार चित्र						
वर्गाकार चित्र						
राम्बस				✓	×	
ट्रापीजियम						

2. अनुपात

आज सुप्रिया और पार्थ ने तय किया है कि अपने-अपने पेंसिल की लम्बाई मापेंगे तथा तुलना करेंगे।

सुप्रिया की पेंसिल की लम्बाई 12 से0मी0 एवं पार्थ की पेंसिल की लम्बाई 10 सें0मी0 है।

सुप्रिया की पेंसिल की लम्बाई पार्थ की लम्बाई से ☐ से0मी0 – ☐ से0मी0 = 2 से0मी0 बड़ी है।

अब पार्थ ने तय किया कि उसकी पेंसिल की लम्बाई और स्कूल के बेंच की लम्बाई की तुलना करेगा।

वह स्केल से मापकर देखा तो बेंच की लम्बाई 200 से0मी0है।

उतना बड़ा एवं उतने छोटे की तुलना कैसे करेगा?
मेरे पेंसिल से बेंच की लम्बाई कितने बार में मापा जाता है

पार्थ ने सोचकर देखा कि बेंच की लम्बाई में पेंसिल की लम्बाई से भाग देने पर मालूम होगा।

अतः $\frac{\text{बेंच की लम्बाई}}{\text{पार्थ के पेंसिल की लम्बाई}} = \frac{\square \text{से0मी0}}{\square \text{से0मी0}} = \frac{20}{1}$

हम देखते है कि पार्थ की पेंसिल की लम्बाई से बेंच की लम्बाई 20 गुणा है।

इसी प्रकार भाग के द्वारा तुलना करने को 'अनुपात' कहा जाता है एवं अनुपात (:) इस चिन्ह से प्रकाशित किया जाता है। अतः बेंच की लम्बाई : पार्थ के पेंसिल की लम्बाई = 200 : 10 = 20 : 1

1 सुप्रिया के कक्षा में 30 लड़के एवं 20 लड़कियाँ है। सुप्रिया के कक्षा में लड़के एवं लड़कियों की संख्या का अनुपात कितना है, हम देखेंगे।

सुप्रिया की कक्षा में लड़के लड़कियों की संख्या का अनुपात = 30 : 20 = 3 : 2

2 एक छिपकली की लम्बाई 25 से0मी0 और एक मगरमच्छ की लम्बाई 4 मीटर है। उनके लम्बाई का अनुपात निकालेंगे (स्वयं करो)

मेखला के परिवार के लोग एक छोटा सा घर भाड़ा पर लिया है। इतने छोटे से घर में रहने में उनकों काफी तकलीफ होती है। इसलिए उनलोगों ने अपने जमीन पर घर बनाना शुरु किया है। मिस्त्री सीमेन्ट और बालू मिलाकर मशाला बना रहे है। मेखला रोज उनके काम को देखती है। वह मशाला मिलाना देखकर आश्चर्यचकित हो जाती है। वह रोज देखती है कि मिस्त्री 1 कड़ाही सीमेन्ट के साथ 5 कड़ाही बालू मिला रहे है।

तुमलोग किस हिसाब से मशाला बनाते हो?

हम लोग सीमेन्ट और बालू का परिमाण 1:5 अनुपात में मिलाते है।

समझी नहीं। यदि 2 कड़ाही सीमेन्ट लेकर मसाला बनाओगे तो क्या होगा?

तब 10 कड़ाही बालू मिलाना पड़ेगा।

अब समझी हूँ। इस प्रकार मसाला बनाने के लिए —

1 कड़ाही सीमेन्ट के साथ 5 कड़ाही बालू मिलाया जाता है।

2 कड़ाही सीमेन्ट को लेने पर $5 \times 2 = 10$ कड़ाही बालू मिलाना होगा।

फिर 3 कड़ाही सीमेन्ट मिलाने में 5×3 कड़ाही = 15 कड़ाही बालू मिलाना होगा।

अर्थात् एक मसाला बनाने में जितना गुना सीमेन्ट बढ़ेगा तो उतना गुना बालू का परिमाप भी बढ़ेगा।

अर्थात् $\frac{\text{सीमेन्ट का परिमाण}}{\text{बालू का परिमाण}}$ सब समय एक ही रहेगा।

उसे हम सीमेन्ट और बालू के परिमाण का अनुपात कहेंगे तथा लिखेंगे,
सीमेन्ट का परिमाण : बालू का परिमाण = 1 : 5

उनके घर के बाहर चहारदिवारी की गथनी शुरु हुई।

मिस्त्री लोगों ने नया मसाला इस तरह बनाया।

मिस्त्री ने 1 कड़ाही सीमेन्ट के साथ 7 कड़ाही बालू मिलाया।

क्या नये मसाला में सीमेन्ट और बालू के परिमाण का अनुपात [1 : 7] ?

ठीक कहते हो। आगे के मसाला से उस मसाला में अन्तर क्या है जानते हो ?

इस मसाला में बालू का परिमाण अधिक है।

समझ गई, गाथनी के लिए मसाला बनाने में 2 किलो ग्रा0 सीमेन्ट के साथ 7 × 2 कि0ग्रा0 = 14 कि0ग्रा0 बालू मिलाना होगा।

4 कि0ग्रा0 सीमेन्ट के साथ ☐ × ☐ कि0ग्रा0 = ☐ कि0ग्रा0 बालू मिलाना होगा।

10 कि0ग्रा0 सीमेन्ट के साथ ☐ × ☐ कि0ग्रा0 = ☐ कि0ग्रा0 बालू मिलाना होगा।

मेखला का मित्र फरीद आया।

हमलोग के घर का पाँचिल देने में 2 बस्ता सीमेन्ट के साथ 12 बस्ता बालू मिलाया गया था। तब किस अनुपात में मिलाया गया था।

सीमेन्ट का परिमाण : बालू का परिमाण = 2 : 12

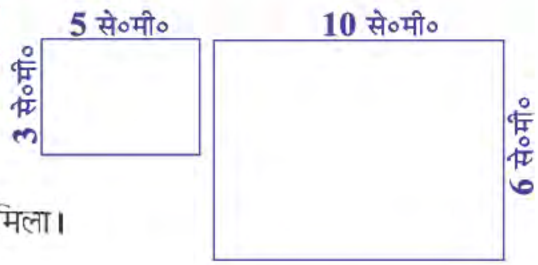
= 1 : 6 (2 से दोनो पदों में भाग देने पर मिला)

अर्थात् फरीद के मकान का पाँचिल देने में जो मसाला प्रयोग किया गया था उसमें सीमेन्ट और बालू का अनुपात 1 : 6 था।

अनुपात के संख्या को शून्य के अलावा एक ही संख्या से गुणा और भाग करने पर अनुपात का मान एक ही रहता है या नहीं, देखे।

3 लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात एक ही रखकर विभिन्न आकार के आयताकार चित्र बनायेंगे —

एक आयताकार क्षेत्र के जमीन की लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात यदि 5 : 3 हो, तब आयतक्षेत्र की लम्बाई और चौड़ाई क्या-क्या होगा देखें—



5 : 3 अनुपात में 5 पूर्वपद तथा 3 उत्तरपद हैं।

इस अनुपात को भिन्न आकार में व्यक्त करके $\frac{5}{3}$ मिला।

$\therefore \frac{\text{आयताकार क्षेत्र की लम्बाई}}{\text{आयताकार क्षेत्र की चौड़ाई}} = \frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9}$ ......

अर्थात्, आयतक्षेत्र की लम्बाई 5 से0मी0, चौड़ाई 3 मी0, लम्बाई 10 से0मी0 हैं एवं चौड़ाई ☐ से0मी0। लम्बाई ☐ से0मी0 होने पर चौड़ाई 9 से0मी0 होगी। लम्बाई ☐ से0मी0 होने पर चौड़ाई ☐ से0मी0 होगा।

4 एक आयताकार जमीन की लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात 5 : 2, लम्बाई 20 मीटर होने पर जमीन की चौड़ाई कितना मीटर होगा।

$\frac{\text{जमीन की लम्बाई}}{\text{जमीन की चौड़ाई}} = \frac{5}{3} = \frac{20}{\square}$

क्योंकि $20 \div 5 = 4$

$\therefore$ आयताकार जमीन की चौड़ाई = 2×4 मीटर

= 8 मीटर

अथवा $\frac{\text{लम्बाई}}{\text{चौड़ाई}} = \frac{2}{5} = \frac{\square}{20}$

चौड़ाई होने पर लम्बाई $\frac{2}{5}$ भाग

$\therefore$ चौड़ाई = $\overset{4}{\cancel{20}} \times \frac{2}{\cancel{5}}$ मीटर = 8 मीटर

5 फरीद के मित्र सुहाना के आयताकार जमीन की लम्बाई 15 मीटर है। उस जमीन में 10 कि0ग्रा0 बालू फेकना होगा।

तब क्या हम आयताकार जमीन की लम्बाई के साथ बालू के परिमाण की तुलना कर सकते है?

अत: क्या हम लिख सकते है, $\frac{\text{आयताकार जमीन की लम्बाई}}{\text{बालू का परिमाण}} = \frac{\text{15 मीटर}}{\text{10 कि0ग्रा0}}$

दोनों क्या एक ही जातीय राशि है?

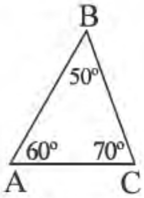
समझ गए। इसका मतलब अनुपात कहने से समझते है **समजातिय राशि की तुलना**। क्योंकि समजातिय राशियों की तुलना करने पर भाग किए, अत: भाग करते समय कोई इकाई नहीं रहती है। अत: **अनुपात कोई इकाई नहीं है**।

6 छत ढ़लाई के समय बालू, सीमेन्ट तथा स्टोनचिप मिलाया जाता हैं। यदि एक कढ़ाही सीमेन्ट के साथ 5 कड़ाही बालू तथा 2 कड़ाही स्टोनचिप मिलाया जाय, तो सीमेन्ट बालू और स्टोनचिप के परिमाण का अनुपात होगा ☐ : ☐ : ☐। (स्वयं करें)

7 मेरे पिताजी की उम्र 48 वर्ष, माँ की उम्र 42 वर्ष, भैया की उम्र 15 वर्ष एवं मेरी उम्र 12 वर्ष है, अत: पिता, माता, भैया तथा मेरे उम्र का अनुपात 48 : 42 : 15 : 12 अर्थात् ☐ : ☐ : ☐ : ☐।

बनाकर देखे – 2.1

1. 1 कि0ग्रा0 चावल का दाम 40 रुपए और 1 कि0ग्रा0 दाल का दाम 100 रुपए है। दाल के दाम का अनुपात निकालो।

2. 

$\angle BAC : \angle ABC : \angle ACB$ = कितना

3. एक पेंसिल का मूल्य 3 रुपए और एक लाजेन्स का मूल्य 50 पैसा है, तो एक लाजेन्स और 1 पेंसिल के मूल्य का अनुपात निकालो।

4. एक पचास पैसा, एक–एक रुपया तथा एक दो रुपए के सिक्के का अनुपात लिखो?

5. उमा की उम्र 12 वर्ष 6 माह, रातूल की उम्र 12 वर्ष 4 माह, व नूरजहाँ की उम्र 12 वर्ष है तो तीनों के उम्र का अनुपात कितना होगा।

6. समकोण समद्विबाहू त्रिभुज के कोणों का अनुपात कितना होगा लिखो।

7. समबाहू त्रिभुज के कोणों का अनुपात कितना होगा।

8. पूलकबाबू और मानिकबाबू के उम्र का अनुपात 7 : 9, मानिकबाबू की उम्र 72 वर्ष है, तो पुलकबाबू की उम्र बताओ।

9. दो पुस्तको के मूल्य का अनुपात 2 : 5, प्रथम पुस्तक का मूल्य 32.40 रुपए है ते दूसरी पुस्तक का मूल्य बताओ।

10. एक वृत की परिधि तथा व्यास का अनुपात 22 : 7 है, उस वृत के व्यास की लम्बाई 2 मीटर 1 डेसीमीटर है, तो उस वृत की परिधि बताओ।

11. हमारे सप्तम श्रेणी में 150 छात्रो में से 90 छात्र तथा छठवीं श्रेणी के 180 छात्रों में से 80 छात्र चित्रांकन प्रतियोगिता में नाम दिए है, अनुपात के द्वारा दिखलाओं कि किस श्रेणी के प्रतियोगी अधिक है।

किस शरबत को हम अधिक मीठा पाते है

आज रुमेला के घर पर उसके कई मित्र आए है। रुमेला ने तय किया है कि आज मित्रों को सर्वप्रथम शरबत पिलाएगी। अतः वह स्वयं शरबत बनायेगी। इसलिए उसने 10 ग्लास पानी के साथ 6 ग्लास शिरप मिलाकर शरबत बनायी।

अब शरबत में जल और शिरप के परिमाण का अनुपात 10 : 6 = 5 : 3

यहाँ पूर्वपद → □ , उत्तरपद → □ , पूर्वपद □ उत्तरपद (> / < बैटाया)

इस अनुपात को **गुरु अनुपात** कहा जाता है।

यदि पूर्वपद < उत्तरपद हो, तब उस अनुपात को क्या कहेंगे ?

उस अनुपात को **लघु अनुपात** कहा जाता है।

यदि, अनुपात का पूर्वपद = उत्तरपद हो तो उस अनुपात को **साम्यानुपात** कहा जाता है।

मित्र सूमित को शरबत और मीठा चाहिए। अतः रुमेला और $\frac{1}{2}$ ग्लास शिरप मिला दी। अब सभी को शरबत पसंद आया।

अब 10 ग्लास जल में शिरप का कुल परिमाण $=(6 + \frac{1}{2})$ ग्लास

$= \frac{13}{2}$ ग्लास

अब नये शरबत में जल और शिरप के परिमाण का अनुपात $10 : \frac{13}{2}$

= 20 : 13 (दोनों पद में 2 से गुणा करके पूर्ण संख्या का अनुपात निकाला)

यहाँ पूर्वपद □ उत्तरपद (</> बैटाया)। अतः यह अनुपात एक □ अनुपात।

यदि 10 ग्लास जल में 10 ग्लास शिरप मिलाया जाए तो जल और शिरप का अनुपात □ : □ = 1 : 1 होगा।

यहाँ पूर्वपद □ उत्तरपद [< / = / > बैटाया]।

अतः यह अनुपात एक □ अनुपात।

स्वयं करें - 2.1

(1) एक ही अनुपात में लिकर चाय और दूध मिलाकर चाय बनाया जायेगा। कितना कप लिकर चाय तथा कितना कप दूध दिया जायेगा, देखे —

चाय बनाया जायेगा	लिकर चाय का परिमाण	दूध का परिमाण
6 कप	4 कप	2 कप
3 कप		
12 कप		
15 कप		
24 कप		

(i) 24 कप चाय के लिए लिकर चाय और दूध का अनुपात कितना होगा?

(ii) 15 कप चाय के लिए कितना कप दूध लेना होगा?

(2) नीचे के खाली घरो को भरो —

अनुपात	लघु अनुपात	पूर्वपद	उत्तरपद	अनुपात के प्रकार		
				गुरु अनुपात	लघु अनुपात	साम्यानुपात
10:16	5:8	5	8		5:8	
21:33						
36:26						
8:8						
45:10						
57:105						
15:15						
138:162						

नये अनुपात बनायेंगे और नाम जानेंगे

तीन अनुपात लिए 2:3, 4:5 और 5:7

तीन अनुपात के पूर्वपद □, □ और □ एवं तीनों का उत्तरपद □, □ और □

यदि, पूर्वपदों को गुणा करने पर मिलेगा, $2 \times 4 \times 5 = 40$

एवं उत्तर पदों का गुणा करेंगे तो मिलेगा, $3 \times 5 \times 7 = 105$

पूर्वपद 40 एवं उत्तरपद 105 होने पर अनुपात होगा,

$40 : 105$

$= 8 : 21$

इस प्रकार से बने अनुपात को **मिश्र अनुपात या यौगिक अनुपात** कहा जाता है।

अर्थात दो या दो से अधिक अनुपात रहने पर उनके पूर्वपदों का गुणनफल और उत्तरपदों को मिश्र अनुपात या यौगिक अनुपात कहा जाता है।

∴ 2:3, 4:5 व 5:7 का मिश्र अनुपात 8:21 होगा।

2:5; 7:8 और 3:4 अनुपातों का मिश्र अनुपात होगा।

$2\times7\times3 : 5\times8{:}4$

$= 42{:}160$

$= 21{:}80$

स्वयं करो – 2.2

मिश्र अनुपात में बदलो —

(1) 5:9, 8:12 और 7:3 (2) 1.2:5, 3.5:7 और 6:4 (3) $\frac{3}{5}{:}2$, $\frac{5}{6}{:}3$ और 4:5

अब अनुपात का स्थान परिवर्तन करके क्या पाते हैं देखें

मेरे पास 12 रुपए 75 पैसे है, मेरे भाई के पास 9 रुपए है। मेरा और मेरे भाई के रुपयों के परिमाण का अनुपात = 1275 : 900

= 51 : 36

= 17 : 12

∴ यह एक ☐ अनुपात,

इस अनुपात को भिन्न के आकार में $\frac{17}{12}$ पाते हैं,

$\frac{17}{12}$ का विपरीत $\frac{\square}{\square}$

∴ $\frac{12}{17}$ को अनुपात में लिखने पर 12 : 17 मिलता है।

12 : 17 अनुपात और 17 : 12 अनुपात दोनों में क्या संबंध है?

12 : 17 और 17 : 12 दोनों अनुपात व्यस्त सम्पर्क में है।

अर्थात् किसी अनुपात के पूर्व पद और उत्तर पद परस्पर स्थान परिवर्तन करते है और वह अनुपात पहले अनुपात का व्यस्त अनुपात होगा।

बनाकर देखे – 2.2

1) नीचे दिए गए अनुपातों को छोटे रूप में बदलो और प्रत्येक अनुपात को व्यस्त अनुपात में लिखो —

(a) 12 : 15 (b) 36 : 54 (c) 75 : 120 (d) 169 : 221 (e) 9xy : 12xy (f) 429 : 663

(g) 3b : 12c (h) 25xyz : 625xyz

(जहाँ a, b, x, y, z शून्य नहीं है)

2) नीचे के अनुपातों को पूर्ण संख्या के अनुपात में परिणत करके उसका व्यस्त अनुपात लिखो।

(a) 2.5 : 12.5 (b) $\frac{5}{8} : \frac{7}{16}$ (c) 0.7 : 0.49 (d) $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$

(e) $22 : 4\frac{5}{7}$ (f) $\frac{7}{15} : \frac{3}{20}$ (g) $1\frac{2}{5} : \frac{7}{10}$ (h) 4.4 : 5.61

3) नीचे के अनुपातों का मिश्र अनुपात निर्णय करो एवं मिश्र अनुपात , गुरु अनुपात, लघु अनुपात या साम्यानुपात है, लिखो —

(a) 8 : 6, 3 : 6 और 26 : 13 (b) $\frac{7}{5} : 3, \frac{5}{7} : 1\frac{1}{16}$ और 3 : 16

(c) 8 : 5, 7 : 12 और 22 : 13, (d) $\frac{2}{3} : 5, \frac{7}{8} : 2$

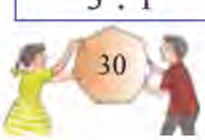
4) रीता ने 100 प्रश्नों में से 60 प्रश्नों का सठीक उत्तर दिया। विनय 80 प्रश्नों में से 50 सही किया। अनुपात में बदलकर देखें कि कौन अधिक अंक पाया है।

5) इस वर्ष माध्यमिक परीक्षा में मेरे विद्यालय के 150 परीक्षार्थियों में से 100 परीक्षार्थी ग्रेड A पाकर उत्तीर्ण हुए। बगल के विद्यालय के 100 परीक्षार्थियों में से 80 परीक्षार्थी ग्रेड A पाकर उत्तीर्ण हुए। बताओ कि इस वर्ष माध्यमिक परीक्षा में किस विद्यालय के छात्रों ने ग्रेड A पाकर अच्छा फल प्राप्त किया। अनुपात में व्यक्त करो।

6) दो मकानों के मूल्य का अनुपात 4:3 है। द्वितीय मकान का मूल्य 4,20,000 रुपए है तो प्रथम मकान का मूल्य निकालो। यदि प्रथम मकान का मूल्य यदि 70,000 रुपए अधिक होता तो उनके मूल्य का अनुपात कितना होता।

7) एक बाँस का एक टुकड़ा बाँस काट लिया गया एवं देखा गया कि दोनों टुकड़ो की लम्बाई का अनुपात 3:1 है। नीचे की सारणी से दोनो टुकड़े की लम्बाई कितनी हो सकती है एवं बाँस की लम्बाई कितनी थी।

अनुपात	प्रथम टुकड़े की लम्बाई	द्वितीय टुकड़े की लम्बाई	बाँस की कुल लम्बाई
3 : 1	30 डेसी मी0		
3 : 1		15 डेसी मी0	



देखें कितना भाग मिलाया गया

धान के खेत के लिए जैव खाद बनाया जा रहा है। 18 बोरा गोबर के साथ 4 बोरा सब्जी का छिलका मिलाया गया।

कुल (18 + 4) बोरा = 22 बोरा जैव खाद बनाया गया। अत: 22 बोरा जैव खाद में 18 बोरा गोबर है। अर्थात 22 बोरा जैव खाद में गोबर का परिमाण कुल खाद का $\frac{18}{22}$ भाग है। फिर 22 बोरा जैव खाद में सब्जी का छिलके का परिमाण 4 बोरा हैं। अर्थात 22 बोरा जैव खाद में सब्जी के छिलके का परिमाण $\frac{4}{22}$ भाग है।

इस तरह मिश्रण में उसके उपादान को अंश या भाग क्या कहेंगे ?

इसे अनुपातिक भाग को प्रतिशत में व्यक्त कहा जाता है।

8 360 रुपए पिंकू, काकली और आमिन के बीच इस प्रकार बाँटा गया कि उनके प्राप्त अर्थ का अनुपात 2:3:7 होगा। कौन कितना रुपया पाया देखे —

पिंकू का प्राप्त अर्थ : काकली का अर्थ : आमिन का अर्थ = 2 : 3 : 7

पिंकू को प्राप्त अर्थ का अनुपातिक भाग का .... $= \frac{2}{2+3+7} = \frac{2}{12}$

काकली को प्राप्त अर्थ का अनुपातिक भाग का ...... $= \frac{3}{2+3+7} = \frac{3}{12}$

आमिन को प्राप्त अर्थ का अनुपातिक भाग का .... $= \frac{7}{2+3+7} = \frac{7}{12}$

कुल अर्थ = 360

∴ पिंकू पाया = $\overset{30}{\cancel{360}}$ रुपए का $\times \frac{2}{\cancel{12}}$ = 60 रुपए।

काकली पायी = $\overset{30}{\cancel{360}}$ रुपए का $\times \frac{3}{\cancel{12}}$ = 90 रुपए।

आमिन पाया = $\overset{30}{\cancel{360}}$ रुपए का $\times \frac{7}{\cancel{12}}$ = 210 रुपए।

9 सुचित्रा की कक्षा में छात्र-छात्राओं की संख्या का अनुपात 4:3 है, कक्षा में कुल छात्र-छात्राएँ 63 है तो कक्षा में कितने छात्र और छात्राये है उनकी संख्या बताओ। कुछ दिन पश्चात् 3 छात्राएँ भर्ती हुई। अब सुचित्रा की कक्षा में छात्र एवं छात्रा की संख्या का अनुपात कितना होगा।

सूचित्रा की कक्षा के छात्र-छात्राओं की संख्या का अनुपात = 4 : 3

∴ छात्र संख्या का आनुपातिक भाग .... $= \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$

छात्राओ की संख्या का आनुपातिक भाग $= \frac{3}{4+3} = \frac{3}{7}$

∴ 63 छात्र-छात्राओं में कुल छात्र = $\square \times \frac{\square}{\square} = \square$ छात्र।

एवं 63 छात्र-छात्राओं में कुल छात्रा = $\square \times \frac{\square}{\square} = \square$ छात्राएँ।

और 3 छात्राएँ आयी, अब उनकी कुल संख्या = ($\square$ + 3) छात्र = $\square$ छात्राएँ

∴ 3 छात्र भर्ती होने पर छात्र संख्या : छात्रा संख्या = 36 : 30 = 6 : 5

बनाकर देखे— 2.3

1. पिछले वर्ष रसकुण्डू ग्राम में साक्षर और निरक्षर लोगों की संख्या का अनुपात 4:1 था। ग्राम की जनसंख्या 6550 हो तो साक्षर और निरक्षर लोगों की संख्या बताओ।
2. 640 रुपए बिसू एवं अपर्णा में 5:3 अनुपात में बाँटा गया। किसको कितना मिलेगा बताओ ?
3. एक विशेष प्रकार के इस्पात में लोहा और कार्बन का अनुपात 49:1 है। तो 250 क्विंटल इस्पात में लोगों तथा कार्बन का परिमाण कितना है।
4. किसी विद्यालय के 143 छात्र-छात्राओं में गानेवाले तथा नाचने वाले छात्र-छात्राओं का अनुपात 9:2 है। यदि और तीन छात्राएँ गा सकती है, तो गानेवाली तथा नाच करने वाली छात्राओं की संख्या का अनुपात बताओ।
5. 240 मि०ली० डेटाल जल में जल और डेटाल के आयतन का अनुपात 1:3 है। इसके साथ और 60 मि०ली० जल मिला देने पर जल और डेटाल के आयतन का अनुपात कितना होगा।
6. एक व्यक्ति की मासिक आय 24,750 रुपए है, वे 750 रुपए घर भाड़ा देते है तथा बाकी रुपए 3:1 के अनुपात में घर चलाने तथा लड़के-लड़कियों की शिक्षा पर खर्च करते है, तो वे कितने रुपए घर खर्च चलाने में करते है, बताओ।

7. विवेकानंद युवा पुस्तकालय को एक वर्ष में 74,350 रुपए का सरकारी अनुदान मिला, 4,350 रुपए चंदा से मिला एवं पुराने कागज पत्रों को बेचकर 1300 रुपए मिला। यदि सब रुपए नयी किताब खरीदने, पुरानी पुस्तकों की जिल्द-बँधवाने एवं पुस्तकालय के कर्मचारियों को वेतन देने का अनुपात 15:3:2 में खर्च हुआ। तो हिसाब करके देखना होगा कि कितने रुपए की नयी किताब खरीदी गई।

8. किसी एक ट्रेनिंग सेन्टर में 1050 व्यक्ति ट्रेनिंग लेने आये है, उनको तीन बड़े हॉलनुमा कमरे में $11:3:3\frac{1}{2}$ अनुपात में बैठने दिया गया। तो प्रत्येक हालनुमा कमरे में कितने लोग बैठेंगे।

9. 12,100 रुपए मधु, मानस, कुन्तल एवं इन्द्र के बीच 2:3:4:2 अनुपात में बाँट दिया गया। किसको कितने रुपए मिले बताओं।

10. त्रिभुज ABC के तीनों कोणों का योगफल 180^0 है, $\angle BAC$, $\angle ABC$ एवं $\angle ACB$ का अनुपात 3:5:10 है। यदि $\angle BAC$ का मान 10^0 कम एवं $\angle ABC$ का मान 10^0 अधिक हो, तो तीनों कोणों का अनुपात कितना होगा।

11. 9,000 रुपए तीन मित्रों में इस प्रकार बाँटा जाय कि प्रथम मित्र जो पायेगा दूसरा मित्र उसका दोगुना पायेगा। तीसरा मित्र प्रथम दोनों मित्रों के प्राप्त कुल रुपए का आधा पायेगा, तो कौन कितना रुपए पाया।

पहला मित्र 1 रुपए पाने पर दूसरा मित्र 2 रुपए पायेगा, तीसरा मित्र $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ रुपए पायेगा।

$\therefore$ प्रथम मित्र का प्राप्त रुपए : दूसरे मित्र का प्राप्त रुपए : तीसरे मित्र का प्राप्त रुपए

$$= 1 : 2 : \frac{3}{2}$$

$$= 2 : 4 : 3$$

12. हमारे गाँव के रास्ते की मरम्मत करने के लिए चार वर्ष में खर्च रुपए का अनुपात यदि 2:4:3:2 हो एवं उन चार वर्षों में यदि 132 लाख खर्च हुआ, तो दूसरे वर्ष कितने रुपए खर्च हुए है। प्रथम एवं तीसरे वर्ष कुल कितने रुपए खर्च हुए बताओं।

13. विनय बाबू ने अपने अवसर ग्रहण के समय 1,96,150 रुपए पाये। उन्होंने 20,000 रुपए विद्यालय के पुस्तकालय को दान कर दिए एवं बाकी रुपए को अपनी पत्नी, पुत्र तथा पुत्री में 5:4:4 में बाँट दिए, तो बताओं कि किसको कितने रुपए दिए।

14. आमिनूर चाचा ने अपने 35 कट्ठा जमीन में 4:3 के अनुपात में बैगन और परवल की खेती किया है। प्रति कट्ठा बैगन से 150 रुपए तथा प्रति कट्ठा पटल से 125 रुपए लाभ किए। आमिनूर चाचा के कुल जमीन से बैगन और परवल के खेती करके लाभ के परिमाण का अनुपात बताओं।

3. समानुपात

सोफी के पास 24 बैर हैं। मानू के पास 18 जामुन है। सोफी ने मानू को 4 बैर दिया। लेकिन मानू ने 3 जामुन सोफी को दिया।

मैंने अधिक बैर दिये, लेकिन कम संख्या में जामुन पाया।
हमलोग किस तरह बंटवारा किए, देखें।

सोफी के पास कुल बैर की संख्या : दिए गए बैर की संख्या

= 24 : 4

= 6 : 1

मानू के कुल जामुन की संख्या : दिए गए जामुन की संख्या

= □ : □

= 6 : 1

अब समझा कि दोनों स्थिति में अनुपात एक ही है।

आज मानू ने 4 कलम 28 रु० में खरीदा। सोफी ने 12 कलम खरीदा। लेकिन सोफी को 84 रुपया देना पड़ा। किसके कलम का दाम अधिक है, हिसाब करके देखें।

गणित की भाषा में,

कलम की संख्या	कलम का मूल्य
4	28
12	84

हमलोगों के कलमों की संख्या का अनुपात = 4 : 12

= □ : □

अर्थात् मानू के कलमों की संख्या : सोफी के कलमों की संख्या = 1 : 3

लेकिन मानू के कलमों का मूल्य : सोफी के कलमों का मूल्य = 28 : 84

= □ : □

दोनों ही अनुपात □ अर्थात् दोनों के कलमों का मूल्य बराबर है।

क्योंकि, 4 : 12 और 28 : 84 समान है अतः इसके पद जैसे 4, 12, 28 और 84 □ है।

लिखेगे 4 : 12 :: 28 : 84

क्योंकि, 4, 12, 28, 84 समानुपाती पद है अतः इसके पद जैसे 4, 12, 28, 84 समानुपाती पद है।

यहाँ 4 हुआ □ पद, 12 □ पद, 28 □ पद, और 84 □ पद।

4 और 84 का अन्य नाम है।

4 और 84 को इस समानुपात का □ पद कहा जाता है
एवं 12 और 28 को □ पद कहा जाता है।

4 : 12 :: 28 : 84 इस समानुपात के चारों पदों को
प्रथम पद × □ पद = द्वितीय पद × □ पद।

1 आज मेरे पिताजी सुबह 5 कि०ग्रा. चावल 255 रुपये में खरीद कर लाये है। लेकिन मेरे चाचा 410 रुपये में 10 कि०ग्रा. चावल खरीदा है। दोनों ने एक ही दाम पर चावल खरीदा है या नहीं हिसाब करके देखें।

पिताजी द्वारा खरीदा गया चावल का परिमाण : चाचा द्वारा खरीदा गया चावल का परिमाण
= 5 : 10 = □ : □

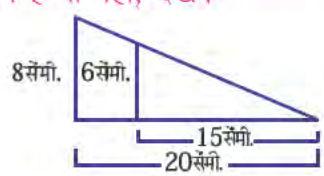
पिताजी द्वारा खरीदा गया चावल का मूल्य : चाचा द्वारा खरीदा गया चावल का मूल्य
= 255 : 410 = 51 : 82

देखते है कि अनुपात समान नहीं है अर्थात् राशि चारों समानुपात नहीं है। अत: पिताजी एवं चाचा द्वारा खरीदे गए चावल का मूल्य अलग-अलग है।

2 6 सें०मी० और 8 सें०मी० दो लाठियों की छाया की लम्बाई क्रमश: 15 सें०मी० और 20 सें०मी० है। लाठियों की लम्बाई के साथ छाया की लम्बाई का अनुपात समान है या नहीं, देखें।

दो लाठियों की लम्बाई का अनुपात = 6 : 8 = 3 : 4

दोनों लाठियों की छाया की लम्बाई का अनुपात = 15 : 20
= 3 : 4



∴ दोनो अनुपात समान है अर्थात् लाठी की लम्बाई तथा उसकी छाया की लम्बाई □ है।

स्वयं करो - 3.1

1) नीचे के अनुपात समान है या नहीं। चारों संख्या समानुपाती है या नहीं।
   (a) 7 : 2 एवं 28 : 8, (b) 9 : 7 एवं 18 : 14, (c) 1.5 : 3 एवं 4.5 : 9,
   (d) 7 : 3 एवं 5 : 2, (e) 3ab : 4aq एवं 6b : 8q, (f) 5.2 : 6.5 एवं 4 : 5,
   (g) 3y : 7y एवं 12p : 28p, (h) 5pq : 7pr एवं 15s : 21q [जहाँ a, q, y, p, r शून्य नहीं है]
2) एक आयताकार चित्र की लम्बाई 10 सें०मी० तथा चौड़ाई 6 सें०मी०। चित्र की लम्बाई और चौड़ाई 2 सें०मी० बढ़ाया गया। अत: आयताकार चित्र की लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात एक ही रहेगा या नहीं, देखें।
3) प्रणव बाबू 500 ग्रा० चीनी 17.50 रु० में खरीदे एवं दीपेन बाबू 2 कि०ग्रा० 70 रुपये में खरीदे। चीनी के परिमाण और मूल्य समानुपात में है या नहीं, देखें।
4) खाली स्थान भरो— (i) 5 : 7 :: 25 : □ (ii) 6 : 7 :: □ : 35 (iii) 21 : 28 :: 3 : □
   (iv) 9 : 24 :: □ : 8

चार संख्याएँ समानुपात है या नहीं, देखें।

5, 7, 10 और 14 से समानुपात बनाओ।

3 5, 7, 10 और 14 समानुपात है या नहीं—

10 : 14 = 5 : 7

∴ 5 : 7 :: 10 : 14

यहाँ बाह्य पदों का गुणनफल = 5 × 14 = 70
मध्य पदों का गुणनफल = 7 × 10 = 70
∴ बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

अत: चारो संख्यायें समानुपात है।

4 5 , 10 , 7 और 14 समानुपात है या नहीं, देखें—

5 : 10 = 1 : 2
7 : 14 = 1 : 2
∴ 5 :10 :: 7 : 14

यहाँ बाह्य पदों का गुणनफल = 5 × 14 = ☐
मध्य पदों का गुणनफल = 10 × 7 = ☐
∴ बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

अत: चारो संख्यायें समानुपात है।

5 7, 5 ,14 और 10 समानुपात है या नहीं, देखें—

7 : 5 = 14 : 10
∴ 7 :5 :: 14 : 10
∴ 7, 5, 14 और 10 समानुपात है।

यहाँ बाह्य पदों का गुणनफल = 5 × 7 = 35
मध्य पदों का गुणनफल = 14 × 10 = 140
∴ बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

6 10, 5, 14 और 7 समानुपात है या नहीं, देखें—

10: 5 = 2 : 1, 14: 7= 2 : 1, ∴ 10: 5 = 14 : 7, ∴ 10 :5 :: 14 : 7

∴ चारों संख्या समानुपात में होगी, यदि बाह्य दोनो पदों का गुणनफल = मध्य दोनों पदों का गुणनफल हो।
प्रथम पद × चतुर्थ पद = द्वितीय पद × तृतीय पद

चार संख्या समानुपात रहने पर चार अलग-अलग समानुपात बना सकेगें
जैसा— (i) 5 : 7 :: 10 : 14 (ii) 5 :10:: 7 : 14
(iii) 7 : 5 :: 14 : 10 (iv) 10 :5 :: 14 : 7

स्वयं करो - 3.2

1) स्वयं जाँच करो, 7 , 5 , 14 और 10 समानुपात है या नहीं।
2) स्वयं जाँच करो, 10 , 5 , 14 और 7 समानुपात है या नहीं।
3) स्वयं जाँच करो, 14 , 5 , 10 और 7 समानुपात है या नहीं।

संख्याओं से समानुपात बनाओं—

6 **2, 3, 4** और **6** से भिन्न-भिन्न समानुपात बनाओ।

संख्यायें	बाह्य पद	मध्य पद	बाह्य पदों का गुणनफल =मध्य पदों का गुणनफल	समानुपात	भिन्न आकार
2, 3, 4, 6	2, 6	3, 4	$2 \times 6 = 3 \times 4$	2:3 :: 4: 6	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$
3, 2, 6, 4	3, 4	2, 6	$3 \times 4 = 2 \times 6$	3:2 :: 6:4	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$
2, 4, 3, 6	2, 6	4, 3,	$2 \times 6 = 4 \times 3$	2:4 :: 3:6	$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$
4, 2, 6, 3	4, 3	2, 6	$4 \times 3 = 2 \times 6$	4:2 :: 6:3	$\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$

7 ऊपर की तरह घर बनाकर **5, 15, 10** और **30** से विभिन्न प्रकार के समानुपात बनाओ [स्वयं करो]

5, 15, 10, 30					

8 **7, 8, 14** और **16** से भिन्न-भिन्न समानुपात बनाओ [स्वयं करो]

7, 14, 8, 16					

9 **9, 11, 27** और **33** से भिन्न-भिन्न समानुपात बनाओ [स्वयं करो]

9, 11, 27, 33					

दूसरे तरह से देखें, चार बीजगणितीय संख्यायें समानुपाती हो तो उनमें क्या सम्पर्क है।

i) a, b, c और d इन चारों अनिर्दिष्ट बीजगणितीय संख्या (इनका मान शून्य नहीं) समानुपाती होने पर a:b :: c:d अर्थात् $= \frac{a}{b} :: \frac{c}{d}$

दोनों तरफ $b \times d$ से गुणा करने पर, ad = bc होगा।

अर्थात् **प्रथम पद × चतुर्थ पद = द्वितीय पद × तृतीय पद**

ii) ad = bc

या $\frac{ad}{ab} = \frac{bc}{ab}$ [दोनो तरफ ab से भाग देने पर]

या d:b :: c:a

∴ c:a :: d:b

iii) ad = bc

या $\frac{\cancel{a}d}{\cancel{a}c} = \frac{b\cancel{c}}{a\cancel{c}}$ [दोनो तरफ cd से भाग देने पर]

या d:c :: b:a

∴ b:a :: d:c

iv) ad = bc

या $\frac{a\cancel{d}}{c\cancel{d}} = \frac{b\cancel{c}}{\cancel{c}d}$ [दोनो तरफ cd से भाग देने पर]

∴ a:c :: b:d

∴ बाह्य दोनों पदों का गुणनफल = मध्य के दोनों पदों का गुणनफल होने पर चारों संख्याएँ समानुपाती होगी एवं चार अलग-अलग समानुपात बना सकते है।

यदि a, b, c, d चार अर्निदिष्ट बीजगणितीय समानुपाती संख्या का दोनों मध्यपद समान हो अर्थात् b = c हो तो क्या पाते हैं, देखें।

∴ a : b :: b : d होगा अर्थात् $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$

अथवा, $ad = b^2$ होगा [दोनों तरफ b × d से गुणा करने पर]

फिर, बाह्य दोनों पदों का स्थान बदलने पर पायेंगे d : b = b : a अर्थात् $\frac{b}{d} = \frac{b}{a}$

अथवा $ad = b^2$ होगा [दोनों तरफ b × a से गुणा करने पर]

इस प्रकार के अनुपात को क्या कहेंगे ?

इस प्रकार के अनुपात को क्रमिक अनुपात कहते है

10 3, 6 और 12— क्रमिक समानुपात है या नहीं, देखें

3 : 6 :: 6 : 12

यहाँ प्रथम पद 3, द्वितीय पद 6 तथा तृतीय पद 12 है।

अत: क्रमिक समानुपात होगा प्रथम पद : द्वितीय पद = द्वितीय पद : तृतीय पद

जैसे- 3 कलम का मूल्य 30 रुपये हो तो 30 कलम का दाम 300 रु० होगा।

कलम की संख्या का अनुपात 3 : 30 या 1 : 10

कलम के दाम का अनुपात 30 : 300 या 1 : 10

अत: 3 : 30 :: 30 : 300

अर्थात् 3, 30, 300 क्रमिक समानुपात हैं।

लेकिन a, b और c तीनों अनिर्दिष्ट बीजगणितीय संख्यायें (जिनका मान शून्य नहीं) क्रमिक समानुपाती होने पर तीनों में क्या सम्पर्क होगा, देखें—

a, b और c क्रमिक समानुपाती है—

$\therefore$ a : b = b : c

$\therefore$ a × c = b × b

$\therefore$ $ac = b^2$

हम पाये, **प्रथम पद × तृतीय पद = मध्य पद का वर्ग (मध्य पद)^2**

11 2, 4 और 8 क्रमिक समानुपाती है या नहीं देखें—

$2 \times 8 = 16 = (4)^2$

अर्थात् प्रथम पद × तृतीय पद = (मध्य पद)^2

$\therefore$ 2, 4, और 8 क्रमिक समानुपात में।

> दूसरे तरह से,
> 2 : 4 = 1 : 2
> 4 : 8 = 1 : 2
> $\therefore$ 2 : 4 :: 4 : 8
> $\therefore$ 2, 4, 8 क्रमिक समानुपात है

12 2, 6 और 12 क्रमिक समानुपाती है या नहीं, देखें—

2 × 12 = □

6 × 6 = □

क्योंकि प्रथम पद × तृतीय पद ≠ □^{2}

$\therefore$ 2, 6 और 12 क्रमिक समानुपात में नहीं है।

> दूसरे तरह से,
> 2 : 6 = □ : □
> 6 : 12 = □ : □
> $\therefore$ 2 : 6 ≠ 6 : 12
> $\therefore$ 2, 6, 12 क्रमिक समानुपात है

स्वयं करें - 3.3

नीचे की संख्यायें क्रमिक अनुपात में है या नहीं एवं समानुपात लिखों—

(i) 5, 10, 20 (ii) 8, 4, 2 (iii) 7, 14, 28 (iv) 81, 9, 18 (v) 4, 6, 12 (vi) 4, 10, 25

समानुपाती रहने वाली संख्याओं में से समानुपाती नहीं रहने वाली संख्याओं को खोजे—

13 **चार समानुपाती संख्याओं में से तीन पद दिए रहने पर चतुर्थ पद जानने की चेष्टा करें।**

प्रथम पद 3, द्वितीय पद 6, तृतीय पद 7 होने पर चतुर्थ पद जानने की चेष्टा करें—

3 : 6 :: 7 : चतुर्थ पद

$\therefore$ $\frac{3}{6} = \frac{7}{\square}$

लिख सकते है, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{7}{\square}$

$\therefore$ चतुर्थ पद = 14

> दूसरे तरह से,
> प्रथम पद × चतुर्थ पद = द्वितीय पद × तृतीय पद
> $\therefore$ प्रथम पद × चतुर्थ पद = 6 × 7 = 42
> हम जानते है दो संख्याओं का गुणनफल 42,
> एक संख्या 3 होने पर
> दूसरी संख्या = 42 ÷ 3 = $\frac{\cancel{42}^{14}}{\cancel{3}}$ = 14
> $\therefore$ चतुर्थ पद = 14
>
> **चतुर्थ पद = $\frac{\text{द्वितीय पद} \times \text{तृतीय पद}}{\text{प्रथम पद}}$**

14 $\square$, 8, 30, 20 — संख्या चारों यदि समानुपात हो, तो प्रथम पद क्या है निकालें।

प्रथम पद : 8 :: 30 : 20

$\frac{\text{प्रथम पद}}{8} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{\square}{8} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ प्रथम पद = 12

दूसरे तरह से,
प्रथम पद × चतुर्थ पद = द्वितीय पद × तृतीय पद
$\therefore$ प्रथम पद × चतुर्थ पद = 8 × 30 = 240
चतुर्थ पद = 20
$\therefore$ प्रथम पद = $\frac{240}{20}$ = 12

चतुर्थ पद = $\frac{\text{द्वितीय पद × तृतीय पद}}{\text{चतुर्थ पद}}$

15 अगर किसी समानुपात में तृतीय पद न रहे अर्थात् 5 : 8 :: ✱ : 64 हो तब इस समानुपात में ✱ (संख्या नहीं) पद अर्थात् तृतीय पद क्या होगा जानने की चेष्टा करें

5 : 8 :: ✱ : 64

लिख सकते है, $\frac{5}{8} = \frac{\square}{64}$

$\therefore$ भिन्न के रूप में पाते है,
तृतीय पद (✱) = 40

दूसरे तरह से,
प्रथम पद × चतुर्थ पद = प्रथम पद × चतुर्थ पद
$\therefore$ द्वितीय पद × तृतीय पद = प्रथम पद × चतुर्थ पद
8 × तृतीय पद = 5 × 64
$\therefore$ तृतीय पद = $\frac{5 \times \overset{8}{\cancel{64}}}{\cancel{8}}$ = 40

चतुर्थ पद = $\frac{\text{प्रथम पद × चतुर्थ पद}}{\text{द्वितीय पद}}$

अब समानुपात से अन्य तीन पदों के मान से द्वितीय पद का मान कैसे पायेंगे देखेंगे।

16 16 : ✱ :: 12 : 3 हो, तो उस समानुपात में ✱(संख्या नहीं) पद अर्थात् द्वितीय पद खोजें।

16 : ✱ :: 12 : 3 भिन्न रूप में $\frac{16}{✱} = \frac{12}{3}$

अत: $\frac{16}{\square} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1}$

भिन्न के रूप में पाते है, द्वितीय पद = 4

दूसरे तरह से,
द्वितीय पद × तृतीय पद = प्रथम पद × चतुर्थ पद
द्वितीय पद × तृतीय पद = 16 × 3
अत:,द्वितीय पद = $\frac{\overset{4}{\cancel{16}} \times \cancel{3}}{\cancel{12}\,\cancel{4}}$ = 4

चतुर्थ पद = $\frac{\text{प्रथम पद × चतुर्थ पद}}{\text{तृतीय पद}}$

हमलोगों की संख्या लेकर मजेदार खेल में मुसकान ने एक मजेदार चीज किया। मैं केवल दो संख्या दूंगा। दूसरी संख्या खोजकर क्रमिक समानुपाती बनाने की कोशिश करे।

17 तीन क्रमिक संख्याओं में प्रथम पद 9, द्वितीय पद 6 हो तो तृतीय पद क्या होगी ?

9, 6 और तृतीय पद क्रमिक समानुपात है, $\therefore$ 9 : 6 :: 6 : तृतीय पद

बाह्य दोनों पदों का गुणनफल = दोनो मध्य पदो का गुणनफल

$\therefore$ 9 × तृतीय पद = 6 × 6

अत: तृतीय पद = $\frac{\overset{2}{\cancel{6}} \times \overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{9}\,\cancel{3}}$ = 4

अब 8, ✱, 18 क्रमिक समानुपात में है।
✱ (न रहने वाली संख्या) धनात्मक पद अर्थात् मध्य पद निकालने की कोशिश करे।

जबकि 8, ✱ और 18 क्रमिक समानुपात में है, अत: $(\text{मध्य पद})^2 = 8 \times 18 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$\therefore$ मध्य पद $= \sqrt{2\times2\times2\times2\times3\times3} = 2\times2\times3 = 12$

$\therefore$ मध्य पद हुआ [12]

12 को 8 और 18 का मध्य समानुपाती कहा जाता है।

स्वयं करें —3.4

क्रमिक समानुपाती तीन संख्यायें	समानुपात में प्रकट	भिन्न के रूप में प्रकट	✱ (संख्या नहीं) धनात्मक पद
5, 10, ✱	5 : 10 :: 10 : ✱	$\frac{5}{10} = \frac{10}{✱}$	$\frac{10\times10}{5} = \square$
8, ✱, 4.5	8 : ✱ :: ✱ : 4.5	$\frac{8}{✱} = \frac{✱}{4.5}$	$\sqrt{8\times4.5} = \sqrt{36} = \square$
✱, 8, 16		$\frac{✱}{8} = \frac{8}{16}$	$\frac{8\times8}{16} = \square$
25, ✱, 81			
$\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$, ✱			
$\frac{2}{7}$, ✱, $\frac{16}{21}$			
9, 12, ✱			
1.5, ✱, 13.5			

समानुपात में विभिन्न प्रकार के सम्पर्क खोजे—

18 6 कि.ग्रा. दाल का मूल्य 240 रुपये, 30 कि.ग्रा. दाल 1,200 रुपये में मिलेगी।

दाल के परिमाण और मूल्य के बीच सम्पर्क।

दाल का परिमाण बढ़ने पर मूल्य भी [ ]।

फिर दाल का परिमाण घटने पर मूल्य भी [ ]।

दाल के परिमाण का अनुपात 6 : 30 = 1 : 5

दाल के मूल्य का अनुपात 240 : 1200 = 1 : 5

दाल का परिमाण और मूल्य दोनों राशि एकमुखी वृद्धि या ह्रास (अर्थात् परिमाण बढ़ने पर दाल का मूल्य बढ़ेगा या परिमाण कम होने पर मूल्य कमेगा) जो समानुपात बना है वह सरल समानुपात बना है वह सरल समानुपात है अर्थात् दाल का परिमाण और दाल का मूल्य सरल अनुपात में है।

19 15 मीटर कपड़े से 5 फ्राक तैयार होने पर 2 फ्राक तैयार करने में कितने मीटर कपड़ा लगेगा, हिसाब करें।

गणित की भाषा में समस्या हुई

फ्राक की संख्या	कपड़े का परिमाण
5	15
2	✱

फ्राक की संख्या बढ़ने पर कपड़े का परिमाण ☐। फिर फ्राक की संख्या कम होने पर कपड़े का परिमाण ☐।

फ्राक की संख्या के साथ कपड़े का परिमाण सरल अनुपात में है,

$\therefore$ 5 : 2 :: 15 : ✱

अत: $5 \times$ चतुर्थ पद $= 2 \times 15$

चतुर्थ पद $= \frac{2 \times \cancel{15}^{3}}{\cancel{5}} = 6$ $\therefore$ 2 फ्राक बनाने में 6 मीटर कपड़े की जरूरत है।

स्वयं करे—3.5

1) सुमित 2 कापियाँ 14 रुपये में खरीदा। तो 7 कापियाँ वह कितने रुपये में खरीदेगा।
2) एक जीप गाड़ी 320 कि०मी० की दूरी 8 घंटा में तय करती है। तो वह जीप गाड़ी 120 कि०मी० दूरी कितने घंटे में तय करेगी, बताओ।
3) 6 कि०ग्रा० स्टेनलेस स्टील बनाने में 720 ग्रा० क्रोमियम लगता है। 11 कि०ग्रा० स्टेनलेस स्टील बनाने में कितना क्रोमियम लगेगा।
4) 10 लीटर शरबत में 3 लीटर शीरप है। 5 लीटर शरबत बनाने में कितना लीटर शीरप लगेगा।
5) स्वयं एक सरल समानुपात को एक समस्या के रूप में तैयार करके उसका हल करो।

समानुपात में दूसरे प्रकार का सम्पर्क खोजें—

आज हम 4 मित्र मिलकर सारा दिन अपने कक्षा को रंगीन कागज से सजायेंगे। हमें यह काम खत्म करने में 6 घंटा लगेगा, और 2 मित्र हमारे साथ इस काम में शामिल हो गये। अब इस काम को खत्म करने में हमें 6 घंटा से ☐ (कम/अधिक) समय लगेगा।

क्योंकि निर्दिष्ट काम को खत्म करने के लिए आदमी की संख्या बढ़ने पर समय कम लगेगा। काम में लोग घटने पर समय ☐ लगेगा। अब उस काम को खत्म करने में 4 घंटा लगा।

गणित की भाषा में समस्या हुई

लोगों की संख्या	समय (घंटा)
4	6
4 + 2 = 6	4

अत: देखते है कि लोगों की संख्या का अनुपात 4 : 6 एवं समय का अनुपात 6 : 4 होता है। ये दोनों अनुपात परस्पर व्यस्त (विपरीत) अनुपात है। इसलिए उन दोनों अनुपात को लेकर समानुपात बनाने पर एक अनुपात एवं दूसरे का व्यस्त (विपरीत) अनुपात लेना पड़ेगा।

इस प्रकार परस्पर सम्पर्क युक्त दो राशियों का एक अनुपात यदि दूसरे के विपरीत अनुपात के समान हो तो विपरीत समानुपात बनाते है। अर्थात् लोगों की संख्या समय का परिमाण विपरीत अनुपात में है।

20 एक मकान को रंग करने में 22 श्रमिकों को 10 दिन का समय लगता है। किन्तु 11 श्रमिक उस मकान को कितने दिन में रंग करेंगे ?

गणित की भाषा में समस्या हुई—

श्रमिकों की संख्या	आवश्यक समय (दिन)
22	10
11	?

मकान को रंग करने में श्रमिकों की संख्या अधिक होने पर, समय ☐ लगेगा, श्रमिकों की संख्या और दिन की संख्या विपरीत समानुपात में है।

समानुपात में प्रथम सम्पर्क के विपरीत अनुपात से पाते है।

$$11 : 22 = 10 : ?$$

बाह्य दोनों पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

अत: 11 × चतुर्थ पद = 22 × 10

चतुर्थ पद $= \frac{\cancel{22}^{\,2} \times 10}{\cancel{11}} = 20$

∴ 11 श्रमिक 20 दिन में रंग कर देंगे।

बनाकर देखें—3

1. खाली घरों को भरो :

चार संख्यायें	समानुपाती	समानुपाती नहीं
8, 10, 16, 20	8, 10, 16, 20	
25, 30, 12, 15		25, 30, 12, 15
5, 7, 25, 35		
4, 10, 30, 18		
5, 10, 16, 20		
9, 15, 18, 30		

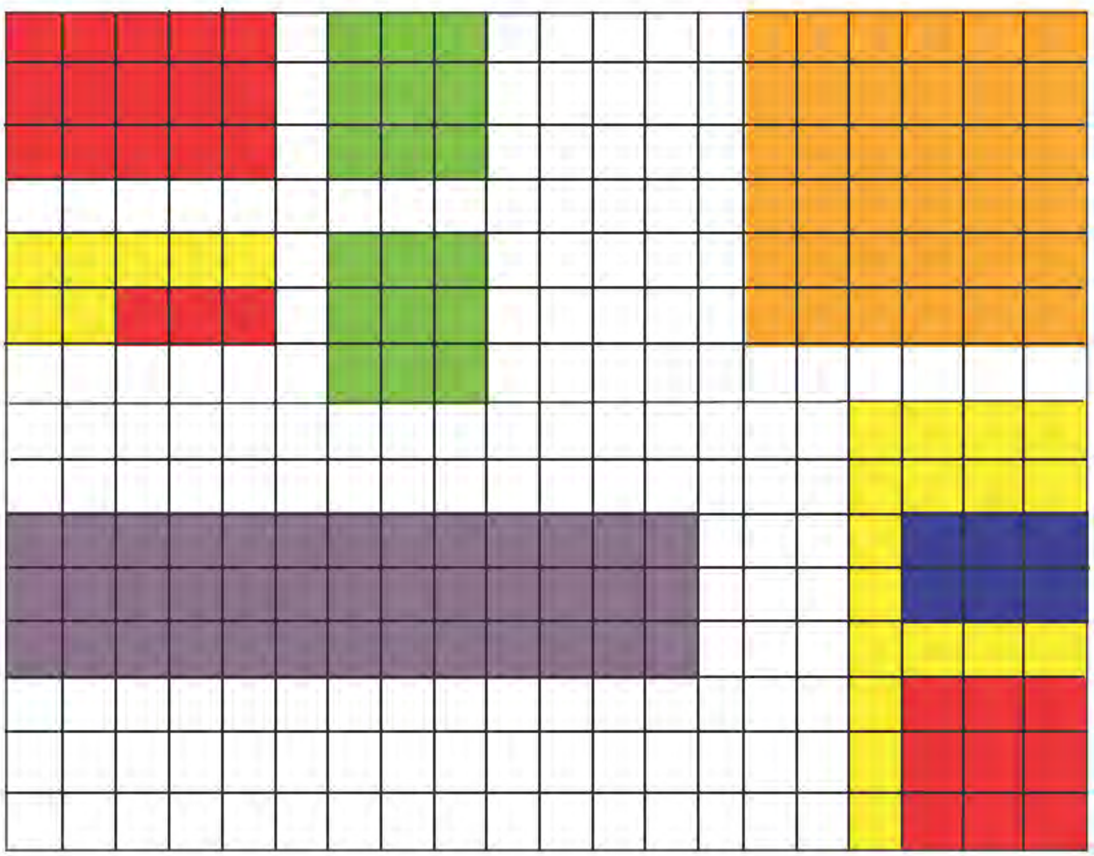
2. 8 व्यक्ति एक काम को 15 दिन में कर सकते है। अत: हिसाब करके देखें कि 10 व्यक्ति उस काम को कितने दिन में कर सकते है।
3. कुछ परिमाण का भोजन 12 लोगों में 20 दिन चलता है। तो 40 लोगों में कितना दिन चलेगा।
4. अरुणबाबू अपने खेत को 16 हल बैल से 10 दिन में जोतवाए है। तो उस खेत को 8 दिन में जोतवाने के लिए कितने हल बैल की जरूरत पड़ेगी।

5. एक राहत शिविर में 4,000 लोगों के लिए 190 दिनों की खाद्य सामग्री है। 30 दिन बाद 800 लोग दूसरे जगह चले गए। तो बचा हुआ खाद्य पदार्थ बचे लोगों में कितना दिन चलेगा।

6. 3 छाता या 1 कुर्सी का मूल्य 600 रुपये है। 2 छाता एवं 2 कुर्सी का मूल्य कितना होगा।

7. आज हम अपने कक्षा में उपस्थिति और अनुपस्थिति का अनुपात निर्णय करेंगे। कक्षा छः के छात्रों की उपस्थिति और अनुपस्थिति का अनुपात निर्णय करेंगे। दोनों अनुपात समान है या नहीं। चारों संख्या समानुपात है या नहीं, देखें।

8. विभिन्न रंग के घरों की संख्या गिनकर नीचे के प्रश्नों का उत्तर दो—



(**a**) लाल और नीले रंग के घरों की संख्या का अनुपात कितना है?

(**b**) बादामी और बैगनी रंग के घरों की संख्या का अनुपात कितना है?

(**c**) लाल और हरे रंग के घरों का अनुपात कितना है?

(**d**) बादामी और पीले रंग के घरों का अनुपात कितना है?

(**e**) कौन से चार रंगों के घरों की संख्या समानुपात में है?

9. दो प्रकार के शरबत में शीरप और जल का अनुपात 2 : 5 और 6 : 10 है। कौन शरबत ज्यादा मीठा है।

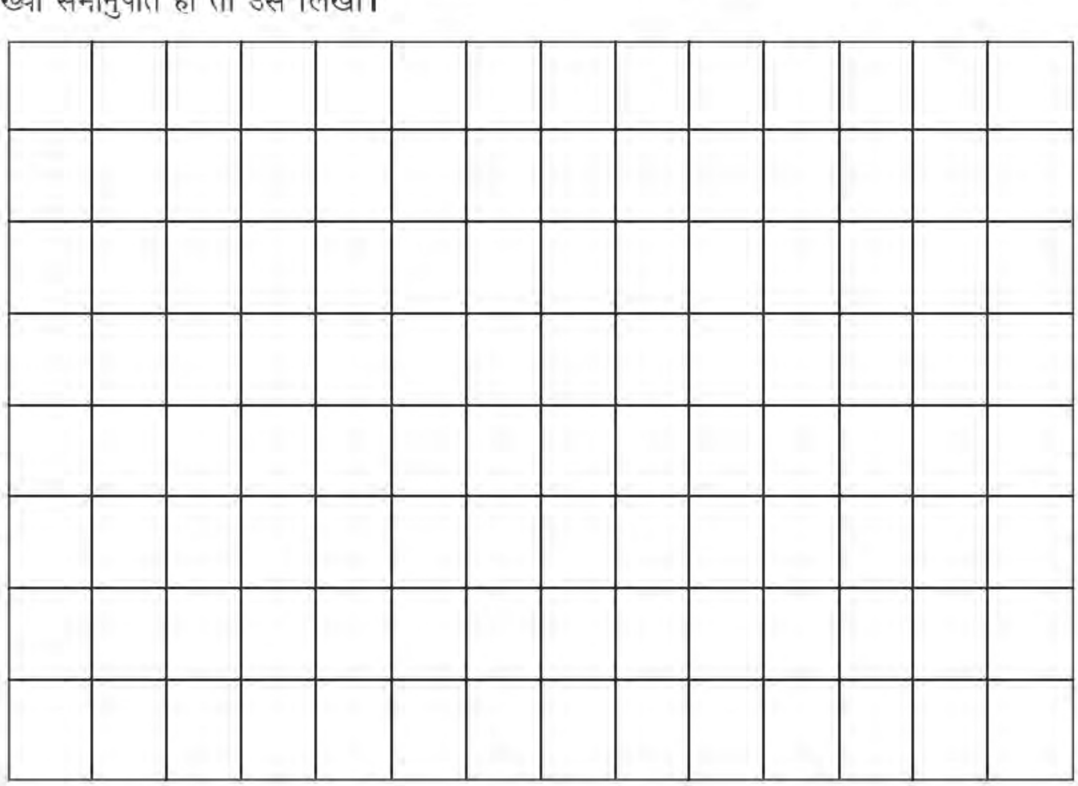
10. जल जमकर वर्फ बनने से उसका आयतन 10 % बढ़ता है। कुछ मात्रा में जल और उससे बने वर्फ के आयतन का अनुपात कितना है।

11. मेरी उम्र 12 वर्ष एवं मेरे पिताजी की उम्र 42 वर्ष है दोनों के उम्र का अनुपात कितना होगा, लिखो।

12. प्रीतम की कहानी की पुस्तकों एवं स्कूल वाली पुस्तकों की संख्या का अनुपात 2 : 5 है। प्रीतम के पास कहानी की पुस्तकों की संख्या 4 है तो उसके स्कूल वाली पुस्तकें कितनी है?

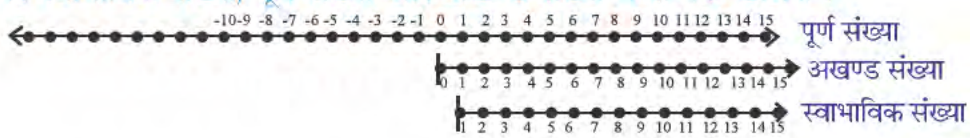
13. माला बनाने के लिए जावा और गेंदा फूल कुल मिलाकर 105 है। गेंदा और जवा फूल की संख्या का अनुपात 3 : 4 है, तो कितने जावा और गेंदा फूल है, बताओ। कितने जावा फूल मिला देने से दोनों फूलों की संख्या का अनुपात एक समान होगा।

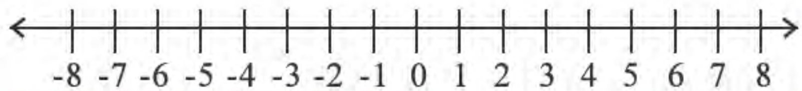
14. नीचे के घरों को अपने मन के अनुसार पाँच प्रकार के रंगों से रंग करो। पाँच प्रकार के रंगों से दो प्रकार के रंगों के घर की संख्या का अनुपात लिखो। उन अनुपातों में कौन गुरू अनुपात, कौन लघु अनुपात और कौन साम्यानुपात है लिखो। उस अनुपात से यदि चार प्रकार के रंग किये गये घरों की संख्या समानुपात हो तो उसे लिखो।



4. पूर्ण संख्याओं का जोड़, घटाव, गुणा और भाग

संख्या रेखा पर स्वाभाविक संख्या, पूर्ण संख्या और अखण्ड संख्या में सम्पर्क खोजना :





1 ठीक आगे और बाद की पूर्ण संख्या लिखे —

ठीक आगे की संख्या	बीचवाली संख्या	ठीक बादवाली संख्या
4	5	6
	1	
	0	
	-3	
	-6	
	-16	

स्वयं करो - 4.1

(i) संख्या रेखा पर दो धनात्मक पूर्ण संख्या को जोड़ने के लिए प्रथम संख्या के स्थान से और ☐ की ओर जाना पड़ता है।

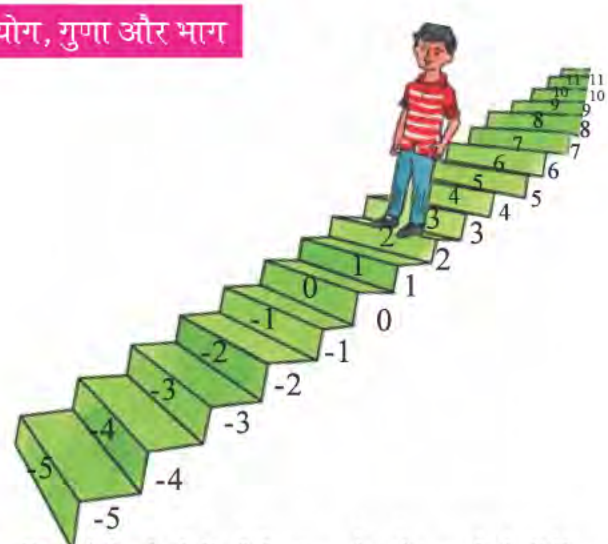
(ii) संख्या रेखा पर दो ऋणात्मक पूर्ण संख्या योग करने के लिए प्रथम संख्या के स्थान से और ☐ की ओर जाना पड़ता है।

(iii) संख्या रेखा पर दो धनात्मक पूर्ण संख्या को घटाने के लिए प्रथम संख्या के स्थान से ☐ की ओर जाना पड़ता है।

(iv) संख्या रेखा पर दो ऋणात्मक पूर्ण संख्या को घटाने के लिए प्रथम संख्या के स्थान से ☐ की ओर जाना पड़ता है।

2 नीचे के खाली घरो को पूरा करो :

पूर्ण संख्या	विपरीत पूर्ण संख्या
5	-5
2	☐
-6	☐
6	☐
11	☐



आज छोटू और मानाई ने तय किया है कि वे दोनों सीढ़ी पर चढ़ने और उतरने से विभिन्न संख्या का मजा बनायेंगे। सबसे पहले छोटू सीढ़ी पर चढ़ेंगा और मानाई हिसाब रखेगा। संख्या गिनने के पहले उनलोगों ने सीढ़ी पर संख्या को लिख दिया।

छोटू 0 नम्बर सीढ़ी पर खड़ा था।

छोटू पहले दो धाप ऊपर चढ़ा। $0 + (+2) = +2$

छोटू अभी +2 नम्बर सीढ़ी पर है। 2 स्वाभाविक संख्या या धनात्मक पूर्ण संख्या या अखण्ड संख्या है।

अब इसबार छोटू 3 धाप नीचे उतर आया। छोटू (−3) धाप चढ़ा।

छोटू अब ऋणात्मक पूर्ण संख्या नम्बर की सीढ़ी पर चड़ा है।

$(+2) + (-3) = -1$ छोटू —1 नम्बर सीढ़ी पर आया।

छोटू अब और कितना घर जायेगा कि —5 नम्बर सीढ़ी पर पहुँचेगा।

$(-5) - (-1) = -5 + 1 = -4$

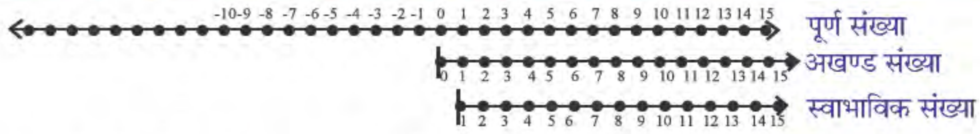
छोटू 4 घर उठेगा अर्थात् 4 घर उतरेगा।

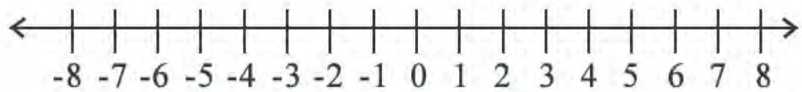
छोटू ☐ पर उठने पर फिर 0 नम्बर की सीढ़ी पर आएगा।

3 छोटू ऊपर नीचे चढ़ने उतरने के घरों को पूरा करो —

प्रक्रिया	शुरु	+(+2)	+(−3)	−(+4)	☐	+(−6)	☐	☐	−(−12)	☐
उत्तर	0	+2	−1	−5	0	☐	−12	−8	☐	☐
उत्तर संख्या की प्रकृति	पूर्ण संख्या	स्वाभाविक संख्या या अखण्ड संख्या	ऋणात्मक पूर्ण संख्या	ऋणात्मक पूर्ण संख्या						

स्वाभाविक संख्या, पूर्ण संख्या और अखण्ड संख्या के बीच सम्पर्क मिला—





4 अब हमलोग स्वयं मानाई के सीढ़ी पर उठने-चढ़ने के घरो को पूरा करेंगे —

प्रक्रिया	शुरु	+(−5)	+(−3)	+(+3)	+(+7)	−(−4)	+(−13)	−(+5)	☐	−(+7)
उत्तर	+3	☐	☐	(−2)	(+5)	+9	☐	−9	0	☐
उत्तर की संख्या की प्रकृति	स्वाभाविक संख्या या पूर्ण संख्या या अखण्ड									

मानाई के योजना से नीचे के घरों में (≠ या =) चिन्ह बैठायें —

(+3) + (-5) ☐ (-5) + (+3)	∴ पूर्ण संख्या के योग विनिमय नियम मानकर चले लेकिन
(+4) - (-4) ☐ (-4) - (+4)	पूर्ण संख्या का वियोग ☐ नियम मानकर नहीं चलता है।

∴ a और b कोई भी पूर्ण संख्या होने पर $a + b = b + a$ लेकिन $a - b \neq b - a$

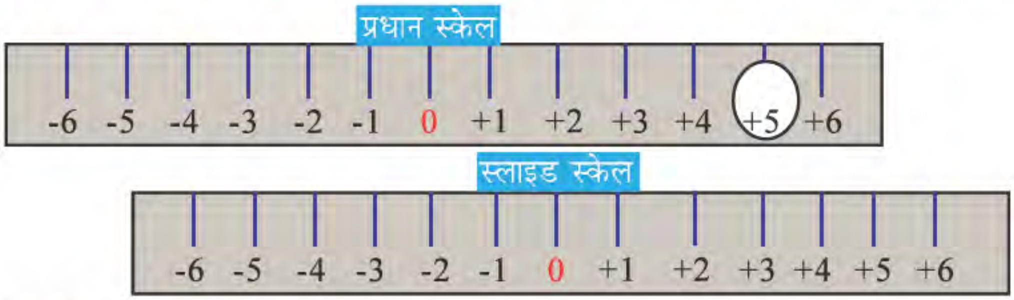
स्वयं करों

पिचबोर्ड से स्केल बनाये और संख्या रेखा पर जोड़ घटाव करें —

पिचबोर्ड और सफेद आर्ट पेपर से ऊपर दिए गए स्केल की तरह दो स्केल तैयार करों। प्रथम स्केल का नाम प्रधान स्केल। द्वितीय स्केल का नाम स्लाइड स्केल।

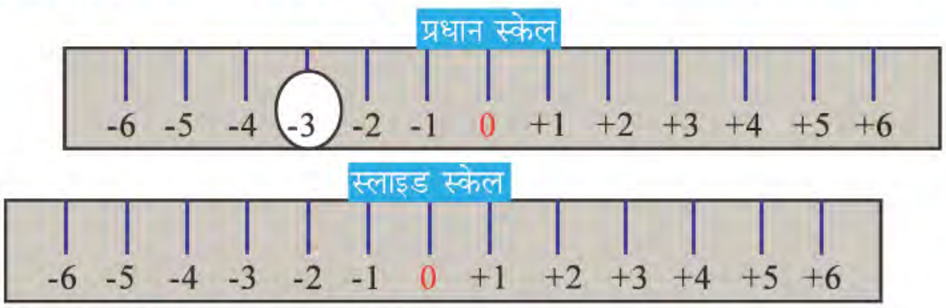
5 दोनों स्केल की सहायता से (i) (+2) + (+3), (ii) (-1) + (-2), (iii) - 2 - (- 4) निर्णय करो।

(i) प्रधान स्केल के (+2) में, स्लाइड स्केल के 0 दोनों को मिलाकर स्लाइड स्केल देखेंगे, स्लाइड स्केल का (+3) प्रधान स्केल के जिस चिन्ह के साथ मिल जायेगा, उसी चिन्ह का मान (+2)+(+3) का मान निर्देश करेगा।



दोनों स्केल से पाते है, (+2) + (+3) = +5

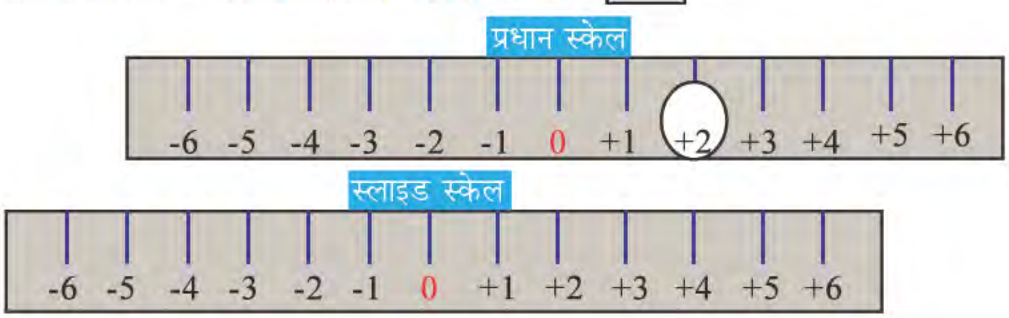
(ii) पहले की तरह प्रधान स्केल का (-1), स्लाइड स्केल का 0 चिन्हों को मिलाकर स्लाइड स्केल का (-1) चिन्ह प्रधान स्केल के जिस चिन्ह से मिल जायेगा, उस चिन्ह का नाम इसके मान को निर्देश करेगा।



दोनों स्केल से पाते है, (-1) + (-2) = (-3)

(iii) - 4 का विपरीत + 4 अर्थात -(- 4) = + 4

∴ दोनों स्केल से पाते है, - 2 - (- 4) = (-2) + (+4) = ☐

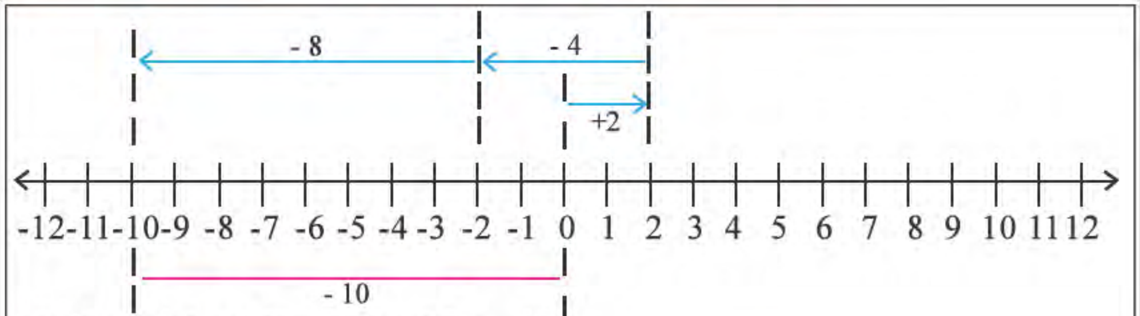


दोनों पिचबोर्ड के स्केल से मान निर्णय करें।

(i) (+ 4) + (+8) **(ii)** (-9) + (+6) **(iii)** (-6) + (-2) **(iv)** (+8) - (-2) **(v)** (-8) - (- 2)

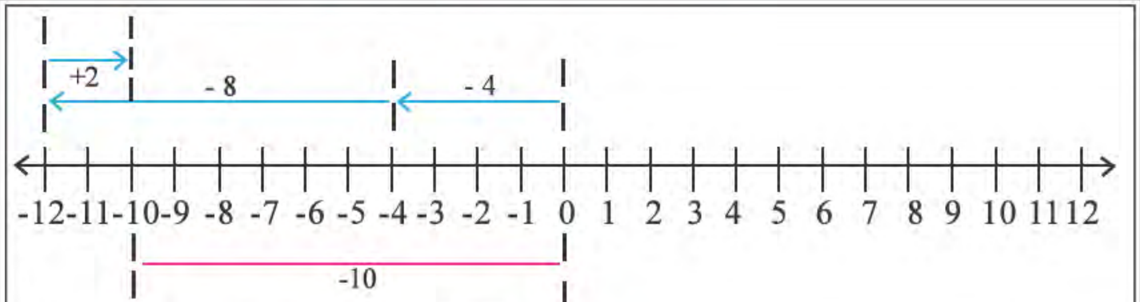
6 अब संख्या रेखा किसी भी तीन पूर्ण संख्या को जोड़कर उसके साधारण नियम को खोजे —

संख्या रेखा की सहायता से {(+2) + (-4)} + (- 8) का मान निर्णय करो—



{(+2) + (-4)} + (-8) = (-2) + (-8) = -10

किन्तु यदि ऐसा हो (+2) + {(-4) + (-8)} तो क्या पाते है देखे,



(+2) + {(- 4) + (- 8)} = (- 2) + ☐ = -10

हम पाते है {(+2) + (- 4)} + (- 8) = (+2) + {(- 4) + (- 8)}

संख्या रेखा खींच कर मान निकाले :

{(-6) + (-2)} + (+8) = ☐

(-6) + {(-2) + (+8)} = ☐

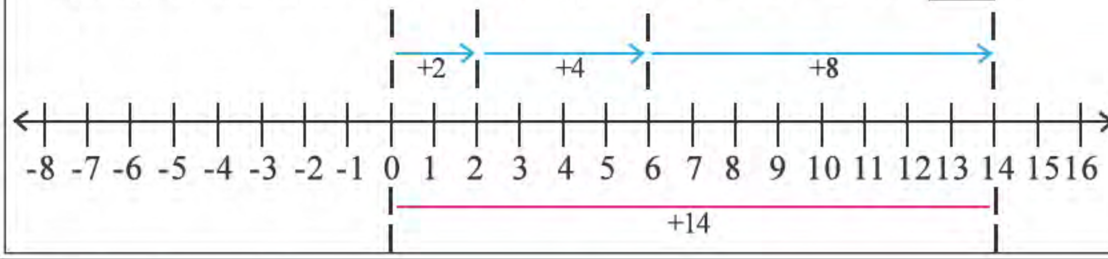
स्वयं अन्य तीन पूर्ण संख्या लेकर योग के संयोग नियम की जाँच करें।

∴ पूर्ण संख्या का योग संयोग नियम मान कर चले।

अर्थात a, b और c तीन पूर्ण संख्या हो तो, $(a+b) + c = a + (b+c)$

7 संख्या रेखा से $\{(+2) - (-4)\} - (-8)$ के मान को जाँच करो —

$\{(+2) - (-4)\} - (-8) = \{(+2) + (+4)\} + (+8) = (+6) + (+8) = \square$



फिर से संख्या रेखा पर देखे —

$(+2) - \{(-4) - (-8)\} = (+2) - \{(-4) + (+8)\} = (+2) - (+4) = (+2) + (-4) = -2$

(स्वयं संख्या रेखा बनाकर मान निकाले)

$\therefore \{(+2) - (-4)\} - (-8) \neq (+2) - \{(-4) - (-8)\}$

स्वयं अन्य कोई तीन पूर्ण संख्या लेकर संख्या रेखा पर वियोग करें तथा जाँच करें कि पूर्ण संख्या का वियोग संयोग नियम मानकर नहीं चलता है। (स्वयं करें)

संख्या रेखा पर वियोग द्वारा पाये, पूर्ण संख्या का वियोग $\square$ नियम मानकर नहीं चलता है।

$\therefore$ a, b और c कोई तीन पूर्ण संख्या होने पर $(a-b) - c \neq a - (b - c)$

स्वयं करें - 4.2

1. बॉयें के साथ दाहिने तरफ के नियमों का सम्पर्क मिलाओं :

(i) $(+6) + (-2) = (-2) + (+6)$	(i) पूर्ण संख्या का योग वियोग नियम मानकर चलता हैं।
(ii) $(-8) - (+2) \neq (+2) - (-8)$	(ii) पूर्ण संख्या का योग विनिमय नियम मानकर चलता है।
(iii) $\{(-1) - (-11)\} - (-12) \neq (-1) - \{(-11) - (-12)\}$	(iii) पूर्ण संख्या का वियोग विनिमय नियम मानकर नहीं चलता है।
(iv) $\{(+3) + (-7)\} + (-11) = (+3) + \{(-7) + (-11)\}$	(iv) पूर्ण संख्या का वियोग संयोग नियम मानकर नहीं चला है।

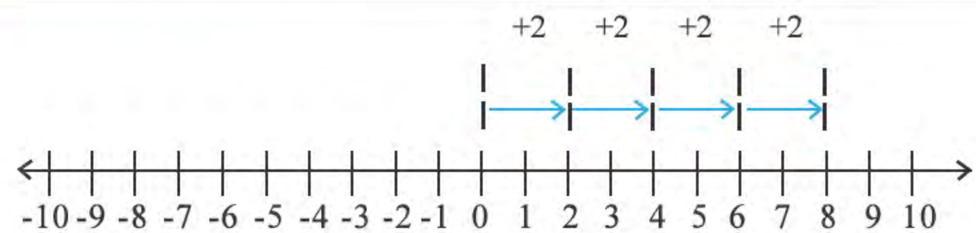
2. एक ऐसी ऋणात्मक पूर्ण संख्या लिखो जो दो ऋणात्मक संख्या के योग के बराबर हो।
3. एक ऐसी ऋणात्मक पूर्ण संख्या लिखो जो दो धनात्मक पूर्णसंख्या के वियोग के बराबर हो।
4. एक ऐसी ऋणात्मक पूर्ण संख्या लिखो जो दो ऋणात्मक पूर्ण संख्या के वियोग के बराबर हो।

आज पोली के छत पर एक आलोचना सभा का आयोजन किया गया है। 40 चेयर रखी जायेगी। लेकिन पंक्ति में 4 और स्तम्भ 5 चेयर रखने पर अर्थात् 8×5 की तरह रखने से छत पर नहीं रखा जा सकता है। अत: 5×8 की तरह अर्थात् पंक्ति में 5 एवं स्तम्भ में 4 रखने पर छत पर रखा जा सकता है।

यह कैसे सम्भव हुआ ?
8×5 = 5×8

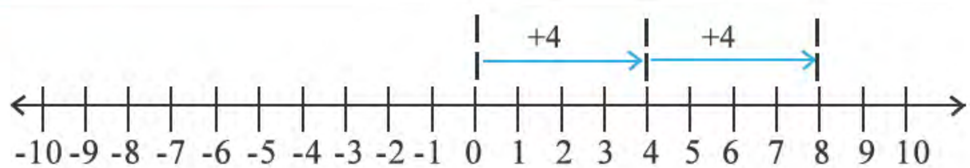
यदि a और b दो पूर्ण संख्या हो तो a×b = b×a अर्थात् पूर्ण संख्या का गुणा विनिमय नियम मानकर होता है। सख्या रेखा पर पूर्ण संख्या का गुणा करें।

8 4×2 का मान निकालें।



∴ संख्या रेखा से पाते है – 4×2 = (+2) + (+2) + (+2) + (+2) = +8

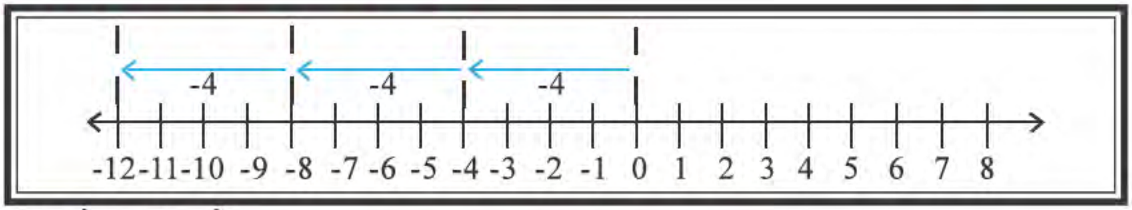
9 2×4 का मान निकालें।



∴ संख्या रेखा पर हम पाते है – 2×4 = (+4) + (+4) = +8

∴ 4×2 = 2×4, अर्थात् इस क्षेत्र में भी पूर्ण संख्या के गुणा के विनिमय नियम की आवश्यकता है।

$3\times(-4)$ का मान संख्या रेखा पर खोजें —



संख्या रेखा पर पाये

$3\times(-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12 = -(3\times4)$

फिर $2\times(-3) = \boxed{-3} + \boxed{-3} = \boxed{-6} = -(2\times3)$

$2\times(-3)$ का मान निर्णय करते समय पहले 2×3 का मान निकालकर सामने ऋणात्मक चिन्ह बैठाया।

$3\times(-5) = \square + \square + \square = \square = -\square \times \square$

स्वयं करें - 4.3

(i) $6\times(-8) = \square = -48$ **(ii)** $7\times(-3) = \square = \square$ **(iii)** $9\times(-12) = \square = \square$

$\therefore$ a और b दोनों पूर्ण संख्या होने पर **$a\times(-b) = -(a\times b)$**

अब दूसरे तरीके से गुणा करें —

$3\times3 = 9$
$2\times3 = 6 = 9 - 3$
$1\times3 = 3 = 6 - 3$
$0\times3 = 0 = 3 - 3$
$-1\times3 = 0 - 3 = -3$
$-2\times3 = -3 - 3 = -6$

पाते है, $3\times(-2) = -6 = (-2)\times3$

$\therefore$ a और b कोई भी दो पूर्ण संख्या होने पर **$a\times(-b) = (-a)\times b = -(a\times b)$**

जाँच करें

(i) $(-4)\times3 = 4\times(-3) = \square$ (ii) $6\times(-8) = \square = \square$ (iii) $7\times(-3) = \square = \square$

(iv) स्वंय और 4 उदाहरण देकर जाँच करें।

10 अब $(-4)\times(-3)$ का मान निकालें।

$(-4)\times 3 = -12$

$(-4)\times 2 = -8 = -12 - (-4)$

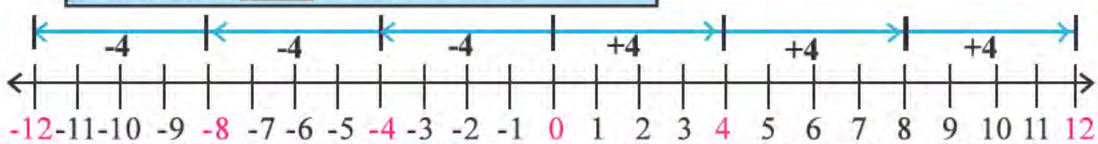
$(-4)\times 1 = -4 = -8 - (-4)$

$(-4)\times 0 = 0 =$ ____ $- (-4)$

$(-4)\times(-1) = 0 - (-4) = 0 + 4 = 4$

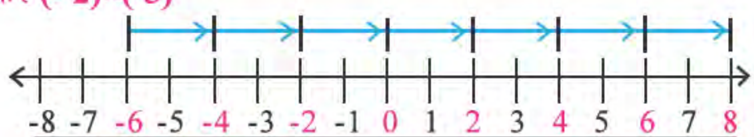
$(-4)\times(-2) = 4 - (-4) = 4 + 4 = 8$

$(-4)\times(-3) =$ ____ $- (-4) = 8 + 4 = 12$



दो ऋणात्मक पूर्ण संख्या का गुणनफल जैसे $(-4)\times(-3)$ के मान निर्णय के क्षेत्र में 4×3 का मान निर्णय करके गुणनफल के आगे धनात्मक चिन्ह लगेगा।

11 जाँच करें $(-2)\times(-3)$



$(-2)\times 3 =$ ____

$(-2)\times 2 =$ ____ $= -6 - (-2)$

$(-2)\times 1 =$ ____ $=$ ____ $-$ ____

$(-2)\times 0 =$ ____ $=$ ____ $-$ ____

$(-2)\times(-1) = 0 - (-2) =$ ____ $+$ ____ $=$ ____

$(-2)\times(-2) =$ ____ $-$ ____ $=$ ____ $+$ ____ $=$ ____

$(-2)\times(-3) =$ ____ $-$ ____ $=$ ____ $+$ ____ $=$ ____

और भी संख्या लेकर जाँच करें।

∴ a और b कोई भी दो पूर्ण संख्या हो, तो **$(-a)\times(-b) = a\times b$**

स्वयं करो - 4.4

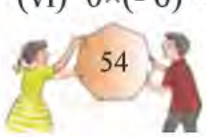
(i) $(-5)\times 2$ से शुरु कर $(-5)\times(-2)$ का मान निर्णय करो।

(ii) $(-7)\times 3$ से शुरु कर $(-7)\times(-3)$ का मान निर्णय करो।

(iii) $(-6)\times 2$ से शुरु कर $(-6)\times(-4)$ का मान निर्णय करो।

(iv) $(-7)\times(-9) =$ ____ (v) ____ $\times(-33) =$ ____

(vi) $0\times(-6) =$ ____ (vii) $(-12)\times(-3) =$ ____ (viii) $(-7)\times 0 =$ ____



स्वंय से रंगीन कार्ड की सहायता से पूर्ण संख्या का गुणा करें

(i) सबसे पहले दो रंगीन वर्गाकार कागज लिया। नीले रंग के एक वर्ग का मान (+1) तथा लाल रंग के एक वर्ग का मान (–1) लिया। ■ → +1; ■ → –1

(ii) कई वर्गाकार कार्ड बनाया जिसके एक तरफ नीले रंग का वर्गाकार कागज तथा दूसरे तरफ लाल रंग का वर्गाकार कागज अटका दिया।

(iii) एक सफेद कागज के आयताकार भुजा के एक तरफ गुण्य तथा गुणक के धनात्मक संख्या के लिए एक लम्बा नीला चिन्ह '____' एवं दूसरे ओर गुण्य या गुणक ऋणात्मक संख्या के लिए एक ही लम्बाई का लाल चिन्ह '____' दिया।

(iv) इस आयताकार भुजा के एक तरफ सब नीला कार्ड लाल कार्ड हो जायेगा जब सब नीले रंग के कार्ड को एकबार उलट देंगे।

स्वंय से (+4) × (+3) निर्णय करें

1. चित्र की तरह आयताकार भुजा के एक तरफ चार नीला चिन्ह तथा दूसरे तरफ 3 नीला चिन्ह खींचा।

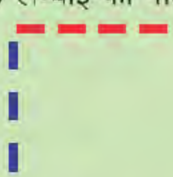
2. अब नीले रंग के एक वर्ग के कार्ड से आयताकार चित्र की तरफ भर दिया। नीले कार्ड की संख्या 12 है।

∴ 12 नीले रंग के कार्ड का मान (+12)

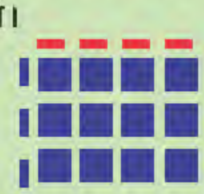
(+4) × (+3) = +12

स्वंय से निर्णय करे (–4) × (+3)

1. चित्र की तरह 4 एक लम्बाई चिन्ह एवं 3 एक लम्बाई का नीला चिन्ह खींचा।

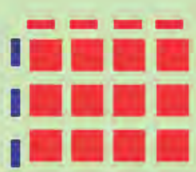


2. क्योंकि एक तरफ लाल चिन्ह है, अतः सब कार्ड उलट जायेंगे तथा सब कार्ड लाल हो जायेंगे।



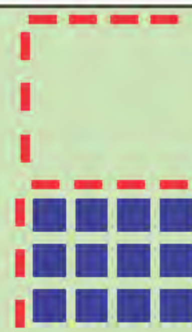
3. लाल रंग के 12 कार्ड पाये, जिसका मान (-12)

∴ (–4) × (+3) = –12 पाया।



स्वयं से निर्णय करे (−4) × (−3)

1. पास के चित्र की तरह 7 लाल चिन्ह खींचा



2. पास के चिन्ह की तरह नीले रंग का एक वर्गाकार कार्ड से आयताकार सजाया

3. जबकि दोनों तरफ लाल चिन्ह है, अत: कार्ड दो बार उलट जायेंगा तथा सब कार्ड फिर नीला हो जायेंगा।

प्रथम बार   दूसरी बार

स्वयं से $(-4) \times (-3) = 12$ पाया

स्वयं करें - 4.5

1) नीचे के घरों को पूरा करों —

×	-4	-6	7	-11	13	-15	-20	25	-30	-40	50
5										-200	
-3							60				
4											
-5											
-8			-56								
7					91				-210		
16											

2) $(-7) \times 7 + 12 \times (-8) = \square$

3) $(-20) \times 11 + (-35) \times 20 = \square$

4) $\square \times \square + \square \times \square = -100$ (स्वयं बैठाये)

5) $4 \times (-4) + (-5) \times 5 = \square$

6) $(-6) \times (-10) + (-4) \times 4 = \square$

7) $\square \times \square + \square \times \square = \square$ (स्वयं बैठाये)

12 इस बार तीन पूर्ण संख्याओं का गुणा करें —

$2\times4\times5 = (2\times4)\times5 = 8\times5 = 40$

$2\times4\times5 = 2\times(4\times5) = 2\times20 = 40 \quad \therefore (2\times4)\times5 = 2\times(4\times5)$

$(-2)\times(-4)\times(-3) = \{(-2)\times(-4)\}\times(-3) = (8)\times(-3) = -24$

$(-2)\times(-4)\times(-3) = (-2)\times\{(-4)\times(-3)\} = (-2)\times(12) = -24$

$\{(-2)\times(-4)\}\times(-3) = (-2)\times\{(-4)\times(-3)\}$

देखते है कि a, b, c, तीन कोई भी पूर्ण संख्या हो तो, abc = (ab).c = a. (bc).

अत: गुणा के क्षेत्र में भी पूर्ण संख्यायें संयोग नियम का पालन करती है।

13 $(-2)\times(-5)\times(-4)\times(-8) = \{(-2)\times(-5)\}\times(-4)\times(-8)$

$= \square \times(-4)\times(-8)$

$= (-40)\times(-8)$

$= 320$

स्वये करें -4.6

(i) $(-6)\times(-5)\times(-7)\times(-3) = \square$ **(ii)** $(-5)\times(-2)\times(-10)\times(-8)\times(-3) = \square$

(iii) $(-11)\times(-12)\times(-2) = \square$ **(iv)** $(-11)\times(-9)\times(-5)\times(-6)\times(-3) = \square$

गुणा करें

$(-1) \times (-1) = +1 = 1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) = \{(-1) \times (-1)\} \times (-1)$

$= (+1) \times (-1) = -1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

$= \{(-1) \times (-1)\} \times \{(-1) \times (-1)\}$

$= (+1) \times (+1) = 1 \times 1 = 1$

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)$

$= 1\times(-1)\times(-1)\times(-1)$

$=(-1)\times(-1)\times(-1)=1\times(-1)= -1$

हम पाते कि जोड़ संख्यक ऋणात्मक पूर्ण संख्या के गुणनफल का चिन्ह धनात्मक एवं बेजोड़ संख्यक ऋणात्मक पूर्ण संख्या के गुणनफल का चिन्ह ऋणात्मक होगा।

नीचे खाली स्थानों को पूरा करें एवं सिद्धान्त लिखे।

गुणनफल देखे		सिद्धान्त
$(7)\times(-2)=-14$	$(-2)\times7=-14$	$7\times(-2)=(-2)\times7$
$8\times(-3)=$ □	$(-3)\times8=$ □	
$(-11)\times12=$ □	$12\times(-11)=$ □	
$(-13)\times(-10)=$ □	$(-10)\times(-13)=$ □	
$(-23)\times0=$ □		
$(-27)\times(-1)=$ □		
$\{(-2)\times(-6)\}\times7=$ □	$(-2)\times\{(-6)\times(7)\}=$ □	
$(-3)\times\{(-5)\times(-9)\}=$ □	$\{(-3)\times(-5)\}\times(-9)=$ □	
$\{(13)\times(-1)\}\times(-2)=$ □		
$(-25)\times1=$ □		
$(-29)\times$ □ $=$ □		
स्वयं पूर्ण संख्या के गुणा का एक उदाहरण दो।		

योजना से पाते है,

a और b जो भी दो पूर्ण संख्या होने पर,

$a \times b = b \times a$

फिर a,b और c कोई तीन पूर्ण संख्या होने पर

$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$ होगा।

14 पूर्ण संख्याओ के गुणा के अन्य कोई नया नियम है या नहीं देखें

$10\times(13+15)=10\times28=280$

फिर, $10\times13+10\times15=130+150=280$

∴ हम पाते है, $10\times(13+15)=10\times13+10\times15$

15 हम एक अन्य पूर्ण संख्या को बनाकर जाँच करें।

$12\times(17+21)=12\times38=456$

$12\times17+12\times21=204+252=456$

∴ $12\times(17+21)=12\times17+12\times21$

∴ हम पाते है, a, b और c तीन पूर्ण संख्या हो तो,

$a\times(b+c)= a\times b + a\times c$ होता है

अर्थात् पूर्ण संख्या का गुण विच्छेद नियम मानकर चलता है।

स्वयं करें — 4.7

1) $9\times(8+3)$ ☐ $9\times8+9\times3$ (= / ≠ बैठाये)
2) $6\times(5+4)$ ☐ $6\times5+6\times4$ (= / ≠ बैठाये)

16 पूर्ण संख्या के क्षेत्र में गुणा के विच्छेद नियम की जाँच करें।

i) $(-5)\times(7+2)=(-5)\times(9)= -45$
$(-5)\times7+(-5)\times2=(-35)+(-10)= -45$
$\therefore (-5)\times(7+2)=(-5)\times7+(-5)\times2$

ii) $(-2)\times\{(-3)+(+2)\}= (-2)\times(-1)=2$
$(-2)\times(-3)+(-2)\times(+2)= 6+(-4)=2$
$\therefore (-2)\times\{(-3)+ (+2)\}=(-2)\times(-3)+(-2)\times(+2)$

iii) $(-11)\times\{(-4)+(-7)\}= \square\times\square=\square$
$(-11)\times(-4)+(-11)\times(-7)= \square+\square = \square$
$\therefore (-11)\times\{(-4)+(-7)\}= \square = (-11)\times(-4)+(-11)\times(-7)$

वास्तव में घनात्मक एवं ऋणात्मक संख्या का व्यवहार

17 आज नीतू एवं मिलन का एक विज्ञान संबंधी प्रतियोगितामूलक परीक्षा था। परीक्षा के प्रश्नपत्र में 12 प्रश्न थे। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर के लिए 6 नम्बर एवं प्रत्येक प्रश्न के गलत उत्तर के लिए –3 नम्बर दिया जायेगा। नीतू 7 सही उत्तर दी है किन्तु 5 उत्तर गलत हुआ है।

मैं कितना नम्बर पाऊंगी ? हिसाब करें।

7 सही उत्तर के लिए पायेगी 7×6 नम्बर = 42 नम्बर

5 गलत उत्तर के लिए पायेगी $5 \times (-3)$ नम्बर = –15 नम्बर

∴ नीतू कुल नम्बर पायेगी, $\{42 + (-15)\}$ नम्बर

= $(42-15)$ नम्बर = 27 नम्बर

मिलन ने 12 प्रश्नों में से 6 सही तथा 6 प्रश्न गलत किया है।

मिलन 6 सही उत्तर के लिए पायेगा = 6×6 नम्बर

= 36 नम्बर

6 गलत उत्तर के लिए पायेगा, $6\times(-3)$ नम्बर

= –18 नम्बर

∴ मिलन का कुल नम्बर = $36+(-18)\}$ =18 नम्बर

18 रुमेला ने 12 प्रश्नों में से 4 सही तथा 4 गलत किया है। रुमेला कितना नम्बर पायेगी।

रुमेला 4 सही उत्तर के लिए पायेगी □ × □ = □

4 गलत उत्तर के लिए पायेगी □ × □ = □; ∴ रुमेला का कुल नम्बर = □ – □ = □

19 एक फल विक्रेता ने प्रति कि०ग्राम आम बेचकर 5 रुपए लाभ कमाया। लेकिन प्रति कि०ग्रा० लीची पर 4 रुपए हानि हुआ। उसने 10 कि०ग्रा० आम एवं 14 किलोग्राम लीची बिक्री किया। तो उसको कितना लाभ या हानि हुआ।

आम बेच कर 1 कि०ग्रा० पर लाभ = 5 रुपए।

∴ 10 कि०ग्रा० आम पर लाभ 5×10 =50 रुपऐ।

1 कि०ग्रा० लीची पर हानि = 4 रुपऐ।

∴ 1 कि०ग्रा० लीची पर लाभ –4 रुपऐ।

∴ 14 कि०ग्रा० लीची पर लाभ होगा $14\times(-4)$ रुपऐ।

= –56 रुपऐ

∴ फल बिक्रेता का कुल लाभ = $\{50 + (-56)\}$ रुपऐ

= $(50-56)$ = –6 रुपऐ ∴ फल बिक्रेता को 6 रुपऐ हानि हुआ।

स्वयं करें - 4.8

1) मिनाजूर, तीर्थ और नाफूरा ने एक परीक्षा दिया। उस परीक्षा में 10 प्रश्न थे। परीक्षा में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 नम्बर तथा प्रत्येक गलत प्रश्न के उत्तर के लिए –2 नम्बर मिलेगा।

a) मिनाजूर के 6प्रश्नों के उत्तर सही है और चार प्रश्न गलत है।

b) तीर्थ के 5 प्रश्नों के उत्तर सही है और 5 प्रश्नों के उत्तर गलत है।

c) नाफूरा के 3 प्रश्नों के उत्तर सही है और 7 प्रश्नों के उत्तर गलत है।

कौन कितना नम्बर पायेगा ? निकालो।

2) एक फर्नीचर की दुकान से उस महीने 15 लकड़ी की आलमारी बिक्री हुई है। 10 आलमारियों में से प्रत्येक पर 300 रुपऐ लाभ हुआ। लेकिन बाकी 5 आलमारियों में से प्रत्येक पर 200 रुपऐ की हानि हुई है। उस महीने में दुकानदार को आलमारी बेचकर कितने रुपऐ लाभ या हानि हुआ है।

3) एक कोयला खान में एक लिफ्ट जमीन से शुरु होकर प्रति मिनट 6 मीटर नीचे जाती है। लिफ्ट नीचे उतरना शुरु की और 30 मिनट के पश्चात् उसका अवस्थान कहाँ होगा। यदि लिफ्ट जमीन से 20 मीटर ऊँचाई से शुरु होती है तो 30 मिनट के पश्चात् लिफ्ट का अवस्थान कहाँ होगा।

माना जमीन के ऊपर की दूरी को धनात्मक एवं जमीन के नीचे की दूरी को ऋणात्मक।
क्योंकि लिफ्ट जमीन के नीचे जायेगी।

∴ 1 मिनट लिफ्ट उतरती है 6 मीटर (अर्थात् 6 मीटर जाती है)

30 मिनट में लिफ्ट उतरेगी 6×30 मीटर = 180 मीटर (अर्थात् 180 मीटर जायेगी)

अर्थात् 30 मिनट के बाद 180 मीटर नीचे होगी।

यदि लिफ्ट जमीन से 20 मीटर ऊँचाई से जमीन के नीचे जाती तो,

30 मिनट के पश्चात् लिफ्ट का अवस्थान $\{(-180)+20\}$ मीटर

$= -160$ मीटर

अर्थात् लिफ्ट जमीन से 160 मीटर नीचे रहेगी।

4) दूसरे एक खान में एक लिफ्ट एक मिनट में चार मीटर उतरती है।

(a) एक घंटा के बाद लिफ्ट कहाँ पर होगी।

(b) यदि लिफ्ट जमीन से 15 मीटर ऊपर से उतरती तो 30 मिनट के बाद लिफ्ट कहाँ रहेगी।

20 आज हम 8 मित्र मिलकर चंदा उठाकर झालमूड़ी बनायेंगे। प्रत्येक मित्र 5 रुपऐ करके देंगे। लेकिन तीन मित्र विशेष कारणवश घर चले गए। कितना चंदा उठा निकालो।

चंदा उठा $5\times(8-3)$ रुपऐ $=5\times5$ रुपऐ $=25$ रुपऐ।

फिर $(5\times8-5\times3)$ से क्या पाते है, $(5\times8-5\times3)=40-15=25$

$\therefore 5\times(8-3)=5\times8-5\times3$

दूसरी संख्या लेकर देखे

(i) $2\times\{6-(-2)\}=2\times\{6+2\}=2\times8=16$

$2\times6-2\times(-2)=12-(-4)=12+4=16$

$\boxed{\therefore 2\times\{6-(-2)\}=2\times6-2\times(-2)}$

(ii) $7\times\{(-3)-(-6)\}=7\times(-3+6)=7\times3=21$

$7\times(-3)-7\times(-6)=\square-\square=\square+\square=21$ (खाली जगह भरो)

(iii) $(-9)\times\{(-1)-(-6)\}=(-9)\times\{-1+6\}=(-9)\times5=-45$

फिर $(-9)\times(-1)-(-9)\times(-6)=9-54=-45$

$\boxed{(-9)\times\{(-1)-(-6)\}=(-9)\times(-1)-(-9)\times(-6)}$

हम पाते है, a, b और c कोई तीन पूर्ण संख्या हो तो, $a\times(b-c)=a\times b-a\times c$

(iv) $a=-5$, $b=-2$, $c=3$ लेकर $a(b-c)=a\times b-a\times c$ को जाँचो।

(v) कोई भी चार उदाहरण लेकर $a(b-c)=ab-ac$ को जाँचो।

मन में हिसाब करो

(i) $5\times(13)=5\times(10+3)=5\times10+5\times3=50+15=65$

(ii) $6\times18=6\times(20-2)=6\times20-6\times2=120-12=108$

(iii) $7\times33=7\times(\square+\square)=7\times\square+7\times\square=\square+\square=\square$

(iv) $9\times98=9\times(100-2)=\square\times\square-\square\times\square=\square$

(v) $26\times(-48)=26\ [2-50]=26\times2-26\times50=\square-\square=\square$

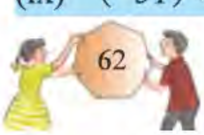
(vi) $(-18)\times(-29)=\square$

(vii) $16\times(25)\times(-4)\times3=25\times16\times(-4)\times3=25\times(-4)\times16\times3$

$=(-100)\times16\times3=(-1600)\times3=-4800$

(viii) $12\times(-50)\times(-2)\times4=\square$

(ix) $(-51)\times(-19)+57=\square$



21 पूर्ण संख्याओं के गुणा करने से क्या पाते है —

5×6=30
- 30÷5= 6
- 30÷6= 5

8×4=32
- 32÷4= □
- 32÷8 = □

(-5)×7 = -35
- -35÷(7)= -5
- -35÷(-5)= □

(-8)×(-6) =48
- 48÷(-8)= □
- 48÷(-6)= □

(-4)×9 = -36
- -36÷(-4)= □
- -36÷(9)= □

(-2)×7 = -14
- -14÷ □ = 7
- -14÷ □ = □

(-2)×(-6) = □
- □ ÷ □ = □
- □ ÷ □ = □

(-9)×(-5) = □
- □ ÷ □ = □
- □ ÷ □ = □

विभिन्न प्रकार के भाग से क्या पायें देखे —

$30 \div 6 = 5$

$35 \div (-7) = -5$

$(-36) \div (-4) = 9$

$(-36) \div (9) = -4$

पाये, धनात्मक संख्या को धनात्मक संख्या से भाग देने पर भागफल धनात्मक संख्या होगी।
फिर, धनात्मक संख्या को ऋणात्मक संख्या से भाग देने पर भागफल ऋणात्मक संख्या होगी।
फिर, धनात्मक संख्या को ऋणात्मक संख्या से भाग देने पर भागफल ☐ संख्या होगी।
फिर, ऋणात्मक संख्या को धनात्मक संख्या से भाग देने पर भागफल ☐ संख्या होगी।

स्वयं से

रंगीन कार्ड से पूर्ण संख्या को भाग करें।

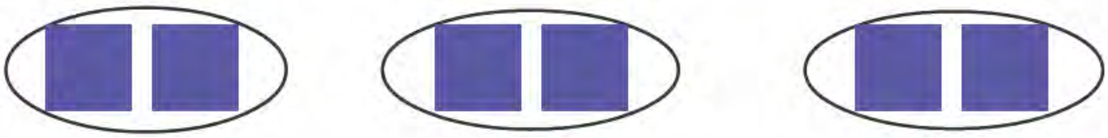
बहुत से वर्गाकार नीला व लाल रंग का कागज काटा। एक ही माप के वर्गाकार पीचबोर्ड कार्ड बनाया जिसके एक तरफ नीला तथा दूसरे तरफ लाल कागज लगा दिया।

नीले रंग के वर्गाकार पिचबोर्ड के कार्ड का मान +1 तथा लाल रंग के वर्गाकार पीच बोर्ड का मान −1 माना।

1) **6 ÷ 3** निर्णय करो

i) 6 नीले रंग के वर्गाकार कार्ड लिया

ii) अब 6 नीले रंग के वर्गाकार कार्ड बोर्ड को 3 समान संख्यक भाग में बाँटा।



प्रथम भाग द्वितीय भाग तृतीय भाग

प्रत्येक भाग में दो नीले रंग का वर्गाकार कार्ड मिला जिसका मान +2

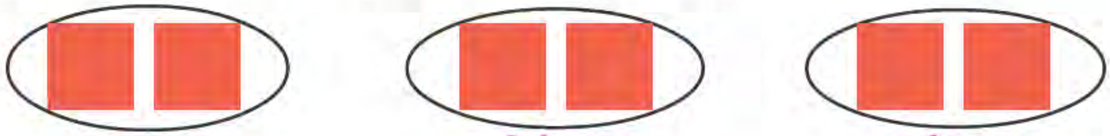
∴ 6÷3=2

2) **6÷(-3) = 2** का मान निर्णय करो —

i) सबसे पहले 6 नीले रंग का कार्ड बोर्ड लिया।

ii) क्योंकि ऋणात्मक पूर्ण संख्या से भाग दिया जा रहा है, अत: 6 नीले कार्ड बोर्ड एकबार उलट देने पर 6 लाल कार्ड हो गया।

iii) अब लाल रंग के कार्ड बोर्डों को बराबर भाग में बाँट दिया।



प्रथम भाग   द्वितीय भाग   तृतीय भाग

प्रत्येक भाग में 2 लाल कार्ड है जिसका मान −2

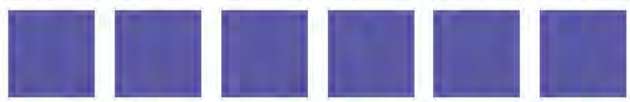
∴ $6 \div (-3) = -2$ पाते है।

3) $(-6) \div (-3)$ का मान निर्णय करो —

i) 6 लाल रंग का पिचबोर्ड कार्ड लिया।

ii) क्योंकि ऋणात्मक पूर्ण संख्या से भाग दिया जा रहा है।

6 लाल रंग के कार्ड बोर्ड एकबार उलट देने से 6 नीला कार्ड हो गया।



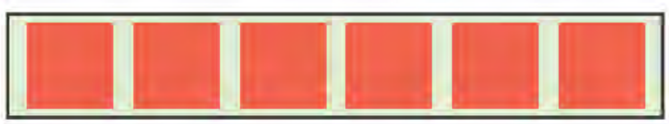
iii) अब नीले कार्डों को तीन बराबर भाग से बांट दिया।

प्रथम भाग   द्वितीय भाग   तृतीय भाग

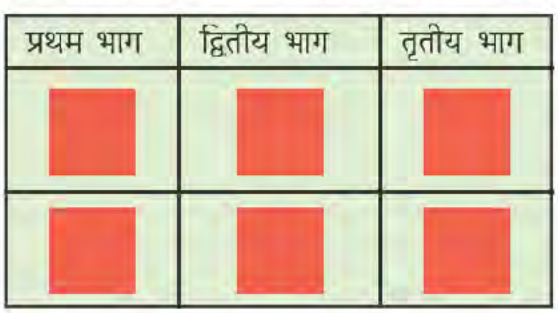
प्रत्येक भाग में दो नीले रंग के कार्ड है जिसका मान 2 ∴ $(-6) \div (-3) = 2$ पाये।

4) $(-6) \div 3$ का मान निर्णय करें।

6 लाल रंग का वर्गाकार कार्डबोर्ड लिया →



6 लाल रंग के कार्ड को तीन बराबर भाग में बांट दिया।



प्रत्येक दल में दो लाल रंग के वर्गाकार कार्ड है जिसका मान −2

∴ $(-6) \div 3 = -2$ पाये।

22 पूर्ण संख्या का भाग

$35 \div 5 = \frac{\cancel{35}^{\,7}}{\cancel{5}} = 7$

$-12 \div 3 = \frac{\cancel{-12}^{\,-4}}{\cancel{3}} = -4$

$27 \div 3 = \frac{\square}{\square} = \square$

$-16 \div 2 = \frac{\square}{\square} = \square$

$(-25) \div 5 = \frac{-25}{5} = -5$

$(-55) \div (-5) = \frac{\cancel{-55}^{\,11}}{\cancel{-5}} = 11$

$(-49) \div 7 = \frac{\square}{\square} = \square$

$(-52) \div (-4) = \frac{\square}{\square} = \square$

नीचे के घरों को भरो :—

भागफल	भागफल की प्रकृति	भागफल	भागफल की प्रकृति
$21 \div (-3) = -7$	ऋणात्मक पूर्ण संख्या	$-25 \div (-3) =$	धनात्मक भिन्न
$(-72) \div 4 = \square$		$(-72) \div 7 = \square$	
$78 \div (-3) = \square$		$(-100) \div 5 = \square$	
$81 \div 9 = \square$		$138 \div (-4) = \square$	
$(-95) \div 4 = \square$		$145 \div 8 = \square$	
$91 \div (5) = \frac{91}{5}$	धनात्मक भिन्न	$196 \div (-6) = \square$	
$42 \div (5) = \square$		$-144 \div (-15) = \square$	
$(-69) \div (7) = -\frac{69}{7}$	ऋणात्मक भिन्न	$-221 \div (-7) = \square$	

पाते है, $21 \div (-3) = -7$ लेकिन $(-3) \div 21 = \frac{3}{21} = -\frac{1}{7}$

$\therefore 21 \div (-3) \neq (-3) \div 21$

a और b दोनों पूर्ण संख्या के लिए $\mathbf{a \div b \neq b \div a}$;

चार संख्याओं को उदाहरण के रूप में लेकर जाँच करें $a \div b \neq b \div a$
अर्थात् संख्या का भाग ______ नियम मानकर नहीं चलता।

23 शून्य को भाग देने पर क्या पाते है, देखें —

क्योंकि शून्य को दो बराबर भाग में बांटने पर शून्य मिलेगा अत: $0 \div 2 = 0$

फिर $0 \div 4 = \square$, $0 \div (-8) = \square$, $0 \div (-11) = \square$

अर्थात् कोई भी पूर्ण संख्या $a \neq 0$ के लिए $\boxed{0 \div a = 0}$

भाग के अन्य धर्मों को देखे

24 $(-12) \div \{(-8) \div (2)\}$ का मान निर्णय करें —

$(-12) \div \{(-8) \div 2)\}$
$= (-12) \div (-4)$
$= 3$

लेकिन, $\{(-12) \div (-8)\} \div 2$
$= (\frac{-12}{-8}) \div 2 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$\therefore (-12) \div \{(-8) \div 2\} \neq \{(-12) \div (-8)\} \div 2$

जाँच करें —

(i) $125 \div \{(-25) \div (5)\} \neq \{125 \div (-25)\} \div 5$

(ii) $36 \div \{18 \div (-2)\} \neq (36 \div 18) \div (-1)$

$\therefore$ a, b और c कोई 3 पूर्ण संख्या के लिए, $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$

अर्थात् अखण्ड संख्या का भाग $\square$ नियम मानकर नहीं होता है।

स्वयं करें - 4.9 किसी भी चार संख्याओं का उदाहरण बनाकर जाँच करें कि पूर्णसंख्या का भाग संयोग नियम मानकर नहीं चलता है।

फिर पूर्ण संख्या के क्षेत्र में भाग के विच्छेद नियम को देखें —

नीचे के संख्या को देखो

$(-30) \div \{(-5) + 2\}$
$= (-30) \div (-3)$
$= 10$

दूसरे तरह से देखे —

$(-30) \div (-5) + (-30) \div 2$
$= 6 + (-15) = 6 - 15$
$= -9$

$\therefore (-30) \div \{(-5) + 2\} \neq (-30) \div (-5) + (-30) \div 2$

$\therefore$ a, b और c कोई भी तीन पूर्ण संख्या के लिए, $a \div (b+c) \neq a \div b + a \div c$

जाँच करें

(i) $16 \div \{(-4) + 2\} \neq 16 \div (-4) + 16 \div 2$

(ii) $(-70) \div \{(7) + (-5)\} \neq (-70) \div (7) + (-70) \div (-5)$

25

$$\{(-5)+2\} \div (-30) = (-3) \div (-30) = \frac{1}{10}$$

$$\{(-5)+2\} \div (-30) = (-5) \div (-30) + (2) \div (-30)$$
$$= \frac{(-5)}{(-30)} + \frac{2}{(-30)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{5-2}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

$$\{(-5)+2\} \div (-30) = (-5) \div (-30) + 2 \div (-30)$$

हम देखते है, a,b,c कोई भी तीन पूर्ण संख्या के क्षेत्र में, $(b+c) \div a = b \div a + c \div a$

अर्थात् पूर्ण संख्या का भाग दाहिना विच्छेद नियम मानकर चलता है किन्तु बाँया विच्छेद नियम नहीं मानता है।

बनाकर देखें — 4

1. मन ही मन में हिसाब करें :

(a) $(-10) \times 4 = \square$ (b) $(-15) \times \square = -90$ (c) $25 \times \square = -125$

(d) $(-16) \times \square = 96$ (e) $(-13) \times \square = -104$ (f) $\square \times 21 = -126$

(g) $\square \times \square = -42$ (h) $\square \times (-30) = 330$ (i) $-26 \div \square = 1$

(j) $\square \div 1 = -29$ (k) $\square \div (-59) = -1$ (l) $87 \div \square = -87$

2. जोसेफ ने एक परीक्षा में 15 प्रश्नों में से 9 प्रश्नों का उत्तर सही लिखा तथा 6 प्रश्नों का उत्तर गलत लिखा। प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 नम्बर पाकर कुल 33 नम्बर पाया। तो प्रत्येक गलत उत्तर में कितने नम्बर दिए गए, बताओ।

जोसेफ कुल नम्बर पाया 33, जोसेफ सही उत्तर दिया 9। प्रत्येक सही उत्तर के लिए नम्बर पाया 5;

$\therefore$ 9 सठीक उत्तर के लिए कुल $9 \times 5 = \square$ पाया।

गलत उत्तर के लिए कुल पाया $45 - 33 = 12$

$\therefore$ 6 गलत उत्तर के लिए पाया 12 नम्बर

$\therefore$ 1 गलत उत्तर के लिए पाया $(-12) \div 6 = \square$

3. रेहाना और सायन दोनों ने परीक्षा दिया है। दोनों के परीक्षा में कुल 12 प्रश्न थे।

(i) रेहाना 8 प्रश्नों का उत्तर सही तथा चार प्रश्नों का उत्तर गलत देकर कुल 36 नम्बर पायी है। वह प्रत्येक सही उत्तर के लिए 6 नम्बर पायी है, रेहाना प्रत्येक गलत के लिए कितना नम्बर पायी, बताओं।

(ii) सायन 6 प्रश्नों का उत्तर सही एवं 6 प्रश्नों का उत्तर गलत दिया है तो वह कुल कितना नम्बर पाया, बताओं —

4. किसी जगह की तापमात्रा 12^0C है। प्रत्येक घंटा समान रूप से तापमात्रा कम होते होते 8 घंटा के पश्चात -4^0C होगा तो वहाँ प्रतिघंटा कितना डीग्री तापमात्रा घटा है, बताओ।

5. एक खान में एक लिफ्ट 4 मिनट में 24 मीटर नीचे जाती है। लिफ्ट यदि समान वेग से चले तब 6 मिनट में कितने मीटर नीचे जायेगी। वह लिफ्ट यदि 10 मीटर ऊपर से नीचे जायेगी तो वह 70 मिनट में वह कितना मीटर नीचे जायेगी।

6. नीचे के खाली स्थानों को पूरा करे —

(**i**) $-16 \div (-2) + \square = -1$

(**ii**) $20 - 50 + \square = -1$

(**iii**) $41 \times (-5) + \square = -3$

(**iv**) $(-9) \times (-3) \times \square = -81$

(**v**) $(-15) \div (-5) - \square = -1$

(**vi**) $(-18) \div \square + 3 = -6$

(**vii**) $\square \div 4 - 2 = -7$

(**viii**) $\square \times (-1) + 9 = 0$

7. दो उदारहण देकर दिखाये कि जो पूर्ण संख्या गुणा के विनिमय नियम मानकर चलती है लेकिन पूर्णसंख्या भाग के विनिमय नियम मानकर नहीं चलती है।

8. दो उदारहण देकर दिखाये कि जो पूर्ण संख्या गुणा के विच्छेद नियम मानकर चलती है लेकिन पूर्ण संख्या भाग के विच्छेद नियम मानकर नहीं चलती है।

9. मान निर्णय करो —

(i) $(-125) \div 5$ (ii) $(-144) \div 6$ (iii) $(-49) \div 7$

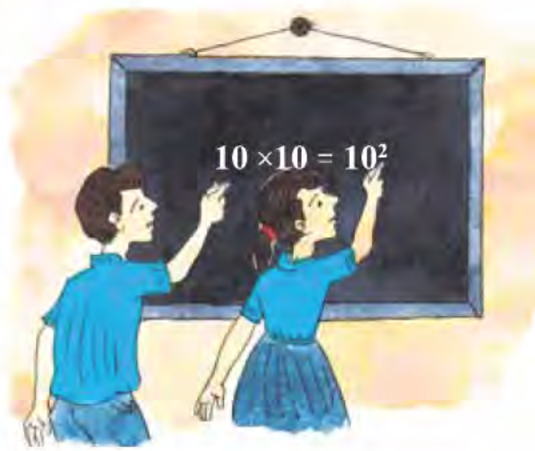
(iv) $225 \div (-3)$ (v) $169 \div (-13)$ (vi) $100 \div (-5)$

(vii) $(-81) \div (-9)$ (viii) $(-150) \div (-5)$ (ix) $(-121) \div (-11)$

(x) $(-275) \div (-25)$

5. सूचकों की धारणा

आज हमारे कक्षा में नसीफा कहानी कहेगी। नसीफा मेरी मित्र है। वह सौर जगत की कहानी जानती है। उसने बतलाया कि जिस पृथ्वी पर हम रहते है उसकी मात्रा 5,970, 000, 000, 000, 000, 000, 000,000 कि०ग्रा० है। लेकिन शुक्र ग्रह की मात्रा 4, 870, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 कि०ग्रा० है। बुध ग्रह का भार 330, 000, 000,000,000, 000, 000, 000 कि०ग्रा० है।



कौन अधिक भारी बतलाओ।

उसने बतलाया कि पृथ्वी से सूर्य की दूरी 149600000 कि०मी० है। लेकिन शुक्र ग्रह तथा सूर्य की दूरी 108.2×1000000 कि०मी० है।

कौन कितनी दूर है आसानी से कैसे कहेंगे ?
यह तो बड़ी संख्या है कैसे हिसाब करें ?

सबसे पहले हम बड़ी संख्या को छोटा करके लिखने की कोशिश करें।

हम जानते है, $10 \times 10 = 10^2$

अत: $10 \times 10 \times 10 = 10^3$ लिख सकते है

$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$ लिख सकते है।

यहाँ 10 को *मूल संख्या* एवं 10 के दाहिने ऊपर लिखी संख्या *घात सूचक* कहलाती है।

जैसे $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ → घात सूचक (5), मूलसंख्या (10)

फिर $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$

1000 का सूचक आकार हुआ 10^3। यहाँ *मूलसंख्या* ______ एवं *घात* ______।

फिर, 10000 का सूचक आकार है ______।

615 को यदि ऐसे लिखे

$615 = 6 \times 100 + 10 + 5 = 6 \times 10^2 + 10 + 5$

इस प्रकार से विस्तार करने को 10- का सूचक विस्तार कहा जाता है।

अतः, $806 = 8 \times 10^2 + 0 \times 10 + 1 \times 6$

1 हम 781, 978, 4533 और 7871 को 10 के सूचक विस्तार करने की चेष्टा करे।

$781 = 7 \times \square + 8 \times 10 + 1 \times \square$

$978 = \square \times 10^2 + 7 \times \square + 1 \times \square$

$4533 = 4 \times 10^3 + 5 \times \square + 3 \times \square + 3$

$7871 = 7 \times \square + 8 \times \square + 7 \times \square + 1$

स्वयं करें—5.1

10 -के सूचक में विस्तारित करो — i) 8275 ii) 90925 iii) 12578 iv) 7858

2 अब 10 के अतिरिक्त अन्य संख्याओं का घात खोजे—

(i) $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

$\therefore$ 81 के सूचक का आकार = □, यहाँ *मूल संख्या* □ और *घात* □

फिर (ii) $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{\square}$

$\therefore$ 243 के सूचक का आकार हुआ = □, यहाँ *मूल संख्या* □ और *घात* □

स्वयं करें—5.2

1) $100 = 10^{\square}$ 2) $27 = 3^{\square}$ 3) $125 = 5^{\square}$

4) $32 = 2^{\square}$ 5) $343 = 7^{\square}$ 6) $121 = \square^{\square}$ 7) $625 = \square^{\square}$

8) $2^3 = \square \times \square \times \square$ 9) $3^4 = \square \times \square \times \square \times \square$

10) $729 = 9^{\square}$

11) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{\square}$

12) $(-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^{\square}$

13) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^{\square}$

$\therefore$ पाये कि a कोई पूर्ण संख्या होने पर,

$a \times a = a^2$ (कहेंगे a का वर्ग)	$a \times a \times a = a^3$ (a का घन कहेंगे)
$\therefore a \times a \times a \times a \times a = a^{\square}$ एवं	$a \times a \times a \times a \times a \times a = a^{\square}$

3 अब नीचे के अंकों को देखे—

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 2^{\square} \times 5^{\square}$

$7 \times 7 \times 7 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 7^{\square} \times 5^{\square}$

$\therefore$ हम पाते है कि a और b कोई दो पूर्णसंख्या हो तो

$a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times b \times b = a^4 \times b^5$ होगा।

अर्थात् $a^3 \times b^3 = a \times a \times a \times b \times b \times b$

4 दूसरी संख्यायें लेकर मौलिक उत्पादक बनाकर सूचक के आकार में प्रकाशित करने की कोशिश करें-

$100 = 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^{\square} \times 3^{\square}$

$50 = 2^{\square} \times 5^{\square}$ $\quad 75 = \square \times \square$ $\quad 500 = \square \times \square$

स्वयं करें—5.3

नीचे की संख्याओं को मौलिक संख्या के सूचक के आकार में लिखो—

1) 24 2) 56 3) 63 4) 72 5) 200

5 सूचक के आकार में प्रकाशित संख्या को छोटे और बड़े रूप में लिखे—

(i) 2^3 व 3^2 —के बीच एक छोटा एवं बड़ा कौन है।

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ $\quad 3^2 = 9$

$\therefore 9 > 8$ $\quad \therefore 3^2 > 2^3$

(ii) 4^3 व 3^4 — में कौन बड़ा एवं छोटा है—

$4^3 = \square$ $\quad (3^4) = \square$

$64 \square 81$ $\quad \therefore 3^4 \square 4^3$ [खाली घर में > या < बैटाओ]

स्वयं करें—5.4

खाली स्थानों में > या < चिह्न बैठाओ।

1) $5^3 \square 3^5$ 2) $6^2 \square 2^6$ 3) $2^4 \square 4^2$,

4) $7^2 \square 2^7$ 5) $3^4 \square 4^3$ 6) $3^5 \square 5^3$

सूचक के धर्म खोजें

$2 \times 2 \times 2 = 2^{\square}$

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$\therefore 2^3 \times 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 2^{3+5} = 2^{5+3}$

$2^2 \times 2^3 = (2\times2) \times (2\times2\times2) = 2^5 = 2^{2+3} = 2^{3+2}$

$2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^7 = 2^{3+4} = 2^{4+3}$

जाँच करें

1) $3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^{4+2}$ 2) $3^5 \times 3^2 = 3^{5+2}$ 3) $(-4)^3 \times (-4)^4 = (-4)^{3+4}$

$\therefore$ a यदि कोई एक पूर्ण संख्या एवं m और n की कोई दो पूर्ण संख्या $a^m \times a^n = a^{m+n}$ होगी।

फिर, $2^5 \div 2^2 = \frac{2^5}{2^2} = \frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 2^{5-2}$

$(-5)^7 \div (-5)^2 = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = (-5)^{\square} = (-5)^{\square - \square}$

$\therefore$ a (शून्य छोड़कर) किसी भी पूर्ण संख्या एवं m और n कोई भी दो पूर्ण संख्या हो तो,
$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ होगा।

स्वयं करें—5.5

1) $2^5 \times 2^7 =$ 2) $(-3)^{18} \times (-3)^{12} =$ 3) $10^8 \times 10^2 =$

4) $2^{15} \div 2^{13} = \square$ 5) $9^{15} \div 9^{14} = \square$ 6) $11^6 \div 11^4 = \square$

दूसरे तरह का धर्म खोजें

1) $2^5 \div 2^5 = \frac{2^5}{5^5} = 1$ फिर $2^5 \div 2^5 = 2^{5-5} = 2^0$

$\therefore 2^0 = 1$

2) $(-5)^6 \div (-5)^6 = 1$

$(-5)^6 \div (-5)^6 = (-5)^{6-6} = (-5)^0$

$\therefore (-5)^0 = 1$

$\therefore$ a शून्य के बिना कोई एक पूर्ण संख्या हो तो $a^0 = 1$

स्वयं करें—5.6

खाली घरों में संख्या लिखो—

1) $9^2 \div 9^2 = \square$ 2) $7^3 \div \square = 1$ 3) $11^0 = \square$

4) $1 = 13^{\square}$ 5) $1 = (-13)^{\square}$

अब सूचक आकार में प्रकाशित संख्या के मूल संख्या को अलग किन्तु एक ही घात का धर्म पाते है, देखे—

$2^2 \times 3^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 6 \times 6 = 6^2 = (2\times3)^2$

$3^3 \times 5^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 3\times 5 \times 5$

$= 3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5 = 15\times 15\times 15 = 15^3 = (3\times5)^3$

रिक्त स्थानों को भरो :

(i) $7^2\times 3^2 = 7 \times7 \times3\times 3 = \square^2 = (7\times3)^{\square}$ (ii) $5^3\times 9^3 = 45^{\square} = (\square\times\square)^3$

(iii) $(-10)^4 \times 9^4 = (-90)^{\square} = (\square\times\square)^4$ (iv) $\square^3 \times 3^3 = (12)^3$

∴ a और b कोई भी पूर्ण संख्या एवं m की कोई एक पूर्ण संख्या होने पर,
$a^m \times b^m = (ab)^m$ होगा

दूसरे तरह का धर्म खोजें

$\frac{2^2}{3^2} = \frac{2\times2}{3\times3} = (\frac{2}{3})\ (\frac{2}{3}) = (\frac{\square}{\square})^2$

$\frac{3^3}{5^3} = \frac{3\times 3 \times3}{5\times 5 \times5} = (\frac{3}{5})^{\square}$

∴ a और b की कोई दो पूर्ण संख्या $[b \neq 0]$ एवं m कोई भी पूर्ण संख्या हो तो,
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$

स्वयं करें—5.7

(i) $6^5 \div 2^5 = \square$ (ii) $\square = 7^2 \div 2^2$ (iii) $10^2 = \square \times \square$

(iv) $(-4)^2 \times 6^2 = \square^2$ (v) $(5)^0 = \square$ (vi) $(\frac{2}{3})^3 = \frac{\square}{\square}$

फिर,

$2^6 \div 2^7 = \frac{2^6}{2^7} = 2^{6-7} = 2^{-1}$

$\frac{2^6}{2^7}\quad \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2\times2\ \times2}\quad \frac{1}{2}$

∴ $2^{-1} = \frac{1}{2}$

फिर, $3^{-1} = \frac{1}{\square}$ [जाँच करे]

$\frac{1}{5} = \square^{-1}$ [जाँच करे]

∴ a शून्य को छोड़कर कोई भी पूण संख्या होने पर
$a^{-1} = \frac{1}{a}$

इसबार किसी पूर्ण संख्या के सूचक का नया धर्म खोजे—

फिर,

$(2^2)^2 = 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2} = 2^4 = 2^{2\times2}$

$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^6 = 3^{2\times3}$

$(4^7)^2 = \square \times \square = \square = 4^{7\times2}$

$(5^6)^4 = \square \times \square \times \square \times \square = 5^{24}$

∴ a कोई भी पूर्ण संख्या एवं m और n दो कोई पूर्ण संख्या हो तो,
$(a^m)^n = a^{m\times n}$

6 9×9 —को 3 के सूचक आकार में विस्तार करो—

$9 = 3^2$

$9 \times 9 = 3^2 \times 3^2 = (3^2)^2 = 3^4$

7 $16 \times 16 \times 16$ —को 4 के सूचक आकार में लिखो—

$16 = 4\times4 = 4^2$

$16 \times 16 \times 16 = 4^2\times4^2\times4^2 = \square = 4^6$

8 $16 \times 16 \times 16$ —को 2 के सूचक के आकार में लिखो—

$16 \times 16 \times 16 = 4^6 = (2^2)^6 = 2^{12}$

9 सूचक से मिले अंकों को कैसे समाधान करेंगे, देखें—

(i) $\frac{2^5 \times 2^7}{(2^5)^2} = \frac{2^{5+7}}{2^{10}} = \frac{2^{12}}{2^{10}} = 2^{12-10} = 2^2 = 4$

(ii) $\frac{(25)^2 \times (25)^4}{5^9} = \frac{(5^2)^2 \times (5^2)^4}{5^9} = \frac{5^4 \times 5^8}{5^9} = \frac{5^{4+8}}{5^9} = \frac{5^{12}}{5^9} = 5^{12-9} = 5^3 = 125$

स्वयं करें—5.8

1) $8 \times 8 \times 8$ —को 2 के सूचक आकार में प्रकाशित करो।
2) $25 \times 25 \times 25 \times 25$ —को 5 के सूचक आकार में प्रकाशित करो।
3) $36 \times 36 \times 36$ —को 6 के सूचक आकार में प्रकाशित करो।
4) 81×81 —को 3 के सूचक आकार में प्रकाशित करो।
5) मान निर्णय करो : (i) $\frac{2^6 \times 3^5}{(6)^5}$ (ii) $\frac{10^3 \times 10^4}{2^5 \times 5^4}$ (iii) $\frac{5^9 \times 5^6}{5^7}$ (iv) $\frac{6^4 \times 3^8}{3^{12}}$

(v) $\frac{25^2 \times 25^5}{5^{10}}$ (vi) $\frac{2^3 \times 3^9}{3^6 \times 6^3}$ (vii) $\left(\frac{a^7}{a^5}\right) \times a^2$ $(a \neq 0)$ (viii) $\frac{3 \times 7^2 \times 2^4}{21 \times 112}$

पृथ्वी का भार 5970, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 = 597×10^{22} कि०ग्रा०।

शुक्र ग्रह का भार 4870, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 = 487×10^{22} कि०ग्रा०।

बुध ग्रह का भार 330, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 = 33×10^{22} कि०ग्रा०।

पृथ्वी से सूर्य की दूरी = 149600000 किमी०।

पृथ्वी से सूर्य की दूरी को सहज सूचक से लिखने की चेष्टा करें—

$$\begin{aligned} 149600000 &= 14960000 \times 10 \\ &= 1496000 \times 10^2 \\ &= 149600 \times 10^3 \\ &= 14960 \times 10^4 \\ &= 1496 \times 10^5 \\ &= \frac{1496}{100} \times 10^5 \times 100 = 14.96 \times 10^7 \end{aligned}$$

$\therefore$ पृथ्वी से सूर्य की दूरी = 14.96×10^7 कि०मी०।

सूर्य से शुक्र ग्रह की दूरी = $108.2 \times 1000000 = 1082 \times 10^5$ कि०मी०।

$$\frac{1082}{100} \times 10^5 \times 10^2 \text{ कि०मी०} = 10.82 \times 10^7 \text{ कि०मी०}$$

फिर, $1496 > 1082$ या $14.96 > 10.82$

$\therefore$ इस प्रकार की बड़ी संख्या को सूचक में प्रकाशित करने से हम आसानी से समझ सकते है कि कौन संख्या बड़ी एवं कौन सी संख्या छोटी है।

बनाकर देखें— 5

1. नीचे के दूरियों को 10 के सूचक में प्रकाशित करो—

सूर्य से बुध ग्रह की दूरी 57900000 कि०मी०। सूर्य से मंगल और वृहस्पति की दूरी क्रमश: 227900000 कि०मी० एवं 778300000 कि०मी०।

2. खाली घरों को भरो-(i) पृथ्वी एवं चन्द्रमा की दूरी 384, 000, 000 मी० = $384 \times 10^{\square}$ मीटर

(ii) शून्य स्थान में प्रकाश का वेग 3,00,000,000 मीटर / सेकेण्ड = $3 \times \square$ मीटर / सेकेण्ड।

3. नीचे की संख्याओं को सूचक आकार में 10 के घात में प्रकाशित करो (दशमलव के पश्चात् 1, 2 और 3 तक)

(i) 978 (ii) 1592170

4. नीचे के विस्तार से संख्याओं को लिखो—

(i) $3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10 + 2$ (ii) $2 \times 10^3 + 3 \times 10 + 5$

(iii) $8 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 6$ (iv) $9 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 7 \times 10$

5. सरल करो एवं प्रत्येक को सूचक आकार में लिखो—

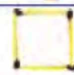
(i) $\dfrac{2^3 \times 3^5 \times 16}{3 \times 32}$ (ii) $[(6^2)^3 \times 6^4] \div 6^7$ (iii) $\dfrac{3 \times 7^2 \times 11^0}{21 \times 7}$

(iv) $\dfrac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ $(a \neq 0)$ (v) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$ (vi) $\dfrac{2^8 \times x^7}{4^3 \times x^3}$ $(x \neq 0)$

6. बीजगणितीय प्रक्रिया

मैं, तीर्थ और सायन आज दियासलाई की काठियों से विभिन्न प्रकार के त्रिभुजाकार, वर्गाकार और आयताकार चित्र बनाएंगे।

इसलिए बहुत सी दियासलाई की काठियों को टेबल पर रखा है। बूलू एवं साबिना भी हमारे इस मजेदार खेल में शामिल हुए।

तीर्थ ने बनाया		4 काठियों की जरूरत।
		□ काठियों की जरूरत।
		□ काठियों की जरूरत।

तीर्थ के इस काठी की सजावट की तरह किसी भी प्रकार के सजावट में कितनी काठियाँ लगेगी जानने की कोशिश करे।

तीर्थ के 1 वर्गाकार चित्र के लिए □ काठियों की जरूरत होगी।

2 वर्गाकार चित्र के लिए 4×2 दियासलाई की काठियाँ लगेगी।

3 वर्गाकार चित्र के लिए 4×3 दियासलाई की काठियाँ लगेगी।

अत: इस प्रकार के x वर्गाकार चित्र के लिए 4×x दियासलाई की काठियाँ लगेगी।

= 4x दियासलाई की काठियाँ लगेगी।

4x — x □ संख्या (चल / ध्रुवक) एवं 4 □ संख्या (चल / ध्रुवक)

लेकिन बुलू ने थोड़ा हटकर किया		→ (3 + 1) काठियों की जरूरत
		→ (3×2 + 1) काठियों की जरूरत।
		→ (3×3 + 1) काठियों की जरूरत।

बूलू के इसी प्रकार काठियों की विभिन्न प्रकार की आकृतियों के लिए कितनी काठियाँ लगेगी। देखे—

बूलू के इस प्रकार के 1 वर्गाकार चित्र के लिए (3 + 1) = 4 काठियों की जरूरत।

लेकिन 2 वर्गाकार चित्र के लिए $(3 \times 2 + 1) = 7$ काठियों की जरूरत।

3 वर्गाकार चित्र के लिए $3 \times 3 + 1 = 10$ काठियों की जरूरत।

x वर्गाकार चित्र के लिए $3 \times x + 1 = (3x + 1)$ काठियों की जरूरत।

$(3x + 1)$ संख्या माला x □ (चल / ध्रुवक), 3 एवं 1 □ संख्या (चल / ध्रुवक)।

साबिना ने जिस तरह की आकृतियाँ बनाई	→ □ काठियों की जरूरत।
	→ □ काठियों की जरूरत।
	→ □ काठियों की जरूरत।

लेकिन सायन ने किया	→ (□ + □) काठियों की जरूरत।
	→ (□ × □ + □) काठियों की जरूरत।
	→ (□ × □ + □) काठियों की जरूरत।।

साबिना एवं सायन के काठियों के किसी भी प्रकार के सजावट के लिए कितनी दियासलाई की काठियों की जरूरत पड़ेगी हिसाब करके देखे—

यह, 4x, $(3x + 1)$ में चल और ध्रुवक संख्या दोनों ही है। इसे क्या कहा जाता है?

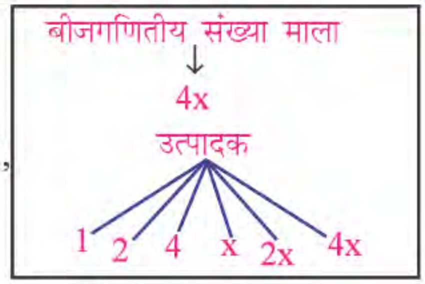
4x, $(3x + 1)$ इन्हें बीजगणितीय संख्या माला कहा जाता है। कुछ चल व कुछ ध्रुवक के जोड़, घटाव, गुणा और भाग की सहायता से बीजगणितीय संख्या माला बनती है। $(3x + 1)$ इस बीजगणितीय संख्या माला में 3x एक पद एवं 1 दूसरा पद है।

स्वयं करें—6.1

हमलोग बीजगणितीय संख्या माला लिखे एवं पदों को खोजें।

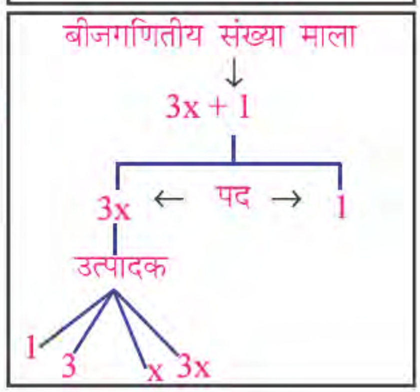
4x, 3x + 1, 2x + 1, 6p - 1, 3y + 6.

बीजगणितीय संख्या माला	पद	पद संख्या	बीजगणितीय संख्या माला का प्रकार	चल	ध्रुवक संख्या
4x	4x	1		x	4
3x + 1	3x और 1	2		x	3, 1
2x + 1			दो पद		
6p - 1					
3y + 6					



4x बीजगणितीय संख्या की ध्रुवक संख्या 4 के साथ चल x का गुणा किया गया है। 4x का उत्पादक 1 , 2, 4, x , 2x और 4x

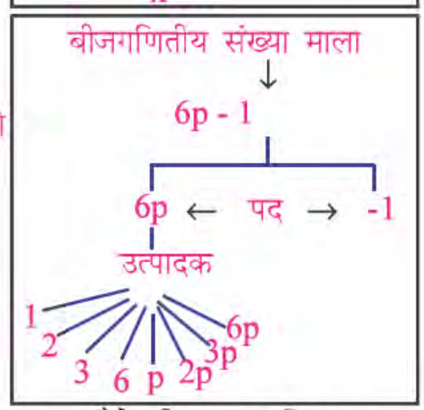
4x का पद 1 है अत: 4x एक पद बीजगणितीय संख्या है।



1 (3x + 1) उस बीज गणितीय संख्या माला के उत्पादक पौधे की तरह चित्र को देखे।

देखे, 3x + 1 बीजगणितीय संख्या माला का पद 2 है।

अत: 3x + 1 एक द्विपदी बीजगणितीय संख्या माला है।



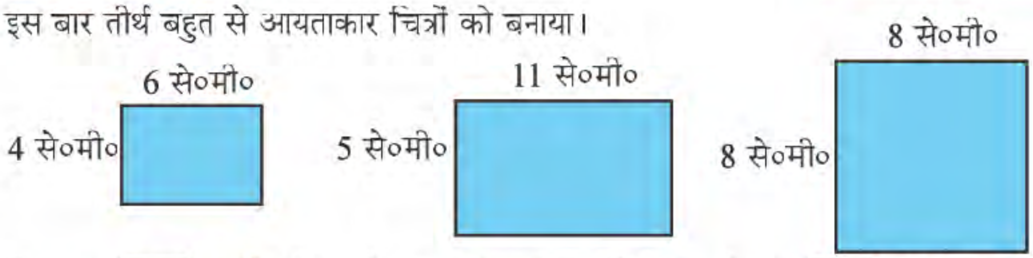
2 (6p – 1) इस बीजगणितीय संख्या माला के उत्पादक को पौधे की तरह की चित्र को देखें।

6p – 1 ☐ पद बीजगणितीय संख्या माला।

स्वयं करें—6.2

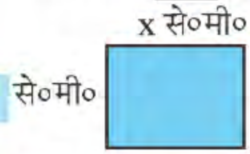
1) 2x + 1, 2) 3y + 6 इस बीजगणितीय संख्या मालाओं का उत्पादक पौधे की तरह का चित्र बनाकर पद और उत्पादकों को दिखाओ।

इस बार तीर्थ बहुत से आयताकार चित्रों को बनाया।



क्षेत्रफल = 6×4 वर्ग सें०मी०   क्षेत्रफल = ☐ वर्ग सें०मी०   क्षेत्रफल 8×8 वर्ग सें०मी० = 8^2 वर्ग सें०मी०

यदि इस तरह से हो→



इस क्षेत्र का क्षेत्रफल $x \times y$ वर्ग सें०मी०
xy वर्ग सें०मी०

फिर, लम्बाई $2x$ इकाई एवं चौड़ाई y इकाई होने पर क्षेत्रफल

= $(2x \times y)$ वर्ग इकाई = $2xy$ वर्ग इकाई

यहाँ दोनों चल ☐ और ☐ है।

वर्गाकार चित्र की एक भुजा x सें०मी० $\therefore$ क्षेत्रफल = $x \times x$ वर्ग सें०मी०

= x^2 वर्ग सें०मी० $\because$ $(2\times2 = 2^2)$, यहाँ चल ☐ है।

इस क्षेत्र में इकाई है जैसे सें०मी०,

अत: xy वर्ग सें०मी०, $2xy$ वर्ग सें०मी०, x^2 वर्ग सें०मी० बीजगणितीय राशि

$2\times2\times2 = 2^{\square}$,   अत: $x\times x\times x = x^{\square}$, x^3 की चल ☐ है।

आज हम विभिन्न प्रकार के बीजगणितीय संख्या मालाओं को बनाएगे एवं उस संख्या मालाओं के विभिन्न पहलुओं की आलोचना करेंगे।

3 $5x^2 + y$ कैसे पायें, देखे—

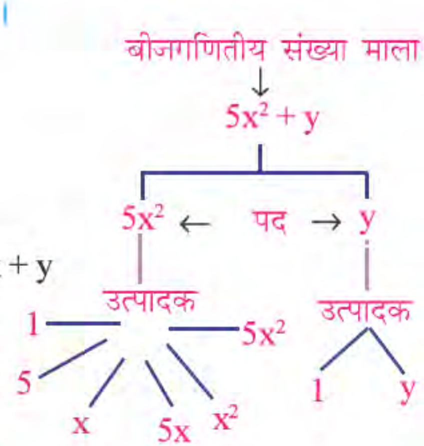
सर्वप्रथम x के साथ x का गुणा करके x^2 पाये है।

अब x^2 के साथ 5 का गुणा करके $5x^2$ पाये है।

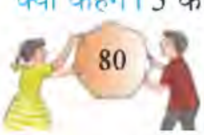
इसके बाद $5x^2$ के साथ y को जोड़े है। $5x^2 + y = 5 \times x \times x + y$

$5x^2 + y$ बीजगणितीय संख्यामाला को देखते है कि 2 पद है,

चल x और y की ध्रुवक संख्या 5 और 1



लेकिन $5x^2$ की बीजगणितीय संख्या माला में 5 को x^2 का क्या कहेगें। 5 को x^2 का सहग कहा जाता है।



$5x^2$ में 5 का सहग x^2 और $5x$ का सहग □ एवं x^2 का सहग □।

4 $2xy^2 + 3y$ कैसे पाये देखें।

सबसे पहले y के साथ □ गुणा करके y^2 पाये।

अब, 2, x और y^2 □ करके $2xy^2$ करके 3 और y को गुणा करके 3y पाये।

अब, $2xy^2$ और 3y को जोड़ने पर,

$2xy^2 + 3y =$ □ × □ × □ × □ + □ × □

$2xy^2 + 3y$ बीजगणितीय संख्या माला में □ पद है। अत: यह □ पदी है। यहाँ x और y □ (चल / ध्रुवक)

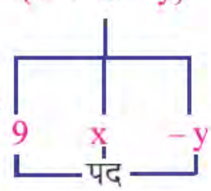
$2xy^2$ में x का सहग $2y^2$, xy^2 का सहग □, y का सहग □ एवं y^2 का सहग □।

$2xy^2$ बीजगणितीय संख्या माला में xy^2 की संख्यागत सहग 2 है।

5 $(9 + x - y)$ इस बीजगणितीय संख्या माला के उत्पादक को पौधे की तरह सजाये तथा क्या पाये देखे–

हम देखते है $(9 + x - y)$ के □ पद है।

$\therefore 9 + x - y$ एक □ पदी बीजगणितीय संख्या माला है।



6 लेकिन $9 + x - y$ बीजगणितीय संख्या माला में x और y के सहग क्या है?

$x = 1 \times x$, $\therefore$ x का सहग □

$-y =$ □ $\times y$, $\therefore$ y का सहग □

नीचे के बीजगणितीय संख्या माला को देखे और समझकर खाली घर में लिखो—

बीजगणितीय	पद	पद संख्या	पद संख्या भाषा में	चल	ध्रुवक छोड़कर पद	चल संख्या युक्त पदो का उत्पादक विश्लेषण
$xy + 8$	xy, 8	2	द्विपदी	x,y	xy	$xy = x \times y$
$7x + 2y$	7x, 2y	2		x,y	7x, 2y	$7x = 7 \times x$ $2y = 2 \times y$
$5z - 2xz$				x,z	5z, –2xz	
$x^2 + 2x + 3$	x^2, 2x, 3	3	त्रिपदी			
$x + y + 5$						
$x^3y + 5x$						

$2x + 3y + 4z + 7p + 5q + 6r$ इस प्रकार के यदि कई बीजगणितीय पद रहे तो उस संख्या माला को क्या कहेंगे ?

इसको बहुपदी संख्या माला कहेंगे।

अतः एकपदी, द्विपदी, त्रिपदी आदि क्या बहुपदी संख्या राशि नहीं है ?

प्रत्येक बहुपदी उत्पादकों का विश्लेषण करें और समानता खोजे।

तुली और रशीद ने तय किया है कि वे लोग अपनी जानकारी वाले कुछ बीजगणितीय संख्या माला को ब्लैकबोर्ड पर लिखेंगे।

उनलोगों ने लिखा—

हमलोग इस बीजगणितीय संख्या माला के पदों के उत्पादकों का विश्लेषण करें।

$8x = 2\times2\times2\times x$

$12xy = 2\times2\times3\times x\times y$

$3x^2y = 3.x.x.y$

$9xy^2 = 3.3.\square.\square.\square = 3\times3\times\square\times\square\times\square$

$2xyz = 2.x.y.z$

$2xy^2 = 2.\square.\square.\square,$ $\qquad 3x = \square.\square$

बाकी राशियों को उत्पादक में विश्लेषण स्वयं करें।

हम देखते है, ऊपर की कुछ बीजगणितीय संख्या राशियाँ एक जातिय पद में है। जैसे $8x$ और $3x$ या $9xy^2$ और $2xy^2$ । इस प्रकार की बीजगणितीय संख्या राशियों की भिन्न जातिय पद है, जैसे $8x$, $12xy$ इस प्रकार की बीजगणितीय पदों को क्या कहेंगे ?

दो या दो से अधिक पद युक्त बीजगणितीय संख्या राशियों को एक जातिय पदों को सदृश पद एवं भिन्न जातिय पदों को सदृश पद एवं भिन्न जातिय पदों को असदृश पद कहा जाता हैं।

जैसे, $2xyz$ और $11xyz$ परस्पर सदृशपद है। फिर $8x$ और $12xy$ परस्पर असदृश पद है।

स्वयं करो कागज काटकर वर्गक्षेत्राकार और आयताकार रंगीन कार्ड की सहायता से बीजगणितीय संख्या राशि (i) $3x^2 + 4x + 6$ (ii) $2x^2 - x - 3$

(1) सबसे पहले बहुत से पिचबोर्ड का वर्गाकार और आयताकार टुकड़े तैयार किया।

2 सें०मी० लम्बा और 2 सें०मी० चौड़ा कुछ वर्गाकार पिचबोर्ड काटा।

2 सें०मी० लम्बा और 1 सें०मी० चौड़ा कुछ आयताकार पिचबोर्ड काटा।

1 सें०मी० लम्बा और 1 सें०मी० चौड़ा कुछ वर्गाकार पिचबोर्ड काटा।

(2) 2 सें०मी० × 2 सें०मी० वर्गाकार पिचबोर्ड को एक तरफ नीले और दूसरे तरफ लाल रंग का कागज चिपका दिया।

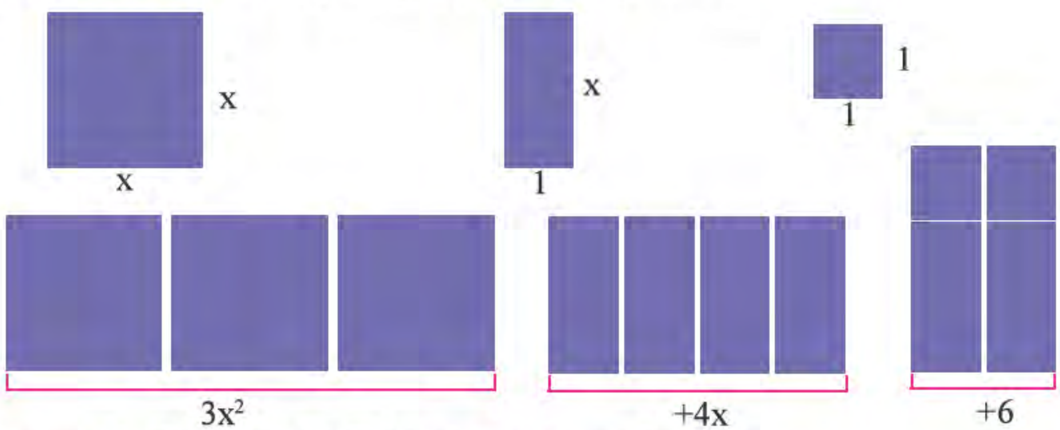
2 सें०मी० × 1 सें०मी० आयताकार पिचबोर्ड के एक तरफ नीले वे दूसरे तरफ लाल रंग का कागज चिपका दिया।

1 सें०मी० × 1 सें०मी० आयताकार पिचबोर्ड के एक तरफ नीले वे दूसरे तरफ लाल रंग का कागज चिपका दिया।

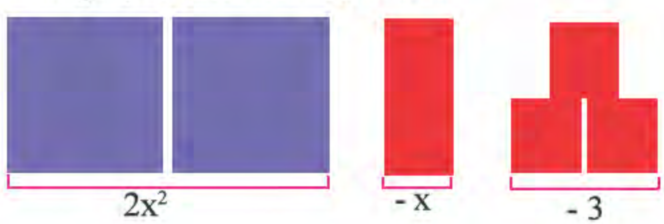
नीचे के चित्रों की तरह बहुत से वर्गाकार और आयताकार नीले रंग के पिचबोर्ड बनाये।

माना, 1 एक 2 × 2 नीला वर्गाकार कार्ड → x^2, एक 2 × 1 नीला आयताकार कार्ड → x और एक 1 × 1 नीला वर्गाकार कार्ड → 1 फिर एक 2 × 2 लाल रंग का वर्ग क्षेत्र कार्ड → $(-x^2)$, एक 2 × 1 लाल आयताकार कार्ड → $(-x)$ तथा एक 1 × 1 लाल वर्गाकार कार्ड → -1

(3) इस रंगीन पिचबोर्ड के टुकड़ों से $(3x^2 + 4x + 6)$ सजाया।



(4) इस रंगीन पिचबोर्ड के टुकड़ों से $(2x^2 - x - 3)$ सजायें।



प्रत्येक घर में दो या दो से अधिक संख्या राशियाँ दी गई है। उनके पदों में क्या सम्पर्क है, खोजे—

दो या दो से अधिक बीजगणितीय संख्या राशियाँ	प्रत्येक बीजगणितीय संख्या राशियों के पदों की मौलिक उत्पादक	बीजगणितीय पद सदृश या असदृश
8x 2x –2x	2, x 2, x 2, x	सदृश
2xy –xy 7yx	1, 2, x, y □ □	□
$3x^2y$ $5x^2y$ xy^2	□ □ □	असदृश
ab^2 $-2ab^2$	□ □	□

बनाकर देखें— 6.1

1. बीजगणितीय राशिमाला बनाओ—

(a) x के साथ y का योग। (b) z से x का घटाव।

(c) p के दोगुणा के साथ q का योग। (d) x के वर्ग के साथ x का गुणा।

(e) x और y के योगफल का $\frac{1}{4}$ भाग (f) a और b के गुणनफल के 4 गुणा के साथ 7 का योगफल।

(g) x के दोगुणा के साथ y के $\frac{1}{2}$ का योग।

(h) x और y के योग से x और y का गुणनफल का घटाव।

2. नीचे के दियासलाई के काठियों का पैटर्न देखो और लिखो।

(a)

ऊपर के दियासलाई से तैयार पैटर्न की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	....
दियासलाई काठी की संख्या	7	12						

अब चल से साधारण नियम बनायें।

(b)

1 2 3 ....

ट्रापिजियम की संख्या	1	2	3	4	5	6	....
दियासलाई की काठी की संख्या	5	9					

अब चल से साधारण नियम बनायें—

3. नीचे के बीजगणितीय संख्या मालाओं के उत्पादक पौधे के आकार में सजाकर प्रत्येक पदों की मौलिक उत्पादकों को दिखाओ वह कितनी पदी संख्या है, लिखो—

(a) $5x$ (b) $7 + 2x + x^2$ (c) $x^2 + x + 1$ (d) $2x^2y + 7$

(e) $2y^3 + y$ (f) $x^2y + xy^2 + xyz$ (g) $xy + 2x^2y^2$ (h) $5x + 2y$

4. नीचे की बीजगणितीय संख्या राशियों को ध्रुवक के बिना पदो की संख्या मूलक सहग (Numerical co-efficient) लिखे।

(a) $2x + 3y$ (b) $x^2 + 2x + 5$ (c) $x + 5xy - 7y$

(d) $-5 - z$ (e) $x^3 + x - y$ (f) $\frac{x}{2} + 4$

5. नीचे के बीजगणितीय संख्या राशियों के x उत्पादक युक्त पद या पदों के x का सहग लिखो।

(a) $y^3x + y^2$ **(b)** $5z^2 - 8zx$ **(c)** $-x - y + 2$

(d) $4 + y + yx$ **(e)** $2 + x + xy^2$ **(f)** $15x\,y^4 - 14$

6. नीचे के बीजगणितीय पदों में से सदृश पदों को अलग-अलग लिखो—

$2x, y, 12xy, 13y^2, -5x, 18y, -4xy, -2y^2, 21x^2y, 3x, 3xy, -xy, -y, -6x^2, -15x^2$

7. नीचे के जोड़ा पदों में से कौन सादृश पद तथा कौन असदृश पद है। उसे युक्ति के साथ लिखे।

(a) $2x, 3y$, (b) $7x, 8x$, (c) $-29x, 6x$ (d) $4xy, 6yz$ (e) $-15yx, 8xy$ (f) $5xy, 6x^2y^2$

8. नीचे के बीजगणितीय संख्या राशियों में जो पद x^2 पद है उसे लिखो एवं x^2 का सहग भी लिखो—

(a) $5 - xy^2$ (b) $-6x^2 - 8y$ (c) $3x^2 - 15xy^2 - 8y^2$

(d) $2 + 3x^2y + 4x$ (e) $5 - 6x^2y^2 + 6xy$

बाजार चलें

7 आज मैं और भैया बाजार में सब्जी खरीदने जायेंगे। सबसे पहले हम 1 कि०ग्रा० आलू और 1 कि०ग्रा० टमाटर खरीदेंगे।

1 कि०ग्रा० टमाटर का दाम, 1 कि०ग्रा० आलू से 25 रुपये अधिक है। यदि 1 कि०ग्रा० आलू का मूल्य x रुपये हो तो 1 कि०ग्रा० टमाटर का दाम कितना होगा, हिसाब करके देखो।

माना, 1 कि०ग्रा० आलू का मूल्य x रुपये है।

$\therefore$ 1 कि०ग्रा० टमाटर का मूल्य $(x + 25)$ रुपये।

अत: 1 कि०ग्रा० आलू व 1 कि०ग्रा० टमाटर खरीदने में हमारा कुल खर्च

$= x$ रु० $+ (x + 25)$ रु० $= (x + x + 25)$ रुपये।

$(x + x + 25)$ को किस तरह से जोड़ेंगे ?

दो x का योग करने पर 2x मिलेगा $[x + x = 1 \times x + 1 \times x = (1 + 1)\, x = 2 \times x = 2x]$

(विच्छेद नियम के अनुसार)

अतएव, 1 कि०ग्रा० आलू और 1 कि०ग्रा० टमाटर खरीदने में खर्च होगा $= (2x + 25)$ रुपये।

8 1 कि०ग्रा० गाजर भी खरीदेंगे। यदि 1 कि०ग्रा० गाजर का मूल्य 1 कि०ग्रा० आलू के मूल्य से 30 रुपये अधिक है, अत: कुल कितने रुपये खर्च हुआ, हिसाब करें।

1 कि०ग्रा० आलू का दाम x रुपये।

1 कि०ग्रा० गाजर का दाम होगा $(x + \square)$ रुपये।

इस स्थिति में 1 कि०ग्रा० आलू, 1 कि०ग्रा० टमाटर, 1 कि०ग्रा० गाजर खरीदने में

कुल खर्च $= \{(2x + 25) + (x + 30)\}$ रुपये।

9 मैं $(2x + 25)$ और $(x + 30)$ को जोड़ूँ—

2x और x मिलाकर अर्थात 2 x और 1 x होगा।

$3x\ [2x + x = 2 \times x + 1 \times x]$

$= (2+1) \times x$ (विच्छेद नियम के अनुसार)

$= 3 \times x$

$= 3x$

फिर ध्रुवक संख्या (x वर्जित पद) 25 और 30 का योग करके मिलेगा $25 + 30 = \square$

अत: हम पाते है, $2x + 25 + x + 30$

$= (2x + x) + (25 + 30)$

$= \boxed{3x} + \boxed{55}$

∴ अत: हम $(3x + 55)$ रुपये लेकर बाजार जायेगे।

देखते है, बीजगणित राशिमाला $(2x + 25)$ और $(x + 30)$ जोड़ने पर सदृश पदों के साथ-साथ लिखकर जोड़ेंगे।

उसके पश्चात् असदृश पदों के बीच में योग का चिह्न देकर योग पायेंगे।

10 बाजार साइकिल से गए। साइकिल जमा रखने के स्टैण्ड पर गया तो देखा कि बहुत सी साइकिलें रखी हुई है। उन अनेकों साइकिलों के कुल चक्कों की संख्या कितना होगा।

माना, साइकिल की कुल संख्या x

1 साईकिल में 2 चक्के

x साइकिल में $2 \times x = \boxed{2x}$ चक्के

कुछ दूर पर देखा बहुत से रिक्सा लाईन में खड़ा है।

1 रिक्शा में $\square$ चक्के

y रिक्शा में $3 \times y = \boxed{3y}$ चक्के

अत:, x साइकिल तथा y रिक्शा में कुल चक्के = $(\square + \square) = (2x + 3y)$

देखते है, 2x और 3y $\square$ पद (सदृश / असदृश)

लेकिन 2x और 3y का योग करके क्या पायेंगे?

2x और 3y असदृश पद है अत: 2x और 3y का योग करने पर $2x + 3y$ होगा।

11 बाजार से घर आने के पश्चात् हमने तय किया कि भैया दो या दो से अधिक बीजगणितीय संख्या माला को लिखेंगे, और मैं उनको जोड़ने की कोशिश करूँगी।

भैया ने लिखा— 2x, 3x, 11x

$2x$, $3x$ और $11x$ जोड़ने पर मिलता है, $2x + 3x + 11x$

$= 2 \times x + 3 \times x + 11 \times x$

$= (2 + 3 + 11)x$ (विच्छेद नियम से)

$= 16x$

12 भैया ने लिखा $-3x, -10x, -2x$

मैंने जोड़ा $-3x - 10x - 2x$

$= -3 \times x - 10 \times x - 2 \times x$

$= (-3 - 10 - 2)x$

$= -15x$

देखते है कि बीजगणितीय राशिमालाओं के सदृश पदों के योग के समय सदृश पद के संख्या मूलक सहगों का योग होता है।

13 मैं, $(2x + 3y) + (3x + y)$ का मान खोजूँगा।

$(2x + 3y) + (3x + y)$

$= (2x + 3x) + (3y + y)$ (सदृश पदों को अलग करके)

$= 5x + 4y$

14 अब $5x$ से $2x$ को घटायें।

अर्थात् $5x - 2x$

$= (5 \times x) - (2 \times x)$

$= (5 - 2) \times x$

$= 3x$

15 अब $\{(-9a) + (-2a) + 5a\}$ को जोड़े।

$(-9a) + (-2a) + 5a$

$= (-9 - 2)a + 5a$

$= -11a + 5a$

$= (-11 + 5)a$

$= -6a$

16 $(5x^2 + 3x + 2)$ एवं $(x^2 - 2x + 1)$ को जोड़े।

$(5x^2 + 3x + 2) + (x^2 - 2x + 1)$

$= 5x^2 + 3x + 2 + x^2 - 2x + 1$

$= 5x^2 + \square + 3x - \square + 2 + 1$

$= 6x^2 + x + 3$

17 $(2a + 3b - 5)$ से $(b + a)$ घटाए।

$(2a + 3b - 5) - (b + a)$ [$-(2 + 3) = -2 - 3$ अत: $-(b + a) = -b - a$]

$= 2a + 3b - 5 - b - a$

$= 2a - a + 3b - b - 5$

$= \square + \square - 5$

स्वयं करो

कागज काटकर $(2x^2 + 3x + 5) + (3x^2 + 4x + 6)$ कितना होता है।

(1) सर्वप्रथम बहुत से पिचबोर्ड काटकर वर्गाकार तथा आयताकार टुकड़ा किया।

2 से०मी० लम्बा और 2 से०मी० चौड़ा कुछ वर्गाकार पिचबोर्ड काटा। अब 2 से०मी० लम्बा और 1 से०मी० चौड़ा कुछ आयताकार पिचबोर्ड काटा। इसके पश्चात् 1 से०मी० लम्बा तथा 1 से०मी० चौड़ा कुछ वर्गक्षेत्र पिचबोर्ड काटा।

2 से०मी० × 2 से०मी० वर्गक्षेत्र के पिचबोर्ड में हरे रंग का कागज चिपका दिया।

2 से०मी० × 1 से०मी० वर्गक्षेत्र पिचबोर्ड में नीले रंग का कागज चिपका दिया।

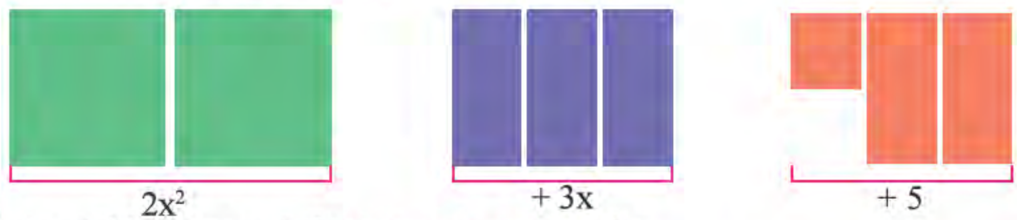
1 से०मी० × 1 से०मी० वर्गक्षेत्र पिचबोर्ड में लाल रंग का कागज चिपका दिया।

नीचे के तस्वीर की तरह बहुत से वर्गाकार और आयताकार हरा, नीला और लाल पिचबोर्ड के कार्ड बनाये।

माना,

1 हरा वर्गाकार कार्ड x^2, 1 नीले रंग का आयताकार कार्ड x और 1 लाल रंग का वर्गाकार कार्ड 1

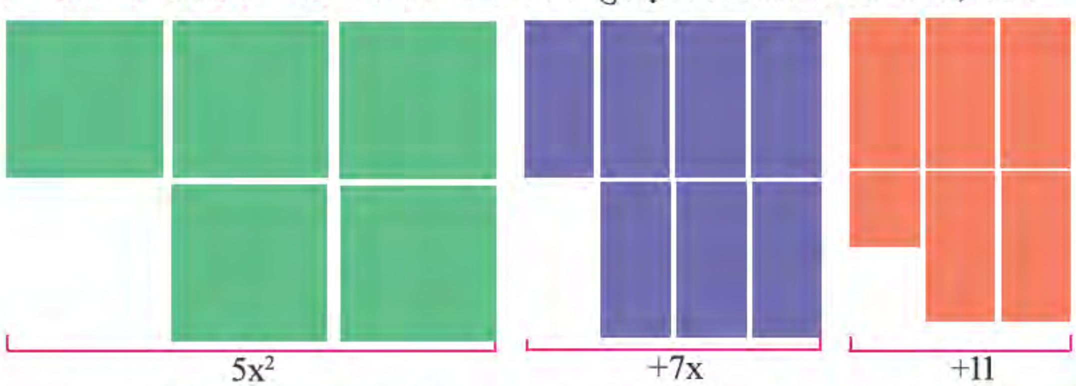
(2) इस रंगीन पिचबोर्ड के टुकड़ों से ($2x^2 + 3x + 5$) सजायें



(3) इस पिचबोर्ड के रंगीन टुकड़ों से ($3x^2 + 4x + 6$) सजायें।

(4) अब ऊपर दोनों बीजगणितीय संख्या मालाओं को जोड़े।

$2x^2 + 3x + 5$ और $3x^2 + 4x + 6$ में मिले कागज के टुकड़ों को मिलाने से क्या पाते है, देखें।



(5) रंगीन पिचबोर्ड के टुकड़ों का गिनने पर ☐, हरे वर्गाकार पिचबोर्ड ☐ नीले रंग के आयताकार पिचबोर्ड भी ☐ लाल वर्गाकार पिचबोर्ड जिस संख्या माला को बताते है वे है $5x^2 + 7x + 1$ इस प्रकार किसी भी एक चल संख्या युक्त बीजगणितीय संख्या माला का योग पिचबोर्ड के रंगीन कागज से हाथ कलम से किया जा सकता है।

रंगीन पिचबोर्ड के वर्गाकार क्षेत्र और आयताकार क्षेत्र के टुकड़ों से बीजगणितीय संख्या माला का वियोग हाथ कलम से करने की चेष्टा करें।

$(3x^2 + 2x - 4) - (x^2 - x + 3)$ कितना होगा।

(1) सर्व प्रथम बहुत से 2 से०मी० × 2 से०मी० माप का वर्गाकार क्षेत्र, 2 से०मी० × 1 से०मी० माप का आयताकार क्षेत्र और 1 से०मी० × 1 से०मी० के माप का वर्गक्षेत्र पिचबोर्ड से काटकर तैयार किया।

(2) इन पिचबोर्ड के वर्गाकार और आयताकार कार्डों के एक तरफ नीला एवं दूसरे तरफ लाल कागज चिपका दिए।

एक तरफ नीला रंग

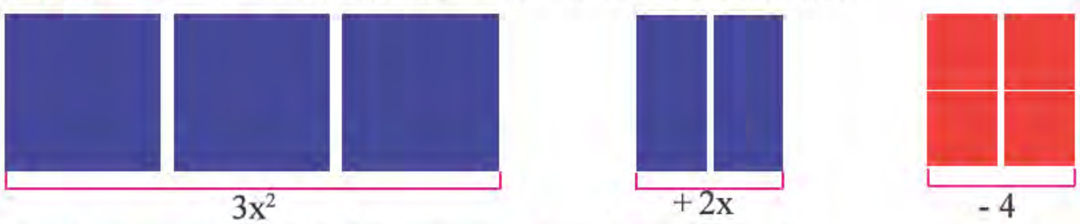
एक तरफ लाल रंग

(3) 2 से०मी० × 2 से०मी० वर्गाकार कार्ड का — (1) नीला ओर → x^2 (2) लाल की ओर → $-x^2$

2 से०मी० × 1 से०मी० आयताकार कार्ड के — (1) नीला ओर → x (2) लाल की ओर → $-x$

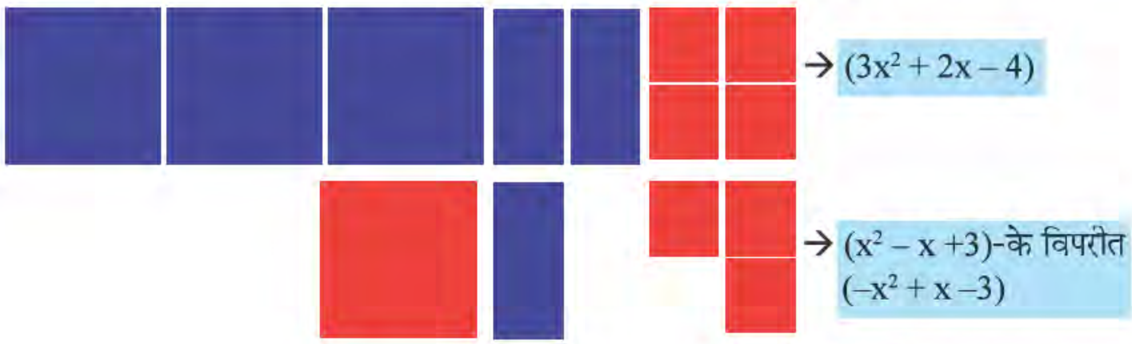
1 से०मी० × 1 से०मी० वर्गाकार — (1) नीले ओर → 1 (2) लाल की ओर → -1

(4) $(3x^2 + 2x - 4)$ बीजगणितीय संख्या माला को कार्ड द्वारा प्रकाश करें।

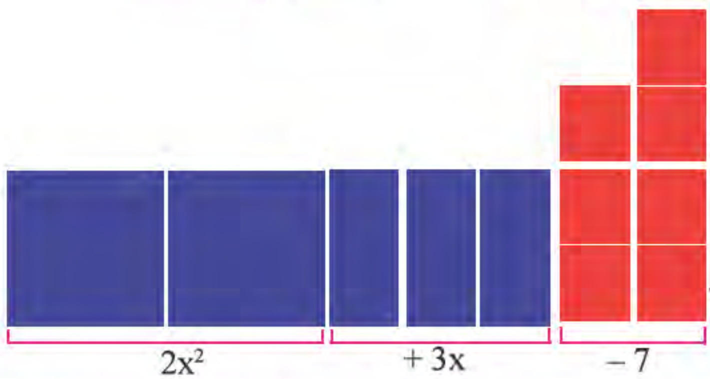


(5) $(x^2 - x + 3)$ बीजगणितीय संख्या माला को कार्ड द्वारा प्रकाश करें।

(6) अब बीजगणितीय संख्या माला $(x^2 - x + 3)$ को $(3x^2 + 2x - 4)$ से घटाव करने के लिए $(x^2 - x + 3)$ इस बीजगणितीय संख्या माला के कार्डों को उलट कर मिलाया।



मिलाकर पाये,



[दो एक ही माप के 1 नीला और 1 लाल कार्ड लेने पर कुछ रहा नहीं अर्थात् 0 (शून्य) हुआ]

→ $(2x^2 + 3x - 7)$

अत: स्वयं से पाये $(3x^2 + 2x - 4) - (x^2 - x + 3) = 2x^2 + 3x - 7$

इस प्रकार से बीजगणितीय संख्या माला का वियोग हाथ कलम से किया जायेगा।

स्वयं करे— 6.3

1) बीजगणितीय संख्या माला $(2x^2 + x + 2)$ व $(x^2 + 2x + 2)$ को स्वयं से रंगीन कार्ड से जोड़ करे।

2) बीजगणितीय संख्या माला $(5x^2 - 2x - 3)$ से $(3x^2 + 3x - 2)$ को स्वयं से रंगीन कार्ड से वियोग करे।

दूसरे तरीके से बीजगणितीय संख्या माला का योग और वियोग करने की चेष्टा करें।

18 $(5x + 2y)$ व $(6x + 19y)$ को जोड़े।

$5x + 2y + 6x + 19y$

$= 5x + 6x + 2y + \square$

$= \square + 21y$

हमलोगों ने ऊपर नीचे संख्या रखकर जोड़ किए है। बीजगणितीय संख्या माला का जोड़ तथा घटाव उपर नीचे पदों बैठाकर कर सकेंगे ?

बीजगणितीय संख्या माला का जोड़ और घटाव ऊपर नीचे पदों को बैठाकर किया जा सकता है। इस अवस्था में किसी भी पद के नीचे उसकी सदृश पद बैठाया जाता है।

$$\begin{array}{r} 5x + 2y \\ 6x + 19y \\ \hline \text{जोड़ने पर, } \quad 11x + 21y \\ \hline \end{array}$$

19 अब $(2x - y + 3)$ और $(8y - x - 1)$ को जोड़े।

$(2x - y + 3) + (8y - x - 1)$

$= 2x - x - y + 8y + 3 - 1$

$= \square + \square + 2$

अन्य तरीके से

$$\begin{array}{r} 2x \; - \; y \; +3 \\ -x + 8y \; -1 \\ \hline \text{जोड़ने पर, } \quad \square + \square + 2 \\ \hline \end{array}$$

20 मैं, $(7x - 3y + 2z + 3)$ और $(2x^2 + 5x - 4z + 1)$ को जोड़ूँगा।

$(7x - 3y + 2z + 3) + (2x^2 + 5x - 4z + 1)$

$= 7x + 5x + 2x^2 - 3y + 2z - 4z + 3 + 1$

$= 12x + 2x^2 - 3y - 2z + 4$

$= 2x^2 + 12x - 3y - 2z + 4$

दूसरे तरीके से

$$\begin{array}{r} 7x - 3y + 2z + 3 \\ 2x^2 + 5x \qquad - 4z + 1 \\ \hline \text{जोड़ने पर, } \quad 2x^2 + 12x - 3y - 2z + 4 \\ \hline \end{array}$$

21 $(7x+3y)$ से $(2x+5y)$ पास-पास एवं ऊपर नीचे सदृश पदों को बैठाकर किस प्रकार घटायेगें देखे।

$(7x + 3y) - (2x + 5y)$

$= 7x + 3y - 2x - 5y$

$= (7x - 2x) + (3y - 5y)$

$= 5x + (-2y)$

$= 5x - 2y$

दूसरे तरीके से

$$\begin{array}{r} 7x + 3y \\ 2x + 5y \\ - \quad - \\ \hline \text{जोड़ने पर, } \quad 5x - 2y \\ \hline \end{array}$$

अत: देखते है कि घटाने का अर्थ विपरीत संख्या का जोड़ है।

अर्थात् 7x से 2x घटाने का अर्थ 7x के साथ 2x के विपरीत संख्या अर्थात् –2x का योग करना।

3y से 5y को घटाने का अर्थ 3y के साथ □ का जोड़ है। [स्वयं करो]

22 $(-9a + 6b)$ से $(7a - 10b + c)$ को घटाओ।

$(-9a + 6b) - (7a - 10b + c)$

$= -9a + 6b - 7a + 10b - c$

$= (-9a - 7a) + 6b + 10b - c$

$= -16a + 16b - c$

दूसरे तरीके से

$$\begin{array}{r} -9a + 6b \\ -7a \underset{+}{-} 10b \underset{-}{+} c \\ \hline \text{घटाने पर} \quad -16a + 16b - c \\ \hline \end{array}$$

23 $(2x^2 - 5xy + 9y^2)$ से $(3y^2 - 9yz + z^2)$ को घटाओ।

$(2x^2 - 5xy + 9y^2) - (3y^2 - 9yz + z^2)$

$= 2x^2 - 5xy + 9y^2 - 3y^2 + 9yz - z^2$

$= 2x^2 - 5xy + 6y^2 + 9yz - z^2$

दूसरे तरीके से

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5xy + 9y^2 \\ \underset{-}{+} 3y^2 \underset{+}{-} 9yz \underset{-}{+} z^2 \\ \hline \text{घटाने पर} \quad 2x^2 - 5xy + 6y^2 + 9yz - z^2 \\ \hline \end{array}$$

स्वयं करे— 6.4

(1) जोड़ो—

(i) $(-5x + 3y)$ और $(18x - 15y)$ (ii) $(7a - 8b + 2c)$ व $(2a + 3b - d)$

(2) घटाओ—

(i) $(4mn + m + n)$ से $(-mn - m + n)$ (ii) $(p^2 + q^2 - pq + p^2q)$ व $(2q^2 + 3p^2 - qp + pq^2)$

बनाकर देखे— 6.2

1. मन में जोड़े—

(i) $5x + 3x$ (ii) $9y - 3y$ (iii) $-4y + 7y$ (iv) $-10x - 2x$

(v) $3a + 4a - 2a$ (vi) $-7x - 2x + 5x$ (vii) $6p - 2p + 3p$ (viii) $4x^2 - 2x^2 - 3x^2 + x^2$

(ix) $5a^2b - 2a^2b - 3a^2b + 8a^2b$ (x) $3x^2 - 6x^2 - 2x^2 - x^2 + 6x^2$

2. (a) मेरी उम्र x वर्ष है। पल्लवी हमसे 2 वर्ष बड़ी है। अत: हम दोनों की उम्र का योग करें।

(b) आज मैं x फूलों की माला गूँथी। मीर ने मेरे द्वारा गूँथे माला के दोगुने से 6 माला अधिक गूँथी है। अत: मैं और मीर ने कितने माला गूँथे है, हिसाब करें।

(c) रातूल आज x रुपये की अमरूद, $(x + 15)$ रुपये का सेव, $(2x + 3)$ रुपये का खीरा खरीदा। तो रातूल ने आज कुल कितने रुपये का फल खरीदा बताओ।

(d) पिछले वर्ष फिरोजा x दिन स्कूल में उपस्थित हुई थी। फिरोजा की मित्र मोहिनी $(3x + 13)$ दिन स्कूल में उपस्थित थी। तो पिछले वर्ष मोहिनी की उपस्थिति फिरोजा से कितना अधिक था, निकाले।

(e) दीपूदा ने आज $(2x + 19)$ कागज बेचे है। विगत कल उसने $(5x - 8)$ कागज बेचा था। अत: दीपूदा ने आज की तुलना में कितना अधिक कागज बेचा, बताओ।

(f) परेश बाबू प्रतिमाह $8x$ रुपये आय करते है। लेकिन प्रति महीने $(3x - 15)$ रुपये खर्च करते हैं, तो वे प्रतिमाह कितना रुपया संचय किये, हिसाब करें।

3. योग करें—

(i) $3a + b, 2a + 4b, 5a - b$

(ii) $5a - 4, 2a + 3, 2a - 4$

(iii) $6a^2 + 7a + 3,\ 9a^2 - 2a + 7, 4a^2 - 2a + 9$

(iv) $2a^2b + 5b^2a + 7,\ 3a^2b - 2b^2a + 6, 8a^2b - b^2a + 9,$

(v) $4xy + 5x + 7y, -4xy - y - 3x, 3xy - 3y + 2x$

4. घटाओ—

(i) $(8x + 6y)$ से $(2x + 3y)$

(ii) $(-3m^2 + 2m + 2)$ से $(m^2 - 2)$

(iii) $(2x + 3y)$ से $(8x + 4y + 7)$

(iv) $(-9a^2 + 3a + 2)$ से $(5a^2 + 2a - 1)$

(v) x से $(-2x^2 + 3y^2)$

(vi) $3x^2 + 5xy$ से $2x^2 + xy + 3y^2$

5. सरल करें—

(a) $17x^2y - 3xy^2 + 14x^2y + 2xy^2$

(b) $-5b + 18a + 6b - 2a$

(c) $4m^2 + 3n^2 - (6m^2 + 7n^2)$

(d) $a - b - (b - a)$

(e) $(6p - 4q + 2r) + (2p + 3q - 4r)$

(f) $-x + y + z - (2x - 3y + z)$

(g) $(x^2 + 2x - 5) + (3x^2 - 8x + 5)$

(h) $(7x^2 - 3x + 3) - (2x^2 - 13x - 7)$

(i) $6a - 2b - ab - (3a + b - ab) + 2ab - b + a$

6. रामू के पास $(13x^2+x-3)$ रुपये थे। उसने $(4x^2-3x-12)$ रुपये खर्च कर दिया। तो उसके पास कितने रुपये बचे।

7. एक त्रिभुज के तीन भुजाओ की लम्बाई क्रमश: $(x+4)$ से०मी० $(2x+1)$ से०मी० और $(4x-8)$ से०मी० है। त्रिभुज की परिसीमा निकाले।

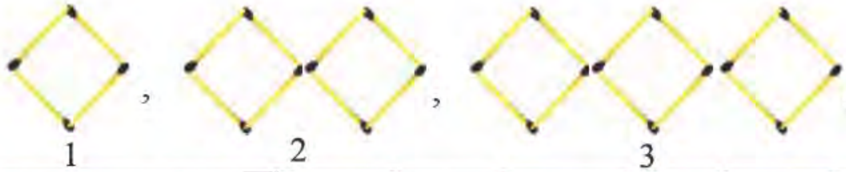
8. $-8x^2+8x+1$ के साथ कितना जोड़ा जाय कि योगफल $-14x^2+11x-3$ हो जाय।

9. $-11x-7y-9z$ से कितना घटाया जाय कि $-7x+3y-5z$ हो जाय।

10. $(3x^2+4x)$ और $(5x^2-x)$ का योगफल $(3x-5x^2)$ से कितना अधिक है।

11. $(5+9x)$ एवं $(6-7x+4x^2)$ के योगफल से (x^2-9x) एवं $(-2x^2+3x+5)$ के योगफल को घटाएँ।

काठी की सजावट देखे—



वर्गाकार चित्र की संख्या	1	2	3	4	5	6	.... n
दियासलाई की काठी की संख्या	4×1=4	4×2=8	4×3=12				.... 4 × n = 4n

देखते है कि n संख्या वाले वर्गाकार चित्र के लिए काठी लगेगा = 4 × n

= 4n

जब n =5, अर्थात् 5 वर्गाकार चित्र के लिए आवश्यक काठी की संख्या = 4× □ काठी

= □ काठी

लेकिन n = 100 होने पर अर्थात् 100 वर्गाकार चित्र के लिए आवश्यक काठियों की संख्या

= □ × □ काठी

= □ काठी

आकार की संख्या	1	2	3	4	5	6	10	x
दियासलाई काठी की संख्या	3	5	7					.... 2x + 1

x = संख्यक आकार के लिए कुल दियासलाई की काठी लगेगी (2x + 1)

x = 6 रखकर 6 आकार की काठियों के लिए प्रयोजनीय काठी की संख्या = (2 × 6 + 1)

= 13 काठियाँ

x = 15 रखने पर पाते है (2× □ + □) काठियाँ

24 5x + 13 इस बीजगणितीय राशि का मान निकालें यदि जब x = –2

$$5\times(-2) + 13 = -10 + 13 = 3$$

25 $(31 - 5x^2)$ बीजगणितीय राशि का मान निकालें यदि x = 2 और 5

सर्वप्रथम $31 - 5x^2$ बीजगणितीय संख्या माला में x = 2 बैठाये।

$31 - 5x^2$

$= 31 - 5 \times 2^2$

$= 31 - 20 = 11$

x = 5 रखने पर $31 - 5x^2$ बीजगणितीय राशि का मान निकाले।

में $31 - 5x^2$ इस बीजगणितीय संख्या माला में $x = -2$ रखा।

$$31 - 5x^2$$
$$= 31 - 5 \times (-2)^2$$
$$= 31 - 5 \times (-2) \times (-2)$$
$$= 31 - 20$$
$$= 11$$

देखते है कि x का मान 2 रखने पर x^2 का मान जो होता है, वहीं x मान -2 रखने पर x^2 का मान एक ही होता है।

अत: किसी भी धनात्मक या ऋणात्मक संख्या का वर्ग सर्वदा ☐।

26 $(7x - 2)$ इस बीजगणितीय संख्या माला का मान खोजें यदि $x = -2$

$$7x - 2 = 7 \times (-2) - 2$$
$$= -14 - 2$$
$$= -16$$

27 $12a^2 + 2ab + b^2$ और $(a^3 - b^3)$ का मान खोजे यदि $a = 1, b = 3$

$$12a^2 + 2ab + b^2$$
$$= 12 \times (1)^2 + 2 \times (1) \times (3) + (3)^2$$
$$= 12 + 6 + 9 = 27$$

$$a^3 - b^3 = (1)^3 - (3)^3$$
$$= 1 - 27$$
$$= -26$$

स्वयं करें— 6.5

1) $x = 5$ हो तो, नीचे की राशियों का मान निकालो।

(i) $6x + 11$ (ii) $\frac{x}{5} + 2$ (iii) $x^2 + 2x - 1$ (iv) $x^3 + 8$ (v) $10 - x$

2) $y = -3$ हो, तो नीचे दी गई बीजगणितीय राशियों का मान निकाले।

(i) $\frac{y+5}{4}$ (ii) $5 - y$ (iii) $y + 8$ (iv) $y^2 + 2y + 3$ (v) $y^3 - 1$

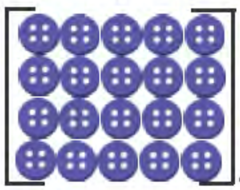
3) नीचे के बीजगणितीय संख्या मालाओं का मान खोजें। यदि $x = 2$ व $y = -1$

(i) $2x + 7y$ (ii) $x^2 + y^2$ (iii) $x^2 + 7xy + y^2$ (iv) $x^3 - 8y^3$ (v) $\frac{x}{9} + \frac{y}{4}$

बटन की सजावट

मैं और स्नेहा दोनों ने आज बहुत से बटन विभिन्न तरीकों से सजाया है। अतः लम्बाई और चौड़ाई के बटनों की संख्या लिखें।

मैंने किया

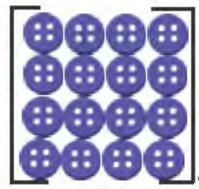


4×5 बटन
$= 20$ बटन

स्नेहा ने किया

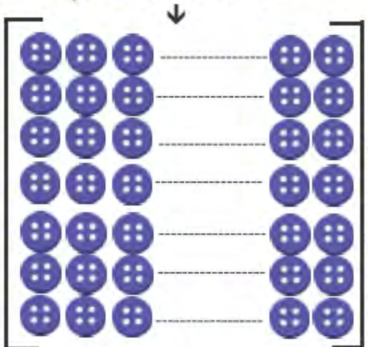
$\square \times \square$ बटन
$= \square$ बटन

मैंने किया



4×4बटन
$= 4^2 = 16$ बटन

इस सजावट को देखें



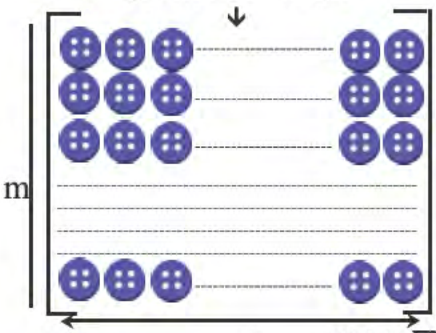
n

प्रत्येक लाईन में n डट् के जगह है (n - 5) बटन।

$7 \times n$
$= \square$ बटन

इस सजावट को देखें

m



n $m \times n$ बटन

$7 \times n$ का मान क्या होगा ?

$7 \times n = n + n + n + n + n + n + n = 7n$
समझते है $5 \times n = n + n + n + n + n = 5n$
$2 \times n = 2n$

इस सजावट को देखें

m

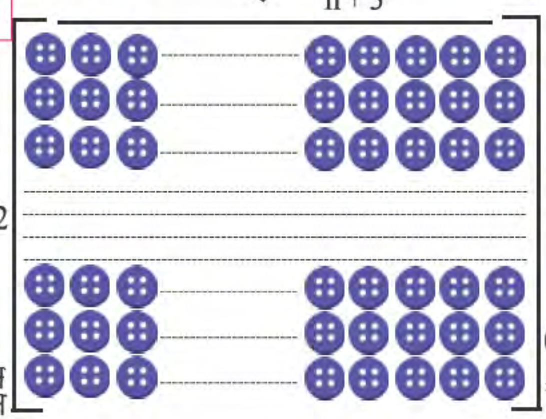
m

$m \times m$ बटन
$= \square$ बटन

इस सजावट को देखें

n + 3

m + 2



$(m+2) \times (n+3)$
$= \square$ बटन

हमारे साथ और 4 मित्रों ने इस मजेदार खेल में योगदान किया। मैं सबके लिये लॉजेंस खरीदूँगा।
अब हम कुल (☐ + ☐) = ☐ लोग।

28 6 लोगों के लिए लॉजेंस खरीदूँगा। कुल कितना लगेगा देखें।

माना, 1 लॉजेंस का मूल्य x रुपये
6 लॉजेंस का मूल्य $6 \times x$ रुपये होगा।
= ☐ रुपये ∴ 6x रुपये होगा।

लेकिन एक लॉजेंस का दाम (x - 2) रुपये होने पर (जहाँ $x > 2$) 6 लॉजेंस खरीदने में कितने रुपये लगेंगे। हिसाब करें।

6 लॉजेंस का दाम होगा $6 \times (x - 2)$ रुपये = $6(x - 2)$ रुपये।

29 अब मैं 4 पैकेट बिस्कुट भी खरीदूँगा।
1 पैकेट बिस्कुट का मूल्य 2x रुपये हो तो कुल कितना लगेगा।

1 पैकेट बिस्कुट का दाम 2x रुपये
4 पैकेट बिस्कुट का दाम $4 \times 2x$ रुपये

$4 \times 2x$ रुपये = कितने रुपये।

$4 \times 2x = (2x + 2x + 2x + 2x) = 8x$ रुपये
फिर, $4 \times 2x = 4 \times 2 \times x = 8x$ रुपये

यदि, 1 पैकेट बिस्कुट का दाम 3x रुपये हो तो 4 पैकेट बिस्कुट का दाम होगा $4 \times 3x$ रुपये।
$= 4 \times 3 \times x$ रुपये = 12x रुपये
$[4 \times 3x = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x]$

30 यदि मैं बटन के बिना एक आयताकार क्षेत्र बनाऊँगा जिसकी चौड़ाई 3x से०मी० तथा लम्बाई 4x से०मी० है तो इस आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना होता है। देखे—

क्षेत्रफल = $3x \times 4x$ वर्ग से०मी०
= $3 \times 4 \times x \times x$ वर्ग से०मी० = $12x^2$ से०मी०

31 $3x \times (-5xy)$ कितना होता है, देखें।

$$3x \times (-5xy) = 3 \times (-5) \times x \times x \times y$$
$$= -15 \times x^2y$$
$$= -15x^2y$$

32 $5x \times 2x^2y \times 2y$ कितना होता है, देखें।

$$5x \times 2x^2y \times 2y = 5 \times 2 \times 2 \times x \times x^2y \times y$$
$$= 20x^{2+1}y^2$$
$$= 20x^3y^2$$

स्वयं करें— 6.6

1) प्रत्येक का गुणनफल निकालो।

(i) 7, 2x (ii) –3x, 4x (iii) –2x, $-3x^2$ (iv) 7x, 0 (v) 3ab, 4ac (vi) $8x^2$, $2y^2$ (vii) $2a^2b$, $3ab^2$ (viii) (– 4xy), (– 4xy)

2) प्रथम एकपदी बीजगणितीय संख्या माला को द्वितीय एकपदी बीजगणितीय संख्या माला से गुणा करके खाली घरों में गुणनफल को लिखो।

प्रथम एकपदी बीजगणितीय संख्या माला → / द्वितीय बीजगणितीय संख्या माला ↓	2x	$-6x^2$	-4xy
	गुणनफल		
3x			$-12x^2y$
- 4x			
7x			

33 पिताजी ने हमारे लिए 4 कलम खरीदा है। प्रत्येक कलम का दाम 5 रु० है। मैंने मित्रों के लिए उसी मूल्य पर और 2 कलम खरीद लिया। हिसाब करके देखें कि पिताजी और मैंने कितने रुपये का कलम खरीदा।

पिताजी 4 कलम खरीदे (5 × 4) रुपये = ☐ रुपये
पिताजी 2 कलम खरीदे (5 × 2) रुपये = ☐ रुपये
कलम खरीदने में हमारा कुल खर्च {(5 × 4) + (5 × 2)} रुपये
= (☐ + ☐) रुपये = ☐ रुपये

दूसरे तरीके से देखते है, मैं और पिताजी ने कुल कलम खरीदा (☐ + ☐) कलम = 6 कलम।

1 कलम का दाम 5 रुपये है। मेरे और पिताजी का कलम खरीदने में कु ल खर्च = 5 × (4 + 2) रुपये

= 5×6 रुपये = 30 रुपये

∴ 5(4 + 2) = 5×4 + 5×2

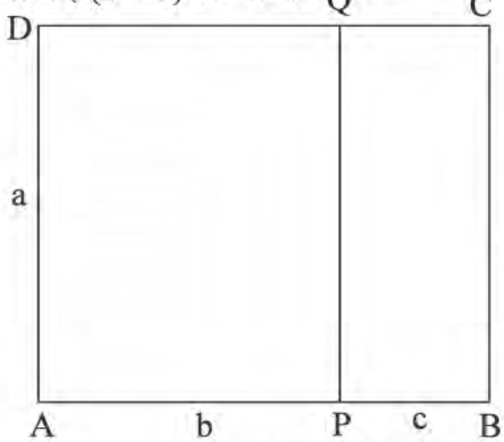
स्वयं करों

कागज काटकर स्वयं से करों 5(4 + 2) = 5 × 4 + 5 × 2

(1) तीन सरल रेखा खींचें जिसकी लम्बाई क्रमश: 5 से०मी०, 4 से०मी० और 2 से०मी० एवं उस सरल रेखांशों को चिह्नित करें, क्रमश: a, b, c से।

a   b   c

(2) एक आयताकार चित्र ABCD बनाये। जिसकी एक भुजा AD की लम्बाई a सेoमीo AB भुजा की लम्बाई (b + c) सेoमीo।



AB और DC भुजा के उपर दो बिन्दु P व Q इस प्रकार से लें जिससे

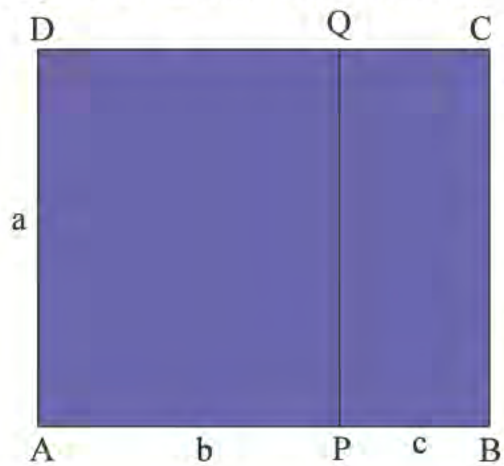
AP = b सेoमीo PB = c सेoमीo

DQ = b सेoमीo एवं QC = c सेoमीo है।

फिर, AD = BC = a सेoमीo

इस ABCD आयताकार कागज को एक पिचबोर्ड पर अटका दिया तथा नीला रंग से रंग किया।

(3) अब इस नीले रंग के पिचबोर्ड के विपरीत तरफ APQD भाग को नीले रंग से रंग दिया तथा PQCB भाग को लाल रंग से रंग दिया।



ABCD आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = AD × AB

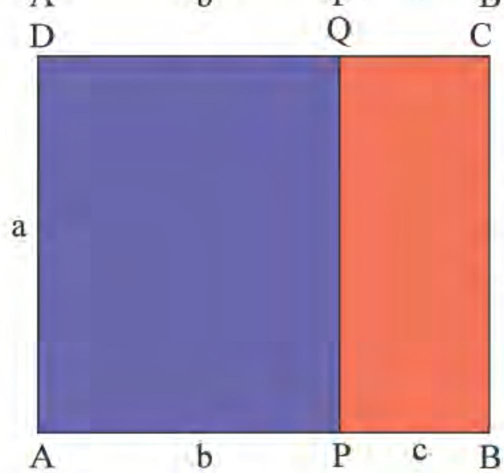
= a × (b + c) वर्ग सेoमीo

APQD आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = AD × AP

= a × b वर्ग सेoमीo

PBCQ आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = BC × PB

= a × c वर्ग सेoमीo



ABCD आयतक्षेत्र का क्षेत्रफल = APQD आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल + PBCQ आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल

$\therefore \quad a\times(b + c) = a\times b + a\times c$

a, b और c अलग–अलग मान लेकर स्वयं से प्रमाणित किया जाय कि $a\times(b + c) = a\times b + a\times c$

34 मैंने 2 कॉपियाँ खरीदा। प्रत्येक कॉपी का दाम x रुपये है। मेरा मित्र इम्तियाज भी 6 कॉपियाँ खरीदा। लेकिन इम्तियाज के प्रत्येक कॉपी का दाम मेरे कॉपी के दाम से 5 रुपये अधिक है। मैं कुल कितने रुपये की कॉपियाँ खरीदा। इम्तियाज कितने रुपये की कॉपियाँ खरीदा।

मेरे 2 कॉपियों का दाम □ × □ रुपये = $\boxed{2x}$ रुपये

इम्तियाज के प्रत्येक कॉपी का मूल्य मेरे कॉपी के मूल्य से 5 रुपये अधिक है।

अतः इम्तियाज के 1 कॉपी का मूल्य $(x + 5)$ रुपये

इम्तियाज के 6 कापियों का मूल्य $6 \times (x + 5)$ रुपये = $\boxed{(6x + 30)}$ रुपये

लेकिन सूमीर 1 कॉपी का मूल्य मेरे कॉपी के मूल्य से 2 रुपये कम है।

मेरे 1 कॉपी का दाम x रुपये

अतः सूमीर के 1 कॉपी का दाम $(x - 2)$ रुपये

सूमीर ने 3 कॉपियाँ खरीदी। 3 कॉपियों का मूल्य = □ × $(x - 2)$ रुपये

= $(3x - 6)$ रुपये

अब मेरा, ईम्तियाज तथा सूमीर के कॉपियों का कुल मूल्य

(□ + □ + □) रुपये = □ रुपये (स्वयं करें)

35 आज हमारे स्कूल का स्थापना दिवस है। कक्षा पाँच के छात्र-छात्राओं में से प्रत्येक को 5 रुपये का पेंसिल और रबर दिया गया। कक्षा छः के छात्र-छात्राओं में से प्रत्येक को 10 रुपये का कम्पास, पेंसिल दिया गया। आज पांचवीं कक्षा में कुल x छात्र-छात्राएं कम आये है।

हिसाब करके देखें कि कितने रुपये की पेंसिल और रबर खरीदा गया। फिर कितने रुपये का पेंसिल कम्पास खरीदा गया।

पाँचवीं कक्षा के छात्र-छात्रा x छठवीं कक्षा के छात्र-छात्रा (□ – □)।

x छात्र-छात्राओं में से प्रत्येक को 5 रुपये की पेंसिल रबर देने पर खर्च = □ × □ रुपये

= 5x रुपये।

$(x - 8)$ छात्र-छात्राओं में से प्रत्येक को 10 रुपये की पेंसिल और कम्पास देने पर कुल खर्च

= □ × $(x - 8)$ रुपये

= (□ – □) रुपये।

36 नीचे के बीजगणितीय संख्या मालाओं को गुणा करके गुणनफल निकालो—

(i) $5x \times (x+2)$ (ii) $-2x(3-x)$ (iii) $(7x+2)2x$ (iv) $b^3(a^2-2ab)$

(v) $4l(l^2+ml+n)$ (vi) $x^2(a^2+x^2y+yx^2)$

(i) $5x \times (x+2)$
$= 5x \times x + 5x \times 2$
$= 5x^2 + 10x$

(ii) $-2x(3-x)$
$= (-2x) \times 3 - (-2x) \times x$
$= -6x - (-2x^2)$
$= -6x + 2x^2$

(iii) $(7x+2)2x$
$= 7x \times 2x + 2 \times 2x$
$= \square + \square$

(iv) $b^3(a^2-2ab)$
$= b^3 \times a^2 - b^3 \times 2ab$
$= b^3a^2 - 2ab^{3+1}$
$= b^3a^2 - 2ab^4$

(v) $4l(l^2+lm+n)$
$= 4l \times l^2 + 4l \times lm + 4l \times n$
$= \square + \square + \square$

(vi) $x^2(x^2+x^2y+xy^2)$
$= \square \times \square + \square \times \square + \square \times \square$
$= \square + \square + \square$

37 $3x(4-2x)-2(x-5)$ का सरलतम मान निकालो

$3x(4-2x)-2(x-5)$
$= 3x \times 4 - 3x \times 2x - 2 \times x + 10$
$= 12x - 6x^2 - 2x + 10$
$= 12x - 2x - 6x^2 + 10$
$= 10x - 6x^2 + 10$
$= -6x^2 + 10x + 10$

38 $a(2a+b-3c)$ और $4a(2c-a)$ को जोड़े

$a(2a+b-3c) + 4a(2c-a)$
$= 2a^2 + ab - 3ac + 8ac - 4a^2$
$= 2a^2 - 4a^2 + ab + 5ac$
$= -2a^2 + ab + 5ac$

स्वयं करे— 6.7

1) प्रत्येक का गुणनफल निकालो।

(i) $ab, (a^2-b^2)$ (ii) $4a, (a+b-c)$ (iii) $6a^2b^2, (2a+b)$

(iv) $xyz, (x^2y-y^2x+z^2y)$ (v) $0, (ab+bc-ca)$

2) सरल करो।

(i) $7x(2x+3)-5x(3x-4)$ (ii) $x(x-y)+y(y-z)+z(z-x)$ (iii) $2x-6x(5-8x-3y)$

(iv) $7a-2(5a+6b-7)$

द्विपदी बीजगणितीय संख्या माला को द्विपदी बीजगणितीय संख्या माला से गुणा करो

39 पाँचवीं कक्षा के x छात्रों में से प्रत्येक को y पुस्तक दी गई। लेकिन छठवीं कक्षा x छात्रों में से प्रत्येक को $(y + 3)$ पुस्तकें दी गई। सप्तम कक्षा के $(x + 11)$ छात्रों में से प्रत्येक को $(y + 10)$ पुस्तकें दी गई।

हिसाब करके देखें कि पाँचवीं, छठवीं एवं सप्तम श्रेणी में से प्रत्येक श्रेणी को कितनी पुस्तकें दी गई तथा तीनों कक्षा को मिलाकर कितनी पुस्तकें दी गई।

पाँचवीं श्रेणी में कुल पुस्तकें दी गई □ × □ पुस्तकें = □ पुस्तकें

छठवीं श्रेणी में कुल पुस्तकें दी गई $x(y + 3)$ पुस्तकें = □ पुस्तकें

सातवीं श्रेणी में कुल पुस्तकें दी गई $(y + 10)\ (x + 11)$ पुस्तकें

$= \{y(x + 11) + 10\ (x + 11)\}$ पुस्तकें

$= (yx + 11y + 10x + 110)$ पुस्तकें

$\therefore$ तीनों श्रेणियों में कुल पुस्तकें दी गई $(xy+xy+3x+xy+11y+10x+110)$ पुस्तकें $[xy = yx]$

$= (3xy + 13x + 11y + 110)$ पुस्तकें

40 $(3x + 2y) \times (4x + 3y)$ कितना होगा ?

$(3x + 2y) \times (4x + 3y)$

$= 3x(4x + 3y) + 2y(4x + 3y)$

$= 12x^2 + 9xy + 8xy + 6y^2$

$= 12x^2 + 17xy + 6y^2$

41 $(7x^2 - y^2) \times (x - y)$ कितना होगा ?

$(7x^2 - y^2) \times (x - y)$

$= 7x^2(x - y) - y^2(x - y)$

$= 7x^2 \times x - 7x^2 \times y - (y^2x - y^2 \times y)$

$= 7x^3 - 7x^2y - xy^2 + y^3$

42 $(2x+3y)$ को $(x+y-z)$ से गुणा करे।

$(2x + 3y) \times (x + y - z)$

$= 2x(x + y - z) + 3y(x + y - z)$

= □ + □ – □ + □ + □ – □

$= 2x^2 + 5xy - 2xz + 3y^2 - 3yz$

43 $(3a+2b)$ को $(a-b-c)$ से गुणा करे।

$(3a + 2b) \times (a - b - c)$

$= 3a(a - b - c) + 2b(a - b - c)$

= □ – □ – □ + □ – □ – □

$= 3a^2 - ab - 3ac - 2b^2 - 2bc$

स्वयं करे— 6.8

1) गुणा करें।

(i) $(10-3x)(7+x)$ (ii) $(11+2x)(8-2y)$ (iii) $(a+by)(4a-6y)$

(iv) $(2x^2y-y^2)(3x-5y)$ (v) $(\frac{x}{2}-\frac{y}{3})(\frac{2x}{3}-\frac{3y}{5})$ (vi) $(\frac{2a^2}{9}-\frac{1}{7})(\frac{3a}{5}-\frac{2}{5})$

बराबर भाग करे

खाली घरों को भरो :

$5x \times 6y = 30xy$

$30xy \div 5x = 6y$ $30xy \div 6y = 5x$

$4x^2 \times (-2x) = -8x^3$

$-8x^3 \div (-2x) = 4x^2$ $-8x^3 \div 4x^2 = -2x$

$2a \times 3b = \square$

$6ab \div 2a = \square$ $6ab \div 3b = \square$

$(-8a) \times (-3b) = \square$

$24ab \div (-8a) = \square$ $24ab \div (-3b) = \square$

44 नसरीन, साबिर, शोभा और परान आज 8 टोकरी आम बराबर बटबॉरा कर लेगे।

सबसे पहले गिनकर देखे कि टोकरी में कुल कितने आम है?

यदि प्रत्येक टोकरी में x संख्यक आम हो तो 8 टोकरियों में कुल आम है $8 \times x$ आम = $\square$ आम

चारों आपस में भाग करके प्रत्येक पायेगे $(8x \div 4)$ आम

$= 2x$ आम

लेकिन यदि 8x आम बराबर x भाग में बाँटे तो $x \neq 0$

($\neq$ समान नहीं का चिह्न अर्थात असमान)

8x आम को समान x भाग में भाग करने पर प्रत्येक भाग होगा

$8x \div x = \frac{8x}{x} = 8 \times x^{1-1} = 8x^0 = 8$

दूसरे तरीके से $\frac{8x}{x} = 8$

$\frac{2^3}{2^2} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2}{\cancel{2}\times\cancel{2}} = 2$

$\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

$\frac{x^3}{x^2} = x^{3-2} = x^1 = x$

(जहाँ, $x \neq 0$)

$\frac{\cancel{7}^2}{\cancel{7}^2} = 1$ फिर

$\frac{7^2}{7^2} = 7^{2-2} = 7^0$

अत: $7^0 = 1$.

$x^0 = 1$ जब $x \neq 0$

हम जानते है कि (कोई भी संख्या) $\times 0 = 0$

$0 \div$ (शून्य के अतिरिक्त किसी भी संख्या) $= 0$

$5 \div 0$ एवं $0 \div 0$ क्या होगा देखे ?

देखते है $5 - 0 = 5 - 0 = 5 - 0 = 5.....$ अर्थात 5 से बारबार 0 घटाने पर 5 को 0 में परिणत नहीं किया जा सका। अत: यहाँ भागफल नहीं मिल रहा है। अत: $5 \div 0$ अज्ञात।

फिर देखते है कि 0 से एक बार 0 घटाने पर 0 होता है। 0 से दो बार 0 घटाने पर 0 होता है। तीन बार में भी 0 होता है। अत: 0 से किसी भी संख्यक बार 0 घटाने पर 0 होता है। अत: यहाँ 1, 2, 3, ... कोई भी संख्या भागफल हो सकता है। अत: $0 \div 0$ अज्ञात।

45 8x को x^2 से भाग दें (जहाँ $x \neq 0$)

$8x \div x^2 = \frac{8x}{x^2} = 8x^{1-2} = 8x^{-1} = \frac{8}{x}$

$\frac{8x}{x^2} = \frac{8}{x}$

दूसरे तरीके से,

$x^{-1} = x^{0-1} = \frac{x^0}{x^1} = \frac{1}{x}$ (जहाँ, $x \neq 0$)

46 हम नीचे के भागों को करें।

(i) $9a^3 \div a^2$ (ii) $- 13xy^2 \div 2y^2$ (iii) $(- 25x^2pq^2) \div (-5pq)$ (iv) $15xyz \div (-15xyz)$

(i) $9a^3 \div a^2 = \frac{9a^3}{a^2} = 9a^{\square - \square} = 9a$

(ii) $- 13xy^2 \div 2y^2 = \frac{-13xy^2}{2y^2} = \frac{-13}{2}xy^{\square - \square} = \frac{-13}{2}xy^{\square} = \frac{-13}{2}x$

दूसरे तरीके से,

$\frac{-13x\cancel{y^2}}{2\cancel{y^2}} = \frac{-13}{2}x$

(iii) $- 25x^2pq^2 \div (-5pq)$

$= \frac{-\overset{5}{\cancel{25}}x^2pq^2}{-\cancel{5}pq} = 5x^2p^{\square - \square}q^{\square - \square} = 5x^2q$

दूसরে तरीके से,

$\frac{-\overset{5}{\cancel{25}}x^2\cancel{p}\overset{q}{\cancel{q^2}}}{-\cancel{5}\cancel{p}\cancel{q}}$

$= 5x^2q$

(iv) $15xyz \div (-15xyz)$

$= \frac{15xyz}{-15xyz}$

$= - x^{\square - \square}y^{\square - \square}z^{\square - \square}$

$= -1$

दूसरे तरीके से,

$15xyz \div (-15xyz)$

$= \frac{\cancel{15xyz}}{\cancel{-15xyz}} = -1$

प्रत्येक क्षेत्र में बीजगणितीय संख्या a, x, y, z, p और q किसी का भी मान शून्य नहीं होता है।

नयी आलमारी में पुस्तकें सजाकर देखें

47 मेरी पुस्तक रखने वाली पुरानी आलमारी में 6 ताक है। प्रत्येक ताक में x पुस्तकें है।

आज मैंने तय किया है कि इस पुरानी आलमारी की सभी पुस्तके तथा और 15 नयीं पुस्तकों को नयी आलमारी के 3 ताकों में बराबर संख्या में पुस्तकों को सजाकर रखूँगा। हिसाब करके देखें कि नयी आलमारी के प्रत्येक ताक में कितनी पुस्तके रखी जा सकती है।

पुरानी आलमारी के 1 ताक में x पुस्तकें है।

6 ताकों में कुल पुस्तकें = $6 \times x = 6x$ पुस्तकें

नयी आलमारी में पुस्तकें $(6x + 15)$ रखेगें।

नयी आलमारी के 3 ताकों में $(6x + 15)$ पुस्तकें बराबर भाग में सजाकर रखने पर प्रत्येक ताक में $\{(6x + 15) \div 3\}$ पुस्तकें होगी।

$\therefore \{(6x + 15) \div 3\}$ क्या पायेगे ?

$$(6x + 15) \div 3 = \frac{6x + 15}{3} = \frac{1}{3}(6x + 15)$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \times \overset{2}{\cancel{6}}x + \frac{1}{\cancel{3}} \times \overset{5}{\cancel{15}} \quad \text{(विच्छेद नियम)}$$

$$= 2x + 5$$

$\therefore$ नयी आलमारी के प्रत्येक ताक में $(2x + 5)$ पुस्तकें रखेगे।

48 $(6x + 15)$ को $3x$ से भाग दें,

$$(6x + 15) \div 3x = \frac{6x + 15}{3x}$$

$$= \frac{6x}{3x} + \frac{15}{3x}$$

$$= \square + \frac{5}{x}$$

49 $(8x^3 + 7x^2 + x^2y)$ को $2x^2$ से भाग दे।

$$(8x^3 + 7x^2 + x^2y) \div 2x^2$$

$$= \frac{8x^3 + 7x^2 + x^2y}{2x^2}$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{8}}x^3}{\cancel{2}x^2} + \frac{7x^2}{2x^2} + \frac{x^2y}{2x^2}$$

$$= 4x^{\square - \square} + \frac{7}{2}x^{\square - \square} + \frac{1}{2}x^{\square - \square}y$$

$$= \square + \square + \square$$

50 $(-90a^2b^2 + 80a^3b^3 - 50a^4b^4)$ -को $10a^3b$ से भाग दे।

$$\frac{-90a^2b^2 + 80a^3b^3 - 50a^4b^4}{10a^3b}$$

$$= -\frac{\overset{9}{\cancel{90}}a^2b^2}{\cancel{10}a^3b} + \frac{\overset{8}{\cancel{80}}a^3b^3}{\cancel{10}a^3b} - \frac{\overset{5}{\cancel{50}}a^4b^4}{\cancel{10}a^3b}$$

$$= -(9a^{\square-\square}\, b^{\square-\square}) + (8a^{\square-\square}\, b^{\square-\square}) - 5\, a^{\square-\square}\, b^{\square-\square}$$

$$= -9\, a^{-1}b + 8\, a^0b^2 - 5ab^3$$

$$= -9\frac{b}{a} + 8b^2 - 5ab^3$$

[प्रत्येक क्षेत्र में बीजगणितीय संख्या a, b,x, y किसी का मान शून्य नहीं है]

बनाकर देखें– 6.3

1. मन ही मन में हिसाब करें।

(i) $3a \times 4b = \square$ (ii) $12ab \div 3a = \square$ (iii) $12ab \div \square = 4ab$

(iv) $(-x^2) \times x = \square$ (v) $9x^2 \div 3x^2 = \square$ (vi) $x^2 \times x^2 = \square$

(vii) $x^2 \times \square = 1$ (viii) $0 \div ab = \square$ (ix) $4a^2b^2c^2 \times \square = 0$

(x) $3ab \div \square = a$ (xi) $x^0 \times y = \square$ (xii) $x \div 0 = \square$

2. गुणा करे।

(a) $2x^2 \times (-3y) \times 6z$ (b) $7xy^2 \times 8x^2y \times xy$

(c) $(-3a^2) \times (4a^2b) \times (-2)$ (d) $(-2mn) \times \frac{1}{6}\ m^2n^2 \times 13m^4n^4$

(e) $\frac{2}{3}\ x^2y \times \frac{3}{5}\ xy^2$ (f) $(-\frac{18}{5}x^2z) \times (-\frac{25}{6}\ xz^2y)$

(g) $(-\frac{3}{5}\ s^2t) \times (\frac{15}{7}st^2u) \times (\frac{7}{9}su^2)$ (h) $(\frac{4}{3}\ x^2yz) \times (\frac{1}{3}y^2zx) \times (-6xyz^2)$

(i) $4a\,(3a + 7b)$ (j) $8a^2 \times (2a + 5b)$

(k) $-17\, x^2 \times (3x - 4)$ (l) $\frac{2}{3}abc\,(a^2 + b^2 - 3c^2)$

(m) $2 \times 5x\,(10x^2y - 100xy^2)$ (n) $(2x + 3y)\,(5x - y)$

(o) $(a^2 - b^2)\,(2b - 6a)$ (p) $(x + 2)\,(3x + 1)$

[प्रत्येक क्षेत्र में बीजगणितीय संख्या x, y, z, a, b, c, m, n, s, t और u किसी का मान शून्य नहीं]

3. (i) सीमा ने प्रत्येक कतार में $3x$ पौधे लगाया है। इसी प्रकार के $2x$ कतार में सीमा ने कितने पौधे लगाए बताओ।

   (ii) एक आयतक्षेत्र की लम्बाई $(4x + 1)$ मीटर एवं चौड़ाई $3x$ मीटर है। तो आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना होगा।

   (iii) अभी 1 दर्जन केले का दाम पहले से 6 रुपये बढ़ गया है। पहले 1 दर्जन केले का दाम x रुपये था। अभी $2x$ दर्जन केला खरीदने में कितने रुपये लगेंगे ?

   (iv) एक वर्गाकार क्षेत्र के प्रत्येक भुजा की लम्बाई $7x$ से०मी० हो, तो वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना होगा ?

   (v) आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल $8x^2$ वर्ग इकाई है। अगर उसकी लम्बाई $4x$ इकाई हो तो उसकी चौड़ाई कितनी होगी ?

   (vi) सुशोभन ने $9y$ दिनों में $729y^4$ पतंगे बेचा है। तो वह प्रत्येक दिन कितनी पतंगे बेचा ?

   [प्रत्येक क्षेत्र में किसी बीजगणितीय संख्या का मान शून्य नहीं है]

4. प्रथम बीजगणितीय संख्याराशि का द्वितीय संख्या राशि से भाग दो।

   (i) $8x^3b, x^2b,$ (ii) $-9xy^3, xy,$ (iii) $-15x^2y^4z^2, -x^2yz^2,$

   (iv) $21l^3m^3n^3, -4l^4mn,$ (v) $(5a^2 - 7ab^2), a,$ (vi) $(-48x^9 + 12x^6), 3x^3,$

   (vii) $15m^2n + 20m^2n^2, 5mn,$ (viii) $36a^5b^2 - 24a^2b^5, -4a^2b^2,$

   (ix) $3pqr + 6p^2qr^2 - 9p^3q^2r^3, -3pqr,$ (x) $m^2n^4 + m^3n^3 - m^4n^2, -m^4n^4$

   [प्रत्येक क्षेत्र में किसी भी बीजगणितीय संख्या का मान शून्य नहीं है]

5. सरल करों।

   (i) $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)$

   (ii) $a(b-c) - b(c-a) - c(a-b)$

   (iii) $x(x+4) + 2x(x-3) - 3x^2$

   (iv) $3x^2 + x(x+2) - 3x(2x+1)$

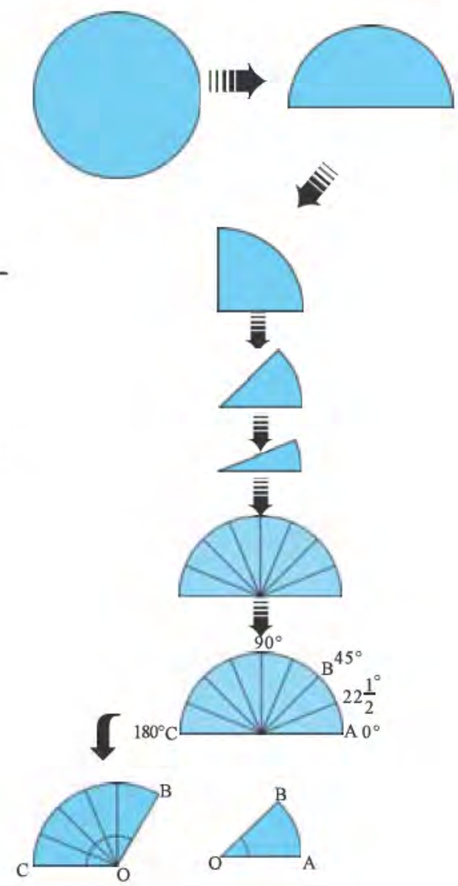
   (v) $(a+b)(a-b) + (b+c)(b-c) + (c+a)(c-a)$

   (vi) $(a^2+b^2)(a^2-b^2) + (b^2+c^2)(b^2-c^2) + (c^2+a^2)(c^2-a^2)$

7. कम्पास की सहायता से निर्दिष्ट कोण बनाना

आज हम कागज काट कर एवं मोड़कर विभिन्न प्रकार के कोण बनाने की कोशिश करेंगे।

मैं कागज काटकर तथा मोड़कर कोणों को बनाऊँगा और निषाद चांद से मापकर देखेगा कि कोण ठीक है या नहीं।



सर्वप्रथम एक वृत्ताकार कागज को दो भागों में बाँटा—

अब इस अर्द्धवृत्ताकार कागज को दो बराबर भागों में मोड़ा—

इस मोड़े गए कागज को और दो बराबर भागों में बाँटा—

इस बार और एक बार समान दो बराबर भागों में बाँटा —

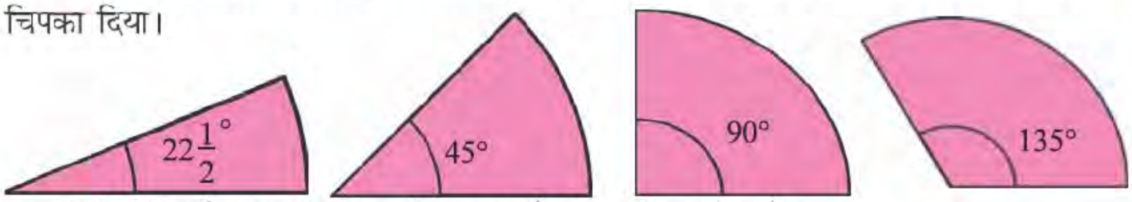
अब मोड़ को खोलने पर पाया —

चांद की सहायता से निषाद मापकर देखा —

45^0 कोण काट लेने पर पायेंगे—

$\angle AOB = 45^0$, $\angle COB = 135^0$

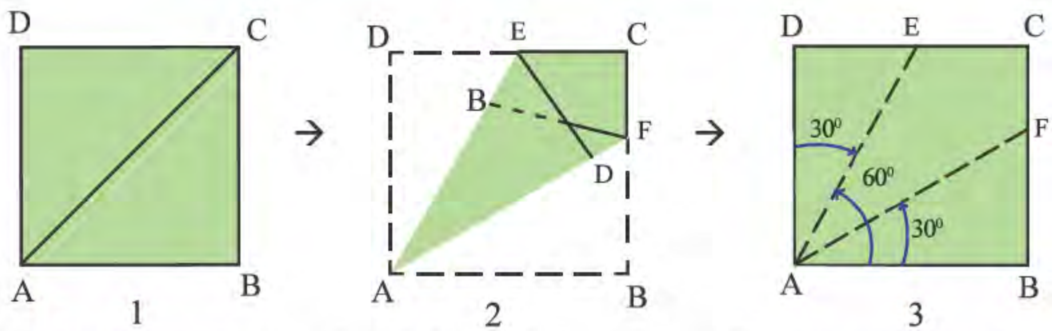
कागज मोड़कर इस प्रकार से कई कागज का कोण बनाया तथा काटकर और रंग करके पिचबोर्ड पर चिपका दिया।



इन कोणों में से कौन सा कोण न्यूनकोण तथा कौन सा अधिक कोण है।

हम चांद की सहायता से सभी कोण बना सकते है, फिर गोलाकार कागज मोड़कर — ☐ , ☐ , ☐ .... कोण पाया।

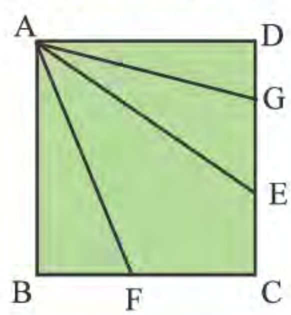
अब वर्गाकार कागज को मोड़कर कौन कौन कोण बनता है देखें —



सबसे पहले वर्गाकार कागज के A कोना को केन्द्र करके AB और AD कोना को 2 नम्बर चित्र की तरह मोड़ा जिससे मुड़े हुए भाग के दोनों अंश एक दूसरे पर पूर्ण रूप से मिल जाये। मोड़ को खोलने पर 3 नम्बर चित्र की तरह मिला। अब मोड़ खोल कर पाया $\angle DAE = \angle EAF = \angle FAB = 30^0$

$$\angle BAE = \angle DAF = 60^0$$

अब A कोण को केन्द्र मानकर AD को AE के साथ मिलाकर मोड़ को खोलने पर पाया — $\angle DAG = 15^0$



वर्गाकार कागज के मोड़ को खोलने पर ☐ , ☐ तथा ☐ डिग्री का कोण मिला

मैं स्क्वायर से बहुत कोण बना पाया हूँ वे कोण है, 30^0, ☐, ☐, ☐

लेकिन स्केल और पेंसिल कम्पास से कौन-कौन कोण बना सकता हूँ देखूँ।

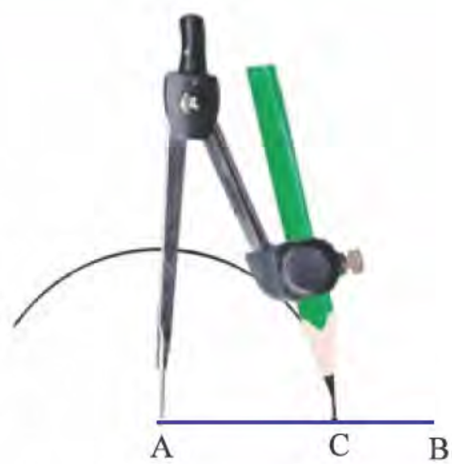
1 सर्वप्रथम स्केल और कम्पास की सहायता से 90° बनाने की चेष्टा करुँ।

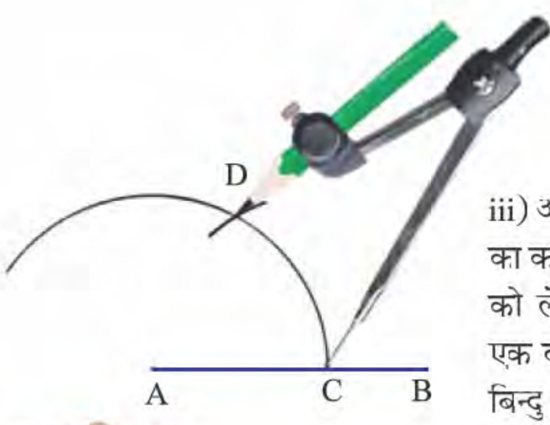
एक सरल रेखा के ऊपर दूसरी सरल रेखा लम्ब रूप में खड़ी रहती है तो उससे जो कोण बनता है उसका मान 90° होगा। अत: सरल रेखा के ऊपर लम्ब उसका समद्विभाजक बनाकर उसे भी 90° का कोण बना सकते हैं।

एक सरल रेखा के बाहरी किसी बिन्दु से उस सरल रेखा पर लम्ब बना सकते है। लेकिन उस सरल रेखा के ऊपर किसी बिन्दु पर किस प्रकार लम्ब खीचूंगा या 90° का कोण बनाऊँगा?

i) स्केल और पेंसिल की सहायता से एक सरल रेखा AB खीचां। AB सरल रेखा के A बिन्दु पर पेंसिल कम्पास की सहायता से लम्ब खीचूँगा।

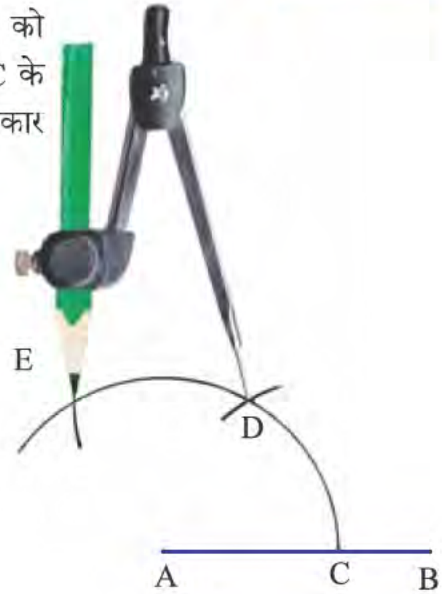
ii) AB सरल रेखा के A बिन्दु को केन्द्र मानकर अर्थात् पेंसिल कम्पास का कांटा A बिन्दु पर रखकर किसी भी लम्बाई के अर्द्धव्यास को लेकर एक अर्द्धवृत्ताकार चाप बनाया। यह चाप AB सरल रेखा को C बिन्दु पर काटती है।



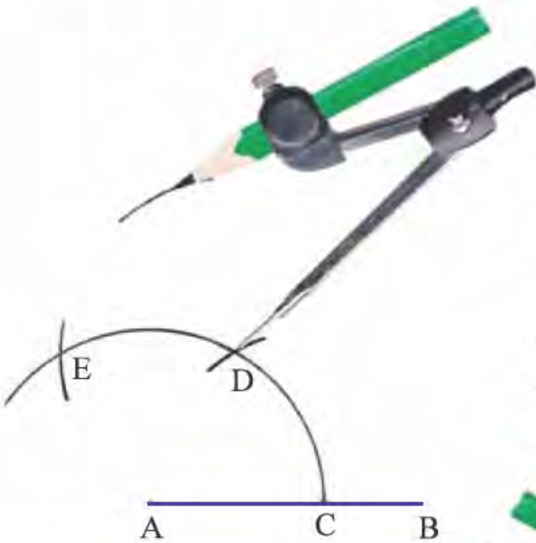


iii) अब C बिन्दु को केन्द्र मानकर अर्थात् पेंसिल कम्पास का कांटा C बिन्दु पर रखकर एक ही लम्बाई के अर्द्धव्यास को लेकर अर्थात् AC की लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर एक वृत्ताकार चाप बनाया जो पहले की वृताकार चाप D बिन्दु पर काटता है।

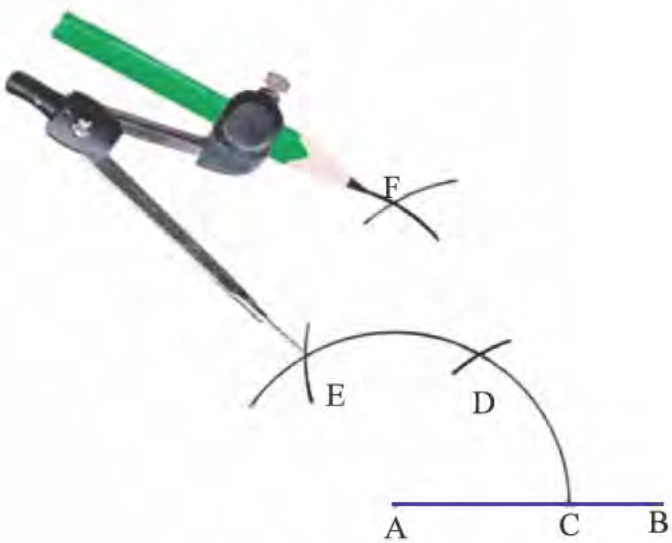
iv) अब पेंसिल कम्पास कांटा को D बिन्दु पर रखकर, D बिन्दु को केन्द्र मानकर एक ही लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर अर्थात् AC के लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर एक वृत चाप बनाथा जो प्रथम वृत्ताकार चाप को E बिन्दु पर काटता है।

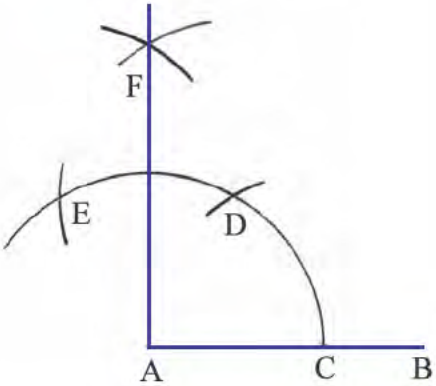


v) अब D बिन्दु को केन्द्र मानकर एक ही लम्बाई के अर्द्धव्यास का एक वृताकार चाप बनाया।



vi) अब E बिन्दु को केन्द्र करके एक ही लम्बाई के अर्द्धव्यास का एक वृत्तचाप बनाया। दोनों वृताकार चाप एक दूसरे को F बिन्दु पर काटता है।



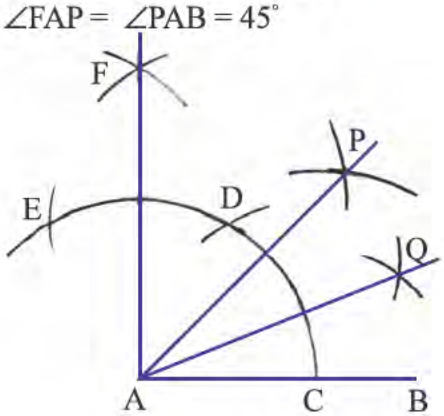


vii) स्केल की सहायता से A और F बिन्दु को मिला दिया। चांद की सहायता से मापने पर ∠FAB = ☐ पाया।

2 मैं इस $\angle FAB$ को दो बराबर भागों में बांटूँ अर्थात् समद्विभाजित करु और क्या पाया देखें

$\angle FAB$ को पेंसिल कम्पास और स्केल की सहायता से समद्विभाजित किया तो पाया,

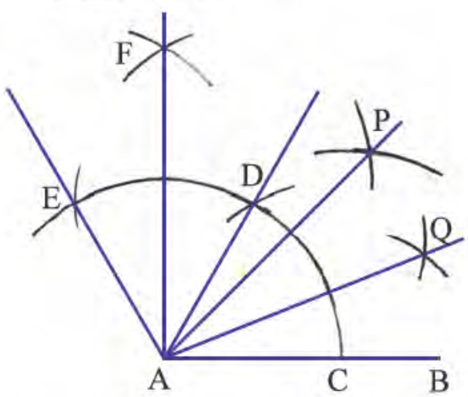
$\angle FAP = \angle PAB = 45^\circ$



D और A को मिलाया तथा चांद की सहायता से मापकर देखा तो $\angle DAB = 60^\circ$

या $\angle BAD = 60^\circ$

फिर, $\angle FAD = 30^\circ$



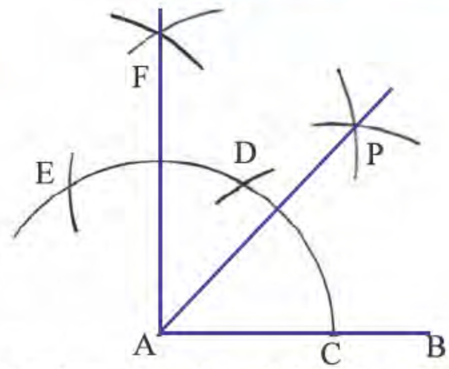
$\angle FAD$ कोण को फिर दो समान भागों में बाँट दूँ अथवा समद्विभाजित करूँ।

पाया, $\angle FAG = \angle GAD = 15^\circ$

फिर, $\angle BAG = \angle BAD + \angle DAG$

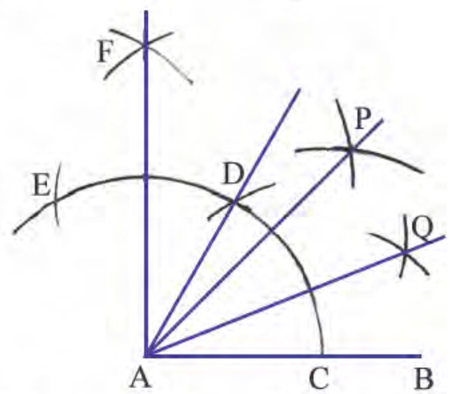
$= 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$

$\angle DAE =$ ☐ डिग्री **[स्वयं करें]**



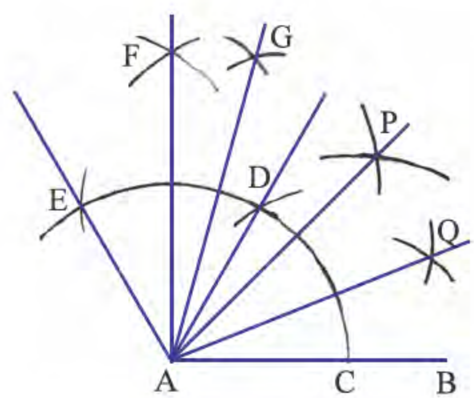
$\angle PAB$ कोण फिर समान दो भागो में समद्विभाजित किया तो

पाया, $\angle BAQ = \angle PAQ = 22\frac{1}{2}^\circ$



अब, E, A को मिलाऊँ तथा चाँद की सहायता से मापकर देखूँ।

देखा, $\angle EAB = 120^\circ$

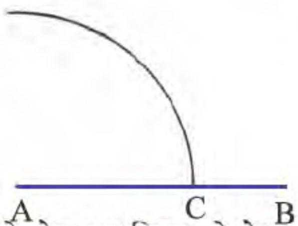


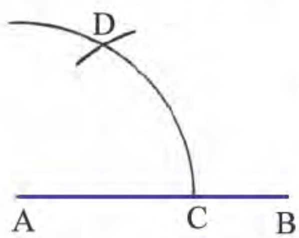
90^0 कोण बनाते समय $15°$, $22\frac{1}{2}°$, $30°$, $45°$, $60°$, $75°$ तथा $120°$ कोण बिना चांद की सहायता से बनाया, वह भी स्केल, पेन्सिल कम्पास की सहायता से बना पाया।

3 केवल पेंसिल कम्पास और स्केल की सहायता से $60°$, $30°$, $15°$ का कोण बना पाता हूँ या नहीं।

i) स्केल और पेंसिल की सहायता से एक सरल रेखा AB बनाया।

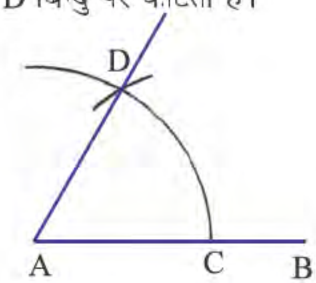
ii) AB रेखा के A बिन्दु को केन्द्र मानकर किसी भी लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर एक वृत्तचाप बनाया, जो AB सरल रेखा को C बिन्दु पर काटता है।

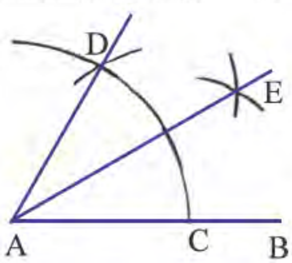




iii) अब उस एक ही लम्बाई के अर्द्धव्यास को लेकर C बिन्दु को केन्द्र मानकर अर्थात् पेंसिल कम्पास का काँटा C बिन्दु पर रखकर एक वृत का चाप बनाया जो पहले के वृत चाप को D बिन्दु पर काटता है।

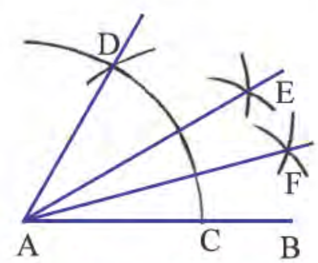
iv) स्केल की सहायता से A और D दोनों बिन्दुओं को जोड़कर $\angle DAB$ बनाया एवं $\angle DAB = 60^0$



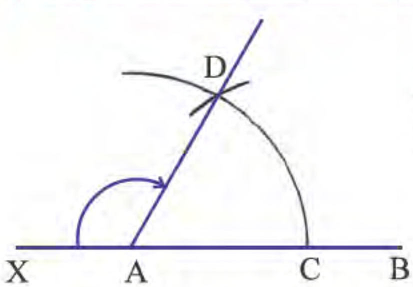


v) $\angle DAB$ को समद्विभाजित करके 30^o पाया अर्थात् $\angle EAB = 30^o$

vi) $\angle EAB$ को समद्विभाजित करके 15^o का कोण बनाया अर्थात् $\angle FAB = 15^o$

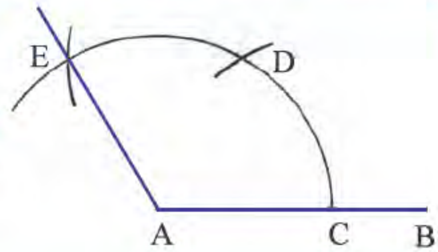


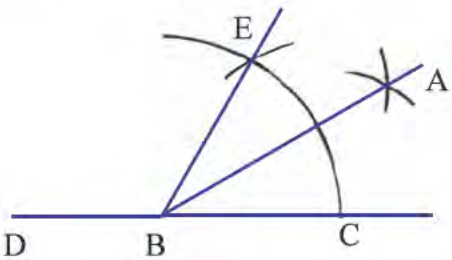
4 किन्तु मैं यदि 60^0 का कोण बनाकर एक भुजा को विपरीत तरफ बढ़ा दूँ तो क्या पायेंगे देखे।



AB भुजा के B बिन्दु के विपरीत X बिन्दु तक बढ़ाया।
देखते हैं $\angle DAB = 60^o$ तथा $\angle DAX = 120^o$

फिर, D बिन्दु को केन्द्र करके एक ही लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर एक वृत का चाप खींचा। जो पहले के वृत चाप को E बिन्दु पर काटता है, स्केल की सहायता से A और E बिन्दु दोनों को जोड़कर चांद की सहायता से $\angle EAB = 120^o$ पाया।





इसबार यदि 30^o कोण $\angle ABC$ बनाकर उसके BC भुजा को C बिन्दु के विपरीत दिशा में बढ़ाने से क्या पायेंगे देखें।

$\angle ABC = 30^o$,

BC भुजा को C बिन्दु के विपरीत दिशा में D बिन्दु तक बढ़ाया, $\angle ABD =$ ☐ डिग्री का कोण बना।

अब इस $\angle ABD$ को समद्विभाजित करें तो कौन-सा कोण बनेगा देखें।

बनाकर देखें — 7

1. कागज को मोड़कर हाथ तथा कलम से $15^o, 22\frac{1^o}{2}, 45^o, 60, 90^o$ का कोण बनायें।

2. स्केल, पेंसिल और कम्पास की सहायता से AB सरल रेखा के ऊपर A बिन्दु पर 90° का कोण बनाया। वहाँ से $120^\circ, 75^\circ$ और 60° का कोण बनाओ।

3. स्केल, पेंसिल और कम्पास की सहायता से 45° और $2\frac{1^\circ}{2}$ का कोण बनाओ।

4. स्केल, पेंसिल और कम्पास की सहायता से निम्नलिखित कोण बनाओ।

   a) 30° b) 60° c) 75° d) 105° e) 120° f) 135° g) 150° h) 15°

5. स्केल, पेंसिल और कम्पास की सहायता से $\angle PQR$ कोण बनाओ जो 60°; का है। अब QR भुजा को R बिन्दु के विपरीत तरफ S बिन्दु तक बढ़ाया। $\angle PQS =$ ☐ डिग्री होगा। PQS कोण को समद्विभाजित करके चाँद की सहायता से मापकर देखे कि $\angle PQS$ समद्विभाजित हुआ या नहीं।

6. स्केल, पेंसिल और कम्पास की सहायता से $\angle ABC$ बनाया जिसका मान 30°; है। अब BC भुजा को C बिन्दु के विपरीत तरफ D बिन्दु तक बढ़ाया। अब $\angle ABD$ का समद्विभाजक BE खीचों चाँद की सहायता से मापकर देखो कि $\angle DBE =$ ☐ डिग्री तथा $\angle EBC =$ ☐ डिग्री।

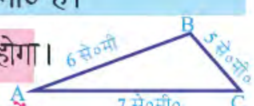
8. त्रिभुज बनाना

आज मैं, रेशमी, बनलता, सब्बा तथा रफीक सबने मिलकर तय किया है कि निर्दिष्ट माप का त्रिभुज बनायेंगे तथा त्रिभुजाकार क्षेत्र को रंग करेंगे। सबसे पहले हम इच्छानुसार विभिन्न माप का त्रिभुज बनायेंगे।

आज मैं त्रिभुज की भुजा और कोण का मान अलग रखूँगा। मेरे मित्र उसी मान के त्रिभुज बनाने की चेष्टा करेंगे। त्रिभुज की भुजाओं की संख्या ☐ एवं कोण ☐ होता है।

त्रिभुज की तीन भुजाओं की लम्बाई क्रमश: 5 से॰मी॰, 6 से॰मी॰ तथा 7 से॰मी॰ है। इससे त्रिभुज बनाने की कोशिश करें, अर्थात् ABC एक त्रिभुज बनाओ जिसकी भुजा AB=6 से॰मी॰, BC = 5 से॰मी॰ तथा CA = 7 से॰मी॰ है।

केवल पेंसिल और स्केल से छोटा एक त्रिभुज बनाकर देखे कि कौन सा बिन्दु कहाँ होगा।



1 अब स्केल, पेंसिल तथा कम्पास से सुन्दर एक त्रिभुज बनाने की कोशिश करें।

i) स्केल और पेंसिल की सहायता से 5 से॰मी॰, 6 से॰मी॰ और 7 से॰मी॰ लम्बाई की तीन सरल रेखा खींचा।

5 से॰मी॰ ____________________

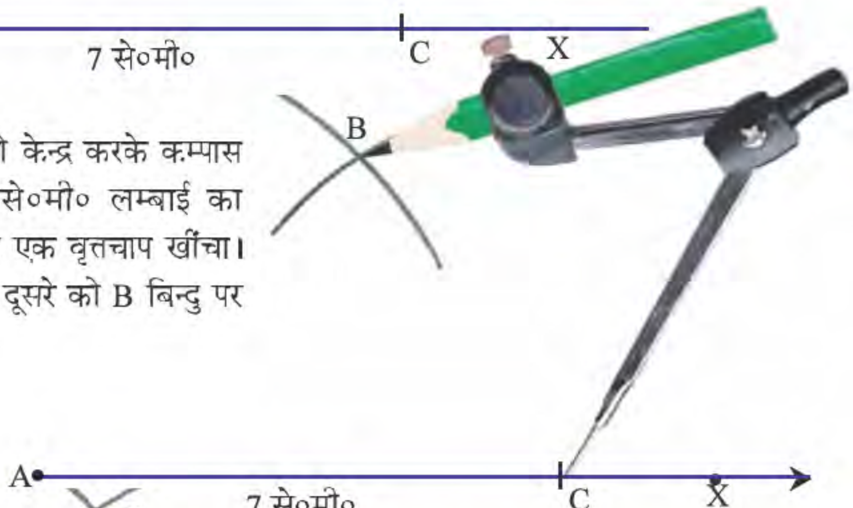
6 से॰मी॰ ______________________

7 से॰मी॰ ________________________

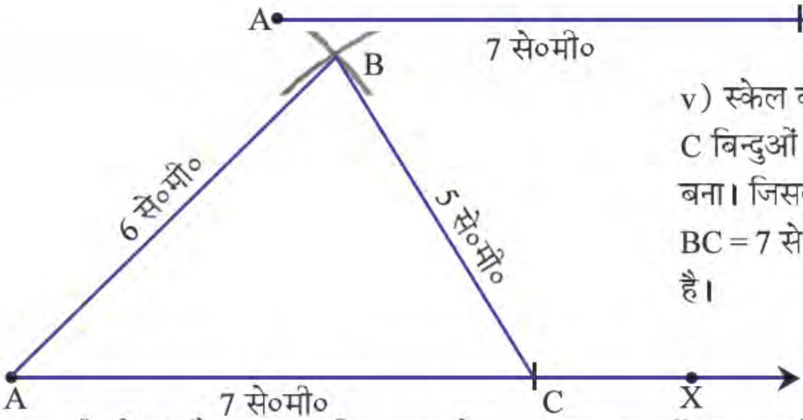
ii) एक किरण AX बनाया। AX किरण के A बिन्दु को केन्द्र करके पेंसिल कम्पास की सहायता से 7 से॰मी॰ लम्बाई के अर्द्धव्यास का एक वृत्तचाप से काटकर AC सरल रेखा बना।

iii) A बिन्दु को केन्द्र करके पेंसिल कम्पास की सहायता से 6 से॰मी॰ लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर एक वृत्तचाप खींचा। इस वृत्तचाप के ऊपर कहीं B बिन्दु है (इसी B बिन्दु को खोजना प्रधान काम है)।

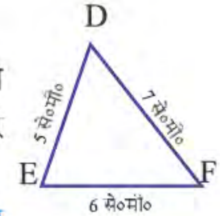
iv) अब C बिन्दु को केन्द्र करके कम्पास की सहायता से 5 से॰मी॰ लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर और एक वृत्तचाप खींचा। ये दोनों वृत्तचाप एक दूसरे को B बिन्दु पर काटती है।



v) स्केल की सहायता से A, B एवं B, C बिन्दुओं को मिलाने पर त्रिभुज ABC बना। जिसकी भुजा AB = 6 से॰मी॰, BC = 7 से॰मी॰, एवं AC = 7 से॰मी॰ है।



सब्बा भी स्केल और कम्पास की सहायता से DEF एक दूसरा त्रिभुज बनायी। जिसकी भुजा DE =5 से॰मी॰, EF = 6 से॰मी॰ और FD = 7 से॰मी॰ है। मैं △DEF काटकर △ABC के ऊपर रखकर देखती हूँ कि सम्पूर्ण रूप से मिल गया हैं (स्वयं करो)।



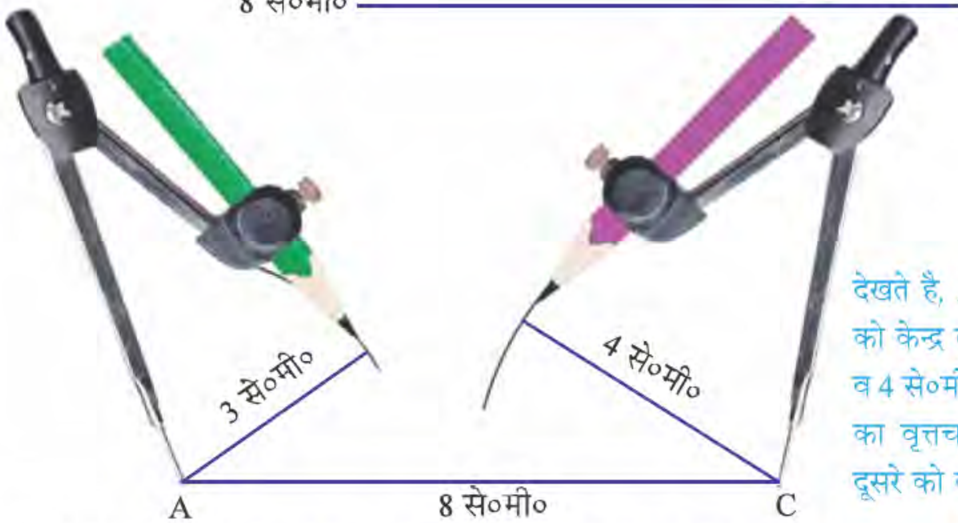
अतः दो त्रिभुजों की अनुरूप भुजायें समान होने पर दोनों त्रिभुज सम्पूर्ण रूप से मिल जाता है अर्थात् त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई निर्दिष्ट होने पर त्रिभुज भी निर्दिष्ट होगा।

2 मैं 3 सेoमीo, 4 सेoमीo व 8 सेoमीo लम्बाई की सरल रेखा लेकर त्रिभुज बनाने की चेष्टा करुँ।

3 सेoमीo ________

4 सेoमीo ___________

8 सेoमीo ________________________



देखते है, A और C बिन्दु को केन्द्र करके 3 सेoमीo व 4 सेoमीo का अर्द्धव्यास का वृत्तचाप परस्पर एक दूसरे को काटते है।

मैं 5सेoमीo, 6 सेoमीo व 7 सेoमीo लम्बाई की सरल रेखाओं से त्रिभुज बनाया। इसमे सबसे छोटे दो बाहुओं अर्थात् भुजाओं की लम्बाई 5 सेंoमीo, 6 सेoमीo तथा तृतीय भुजा की लम्बाई 7 सेoमीo है।

फिर, 5 सेoमीo + 6 सेoमीo = 11 सेoमीo > 7 सेoमीo

फिर, देखते है 3 सेoमीo, 4 सेoमीo और 8 सेoमीo लम्बी सरल रेखाओं को लेकर त्रिभुज नहीं बना, इसकी सबसे छोटी दो भुजाओं की लम्बाई क्रमश: 3 सेoमीo व 4 सेoमीo एवं तृतीय भुजा की लम्बाई 8 सेoमीo है।

फिर, 3 सेoमीo + 4 सेoमीo = 7 सेoमीo < 8 सेoमीo

अत: देखते है कि त्रिभुज के छोटे दो भुजाओं की लम्बाई तृतीय भुजा की लम्बाई से बड़ी होगी तभी त्रिभुज की रचना होगी।

बनाकर देखें — 8.1

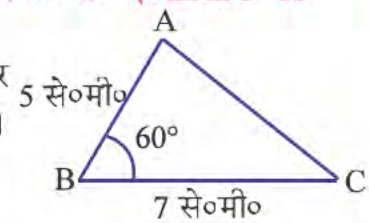
1. त्रिभुज की तीन भुजायें दी गई है। जहाँ पर त्रिभुज बनाना संभव है वहाँ त्रिभुज बनाने की कोशिश करे तथा जहाँ त्रिभुज बनना असंभव है वहाँ कारण बताओ।

i) 4 सेoमीo, 5 सेoमीo और 7 सेoमीo **ii)** 9 सेoमीo, 4 सेoमीo और 4 सेoमीo **iii)** 6 सेoमीo, 8 सेoमीo और 10 सेoमीo

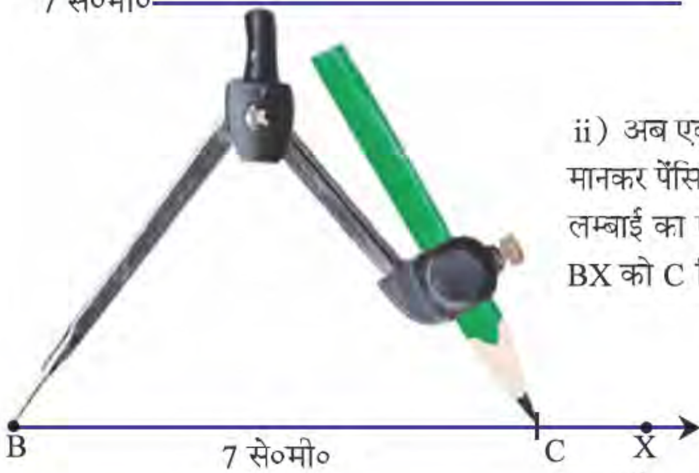
2. ABC एक त्रिभुज बनाओ जिसकी भुजा AB = 5.5 सेoमीo BC = 5 सेoमीo और CA = 6 सेoमीo
3. एक समबाहु त्रिभुज बनाओ जिसकी प्रत्येक भुजाओ की लम्बाई 4.5 सेoमीo हो। चाँद की सहायता से मापकर कोण का मान लिखो।
4. PQR एक त्रिभुज बनाओ जिसकी भुजा PQ = 6 सेoमीo, QR = 5 सेoमीo और PR = 6 सेoमीo हो। चाँद की सहायता से इस त्रिभुज के प्रत्येक कोण का माप एवं कोणों में संपर्क बताओ।

3 ABC एक त्रिभुज बनाओ जिसकी भुजा AB=5 से०मी०, BC=7 से०मी० एवं ∠ABC=60°

सर्वप्रथम स्केल और पेंसिल से छोटा करके बनाओं

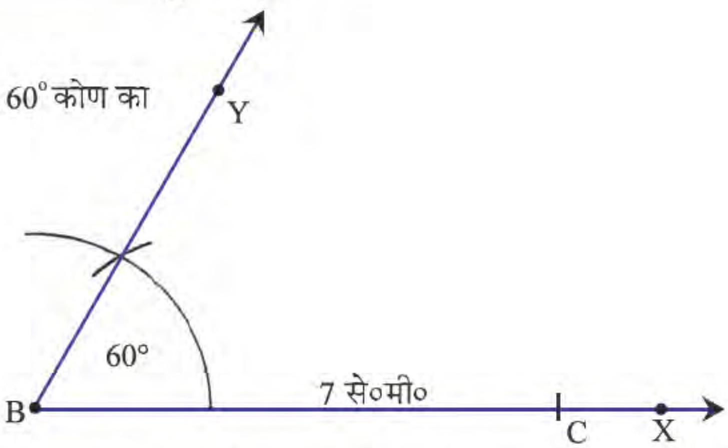


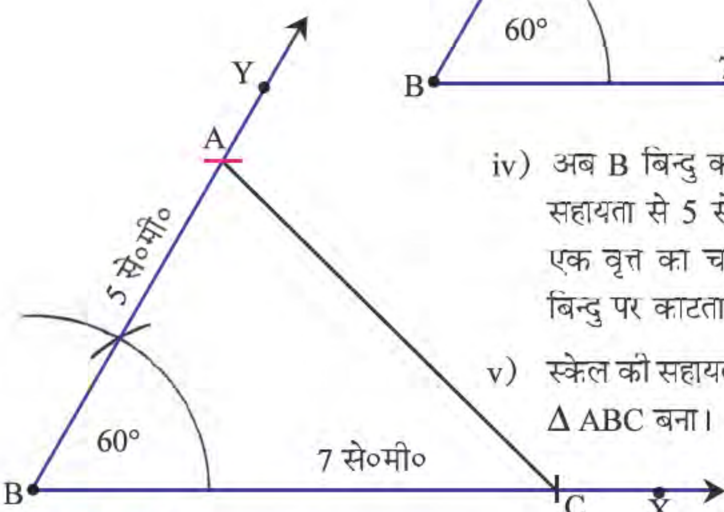
i) सबसे पहले स्केल की सहायता से 5 से०मी० और 6 से०मी० लम्बाई की दो सरल रेखा मापकर बनाओ।



ii) अब एक किरण BX लो। A बिन्दु को केन्द्र मानकर पेंसिल कम्पास की सहायता से 7 से०मी० लम्बाई का एक वृत्त का चाप बनाओ जो किरण BX को C बिन्दु पर काटती है।

iii) अब B बिन्दु को केन्द्र मानकर 60° कोण का माप लेकर एक ∠YBC बनाओ।





iv) अब B बिन्दु को केन्द्र मानकर पेंसिल कम्पास की सहायता से 5 से०मी० लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर एक वृत्त का चाप काटो जो BY किरण को जिस बिन्दु पर काटता है वह ☐ बिन्दु है।

v) स्केल की सहायता से A और C बिन्दुओं को जोड़कर Δ ABC बना।

रेशमी DEF एक त्रिभुज बनाई जिसकी भुजा DE = 5 से०मी०, EF = 7 से०मी० और $\angle DEF = 60^{\circ}$

मैं अपने बनाये त्रिभुज ABC को काटकर रेशमी द्वारा बनाये गए त्रिभुज DEF के ऊपर रखकर देखती हूँ कि दोनों त्रिभुज एक दूसरे के साथ सम्पूर्ण से मिल जाते है।

अर्थात् एक त्रिभुज की दो भुजायें तथा उसके अन्तर्गत कोण दूसरे एक त्रिभुज के समान दो भुजाओ एवं कोण का मान बराबर होने पर एक त्रिभुज दूसरे से सम्पूर्ण रूप से मिल जाता है।

अर्थात् त्रिभुज की दो भुजायें तथा उसपर स्थित कोण निर्दिष्ट हो तो त्रिभुज निर्दिष्ट होता है।

बनाकर देखें — 8.2

1. ABC एक त्रिभुज बनाओ जिसकी भुजा AB = 4 से०मी० BC = 6 से०मी० एवं $\angle ABC = 45^{0}$ है।

2. दो त्रिभुज की समान भुजाओ की लम्बाई और तथा उसके अंतर्गत स्थित कोण समान हो तो दोनों त्रिभुज एक दूसरे से सम्पूर्ण रूप से मिल जायेंगे। दो त्रिभुज बनाओ। अब दोनों त्रिभुज को काटकर तथा मिलाकर जांच करो।

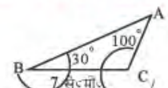
3. PQR एक त्रिभुज बनाओ जिसकी भुजा PQ = 4 से०मी०, QR = 3 से०मी० एवं $\angle PQR = 90^{0}$। PQR त्रिभुज के PR भुजा की लम्बाई स्केल की सहायता से मापकर देखो।

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाओ। जिसकी समान दो भुजाओ की लम्बाई 7.2 से०मी० एवं समान भुजाओ के अंतर्गत बने कोण 100° हो।

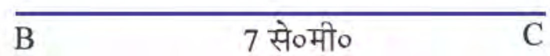
अब त्रिभुज की एक भुजा की लम्बाई तथा उस भुजा के संलग्न कोण दिया गया हो, तो त्रिभुज कैसे बनेगा ? देखें।

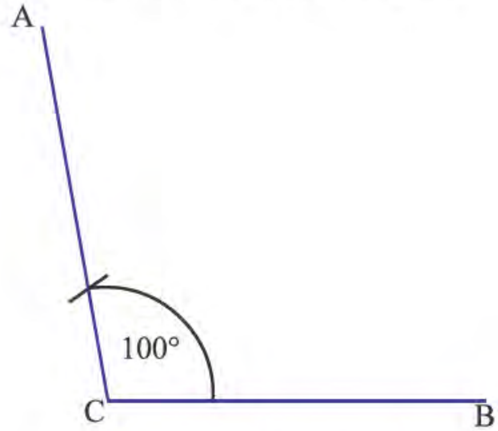
4 ABC एक त्रिभुज बनाओ जिसकी भुजा BC = 7 से०मी०, ∠ABC = 30° एवं ∠ACB = 100° हो।

सबसे पहले स्केल और पेंसिल की सहायता से छोटा एक त्रिभुज बनाये।

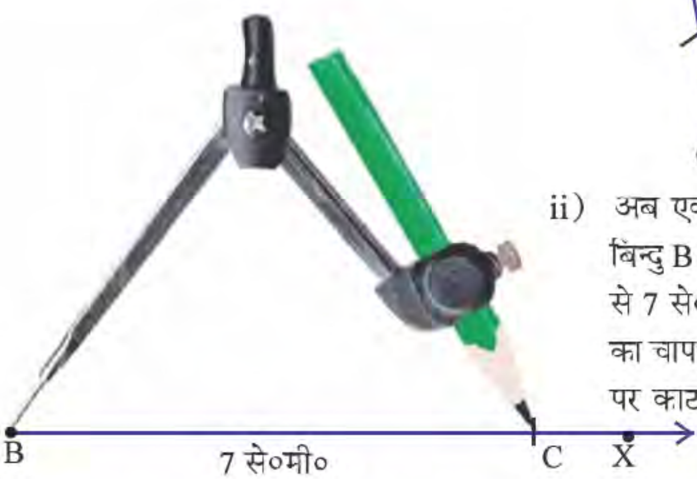


i) सबसे पहले स्केल की सहायता से 7 से०मी० लम्बाई की सरल रेखा पर चांद की सहायता से 100° माप का कोण बनाओं।

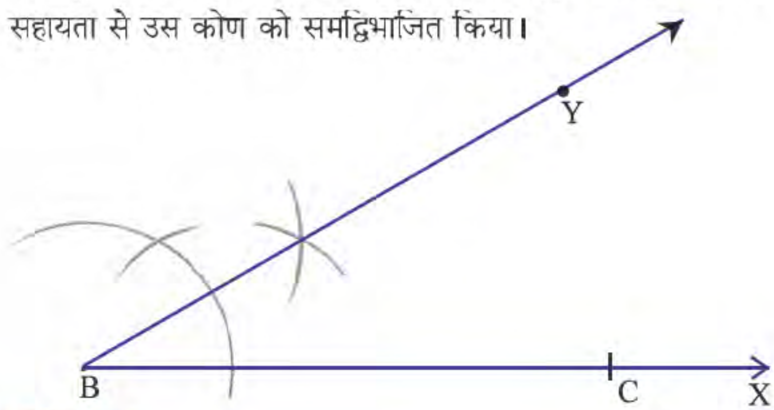




ii) अब एक किरण BX लिया। BX किरण के बिन्दु B को केन्द्र मानकर कम्पास की सहायता से 7 से०मी० लम्बा एक अर्द्धव्यास लेकर वृत्त का चाप बनाओ जो BX किरण को ☐ बिन्दु पर काटता है।



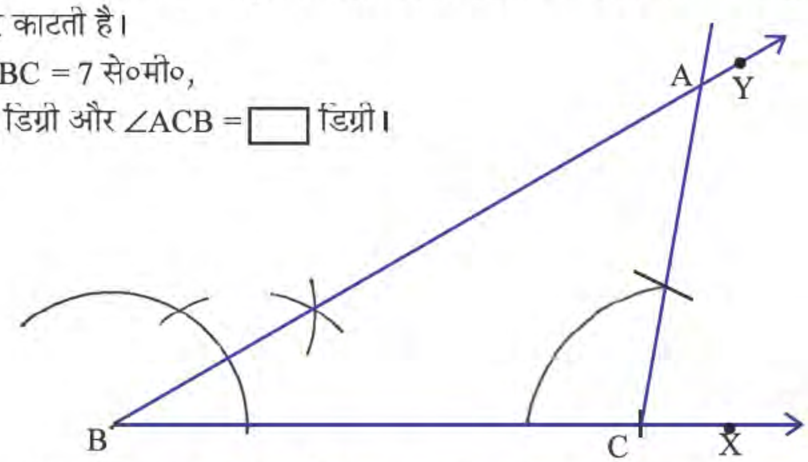
iii) अब पैंसिल और कम्पास की सहायता से B बिन्दु को केन्द्र मानकर 30° कोण के बराबर ∠YBC बनाया, पहले कम्पास-पैंसिल की सहायता से 60° का कोण बनाया। फिर पैंसिल कम्पास की सहायता से उस कोण को समद्विभाजित किया।



iv) पेंसिल और कम्पास की सहायता से C बिन्दु को केन्द्र मानकर 100° का कोण बनाओं जो BY किरण के A बिन्दु पर काटती है।

$\therefore \Delta$ ABC की भुजा BC = 7 से०मी०,

एवं $\angle ABC$ = ☐ डिग्री और $\angle ACB$ = ☐ डिग्री।



सोहाना PQR एक त्रिभुज बनाई जिसकी भुजा QR = 7 से०मी०, $\angle PQR = 30°$ और $\angle PRQ = 100°$

मैं अपने बनाये ABC त्रिभुज को काटकर सोहाना के त्रिभुज PQR के ऊपर रखा तो पाया कि दोनों त्रिभुज का सम्पूर्ण भाग मिल जाता है।

अतः पाया कि दो त्रिभुज की एक भुजा और उस भुजा पर स्थित दोनों कोण एक दूसरे त्रिभुज के अनुरूप भुजा एवं उस पर स्थित कोण समान होने पर एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज के साथ पूर्ण रूप से मिल जाता है अर्थात् त्रिभुज की एक भुजा और उस पर स्थित कोण निर्दिष्ट हो तो निर्दिष्ट त्रिभुज मिलेगा।

बनाकर देखें — 8.3

1. एक त्रिभुज की एक भुजा और उस भुजा पर संलग्न दोनो कोण एक दूसरे त्रिभुज के अनुरूप भुजा पर संलग्न कोण एक समान हो तो एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज के साथ सम्पूर्ण रूप से मिल जायेगा। दो त्रिभुज बनाओ। उसके बाद दोनों त्रिभुज को काटकर एक दूसरे से मिलाकर देखो और परखो।

2. XYZ एक त्रिभुज बनाओ जिसकी भुजा YZ = 6.5 से०मी० और $\angle XYZ = 60°$ तथा $\angle XZY = 70°$ है।

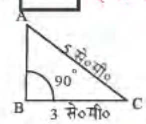
3. ABC एक त्रिभुज बनाओ जिसकी भुजा BC = 5.5 से०मी०, $\angle ABC = 60°$ और $\angle ACB = 30°$ है।

4. PQR एक त्रिभुज बनाओ जिसका भुजा QR = 7.2 से०मी०, $\angle PQR = 80°$ तथा $\angle PRQ = 115°$ है। त्रिभुज बनने का कारण बताओं।

5. DEF एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी EF भुजा की लम्बाई 6.2 से०मी० एवं उस पर संलग्न दोनों कोणों का योगफल 100° हैं।

5 मैं एक समकोण त्रिभुज बनाने की कोशिश करुँगा। जिसकी एक भुजा और कर्ण की लम्बाई मालूम है। एक समकोण त्रिभुज का एक कोण अवश्य ☐ (समकोण / अधिक कोण) होगा।

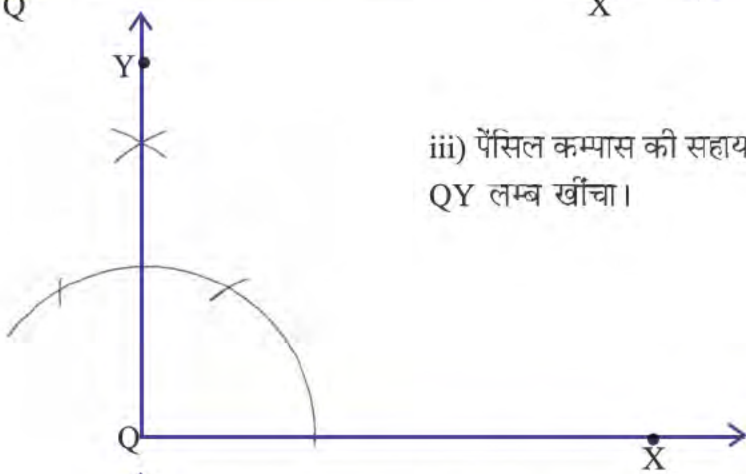
सर्वप्रथम स्केल और पेंसिल से छोटा त्रिभुज बनाये।



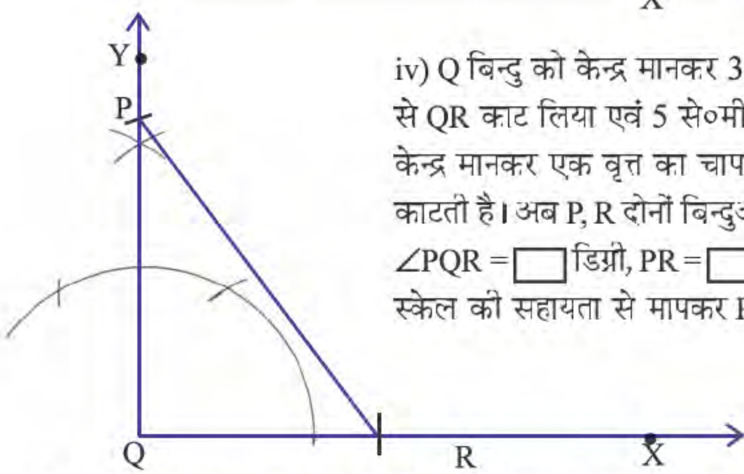
i) पहले स्केल और पेंसिल की सहायता से 3 से०मी० और 5 से०मी० लम्बी सरल रेखा खींचा।

3 से०मी०. ______ 5 से०मी०. ______

ii) स्केल और पेंसिल की सहायता से QX एक किरण बनाया।



iii) पेंसिल कम्पास की सहायता से QX किरण के Q बिन्दु पर QY लम्ब खींचा।



iv) Q बिन्दु को केन्द्र मानकर 3 से०मी० लम्बाई के बराबर QX से QR काट लिया एवं 5 से०मी० लम्बाई के बराबर R बिन्दु को केन्द्र मानकर एक वृत्त का चाप खींचा जो QY को P बिन्दु पर काटती है। अब P, R दोनों बिन्दुओं को जोड़कर △PQR बनाया। ∠PQR = ☐ डिग्री, PR = ☐ से०मी०, QR = ☐ ,से०मी०। स्केल की सहायता से मापकर PQ = ☐ से०मी० पाया।

तितली ABC एक समकोण त्रिभुज बनाई जिसका ∠ACB =1 समकोण, BC = 3 से०मी०, AB = 5 से०मी०।

मैं तितली के बनाये △ABC को काटकर अपने द्वारा बनाये समकोण त्रिभुज PQR के ऊपर रखा तो देखता हूँ कि दोनों समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा बराबर है अत: दोनों त्रिभुज एक दूसरे के साथ सम्पूर्ण रूप से बराबर है।

लेकिन मैंने जो समकोण त्रिभुज PQR बनाया है उसका कर्ण PR = 5 से०मी०, QR = 3 से०मी० एवं PQ = 4 से०मी० है।

लेकिन समकोण त्रिभुज का कर्ण, आधार और लम्ब के बीच क्या कोई सम्पर्क है।

यहाँ कर्ण की लम्बाई = 5 से०मी०, आधार = 3 से०मी० एवं लम्ब = 4 से०मी० है।

देखते हैं $5^2 = 3^2 + 4^2$ अर्थात् कर्ण ^{2} = आधार ^{2} + लम्ब ^{2}

बनाकर देखें — 8.4

1. PQR एक समकोण त्रिभुज बनायें जिसका $\angle PQR = 90^\circ$, PQ = 6 से०मी० और QR = 4 से०मी० है।
2. ABC एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनाये जिसका $\angle ABC = 90^\circ$, AB = 7 से०मी० है।
3. XYZ एक समकोण त्रिभुज बनाये जिसका $\angle XYZ = 90^\circ$, XZ = 10 से०मी० एवं YX = 6 से०मी० है।
4. ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका $\angle BAC = 90^\circ$, BC = 8 से०मी० एवं $\angle ACB = 45^\circ$ है।
   संकेत —
   i) स्केल और पेंसिल से एक CX किरण लिया।
   ii) C बिन्दु को केन्द्र मानकर पेंसिल कम्पास की सहायता से CX के ऊपर $\angle XCD = 90^\circ$ कोण बनाया।
   iii) पेंसिल कम्पास की सहायता से $\angle XCD$ को समद्विभाजित किया। एक $\angle XCY$ मिला जिसका मान 45° (इस CY किरण के ऊपर ☐ बिन्दु है।
   iv) CY से 8 से०मी० लम्बाई के बराबर CB काट लिया। B बिन्दु से स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से CX के ऊपर एक लम्ब खींचा। यह लम्ब CX को ☐ बिन्दु पर काटती है। अत: प्रदत्त समकोण त्रिभुज का BC = 8 से०मी०, $\angle BAC = 90^0$ एवं $\angle ACB = 45^\circ$।

9. सर्वांगसमता की धारणा

हमलोग स्केल पेंसिल और कम्पास की सहायता से चित्र बनाते समय एक ही आकार के दो चित्र काटकर एक के साथ दूसरे को मिलाकर देखे। अब हमलोग कौन कौन शर्त से दो त्रिभुज एक दूसरे के साथ सम्पूर्ण मिल मिल गया हैं देखें।

i) एक त्रिभुज के तीन भुजाओं की लम्बाई के बराबर और अनुरूप दूसरे त्रिभुज के तीन भुजाओं की लम्बाई बराबर होने पर उनको हम भुजा-भुजा-भुजा या S-S-Sशर्त कहेंगे।

ii) एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाई और उसके अंनर्गत कोणों का परिमाप दूसरे एक त्रिभुज की अनुरूप दो भुजाओं की लम्बाई और उसके अर्न्तगत कोणो का परिमाप का बराबर हो तो उसे हम भुजा कोण भुजा या शर्त S-.A-S कहते हे।

iii) एक त्रिभुज की दो कोणों का परिमाप और दोनों कोण सलग्न अंर्तभुक्त भुजा की लम्बाई दूसरे एक त्रिभुज के अनुरूप भुजा और उससे सलग्न कोणो का परिमाप समान होने पर उसे कोण भुजा कोण या .A-S-A अथवा कोण कोण भुजा या A-.A-S शर्त कहेगें।

iv) एक समकोण त्रिभुज कोण की लम्बाई और एक भुजा की लम्बाई दूसरे एक समकोण त्रिभुज की कोण की लम्बाई और एक भुजा की लम्बाई समान होने पर उन हम समकोण कोण भुजा या R-H-S शर्त कहेगें।

लेकिन एक ज्यामितीय चित्र के साथ दूसरे एक ज्यामितीय चित्र सम्पूर्ण रूप से समान हो तो गणित भाषा मे कया कहेगें।

इस तरह दो ज्यामितीय चित्र से एक को हटा या घुमा या दो तरह से एक दुसरे के साथ सम्पूर्ण रूप से मिल जाने को सर्वांगसम कहा जाता हौ उस धर्म को सर्वांगसमता कहा जाता हे।

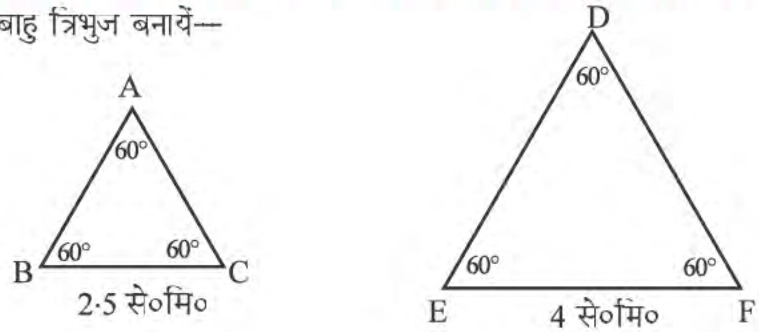
त्रिभुज के सर्वांगसम होने का शर्त है — (i) भुजा–भुजा–भुजा या S-S-S
(ii) भुजा–कोण–भुजा या S-A-S
(iii) कोण–भुजा–कोण या S-A-S या कोण कोण भुजा या A-A-S
(iv) समकोण–कोण– कोण–भुजा या R-H-S

तितली और राना दोनों ने फूल का चित्र बनाकर काट लिया। तितली का बनाया फूल का चित्र राना के बनाये फूल के चित्र के साथ पूर्ण रूप से मिल गया। उन दो चित्र मे क्या सम्पर्क है?

ये दोनों चित्र सर्वांगसम है।

लेकिन दो त्रिभुज के तीनों कोणों का परिमाप समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे या नहीं देंखे।

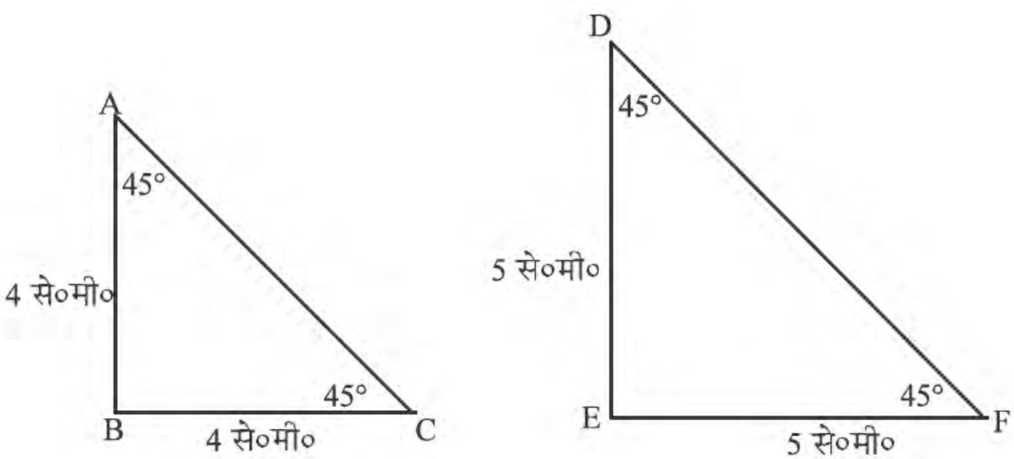
दो समबाहु त्रिभुज बनायें—



देखते है कि दोनों त्रिभुज के तीनों कोण समान है। लेकिन एक ज्यामितीय चित्र के ऊपर और एक ज्यामितीय चित्र बैठाया जाय तो सम्पूर्ण रूप से नहीं मिल रहा है अर्थात दोनो त्रिभुज सर्वांगसम नहीं है।

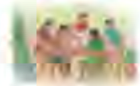
अत: दोनों त्रिभुज को क्या कहेंगे ? उस प्रकार के दोनों त्रिभुज को सदृशकोणी कहा जाता है।

अर्थात् एक त्रिभुज के तीनों कोणों का माप दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों का माप बराबर है। अर्थात दोनों त्रिभुज का कोण कोण कोण या (A-A-A) सर्वांगमता के शर्त नहीं है।

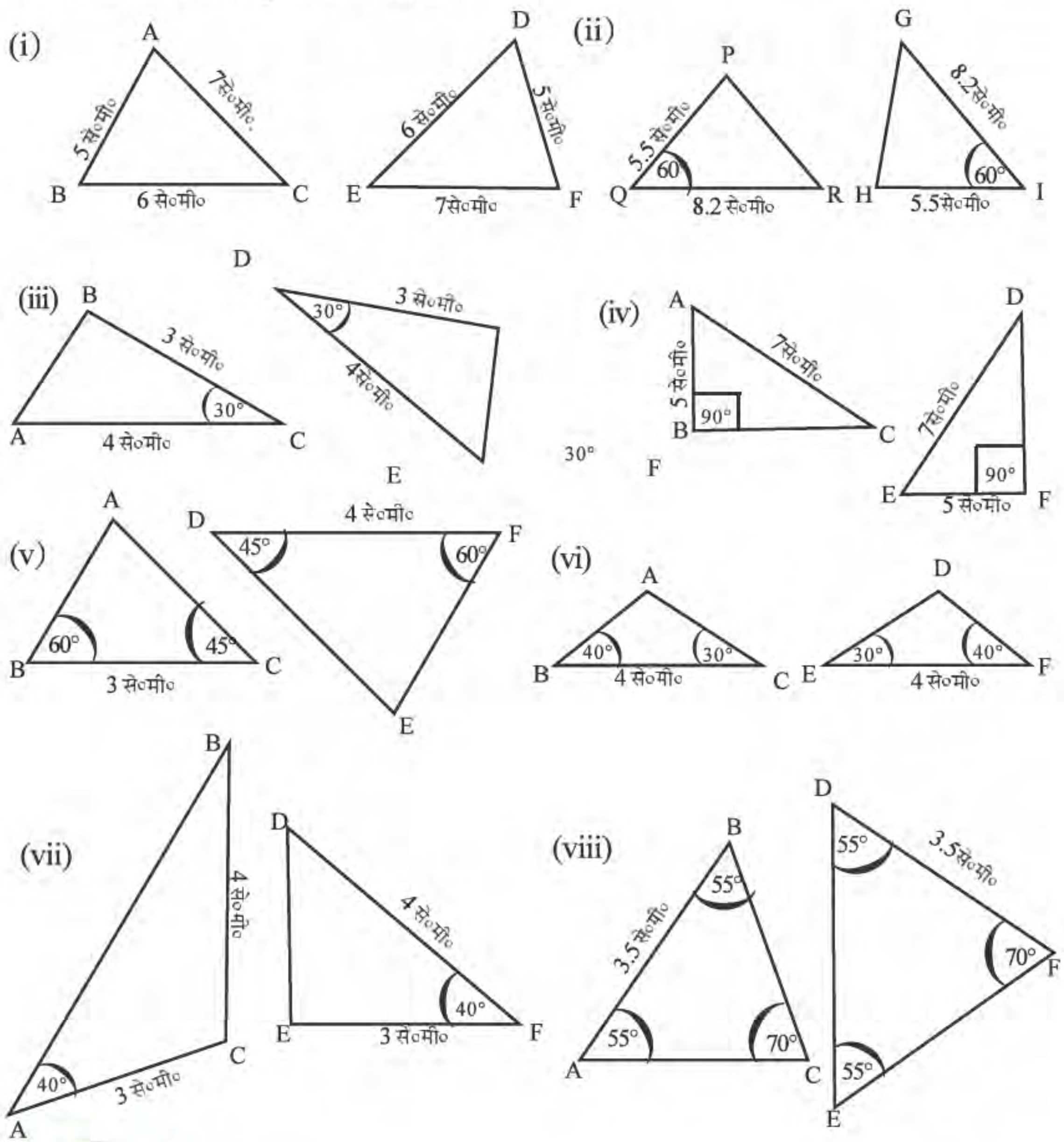


इस समकोण समद्धिबाहु त्रिभुज दोनों को अनुरूप कोण तीनों समान है। दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं है। लेकिन दोनो त्रिभुज [   ]। (स्वंय लिखे)

बनाकर देखें - 9



1. सर्वांगसमता से क्या समझते हो लिखो ?
2. त्रिभुज के सर्वांगसम के नियम को लिखो।
3. कोण–कोण–कोण सर्वांगसम एक शर्त हो सकता है क्या ? — चित्र बनाकर समझाओं।
4. नीचे दिए त्रिभुजों में से प्रत्येक कौन से दो कोण समान और कौन से दो कोण समान नहीं है। उसे सर्वांगसमता के शर्त से युक्ति देकर लिखो।



10. आसन्न मान

इस वर्ष में खुदीराम मेमोरियल स्कूल में भर्ती हुआ तमाल, तितली, फिरोज, अनवरा सब मिलकर खेल खेलें।

आज हमने तय किया है कि हमलोग अपने उम्र और लम्बाई बतायेगें और तमाल उसे ब्लैक बोर्ड पर लिखेगा।

मेरी उम्र 12 वर्ष 3 माह 8 दिन एवं लम्बाई 150.8 सें०मी०। लेकिन तमाल उसकी उम्र 12 वर्ष और लम्बाई 151 से०मी० लिखा। ऐसा वह लिखा क्यों?

तमाल उसकी उम्र और लम्बाई का जो मान लिखा वह सठिक मान का आसन्न मान है। यह मान हमें अनेक महत्त्वपूर्ण सिद्धान्त लेने में सहायता करता है। इस बार तमाल ने दो दल बनाया। एक दल में जिसका उम्र 12 वर्ष से अधिक एवं दूसरा दल जिसमें प्रत्येक की उम्र 12 वर्ष से कम है।

तमाल ने लिखा →

ऊँचाई	लिखा
150.3 सें०मी०	150 सें०मी०
152.7 सें०मी०	153 सें०मी०
159.5 सें०मी०	160 सें०मी०
161.4 सें०मी०	161 सें०मी०

समझ गया— 150, 153, 160, 161 है 150.3, 152.7, 159.5 और 161.4 - का आसन्न मान

लेकिन उस आसन्न मान को लिखने का कोई नियम है? वह नियम क्या है?

150.3, 152.7 ये प्रकृत मान या वास्तविक मान से कुछ कम अथवा अधिक है।

150.3 का आसन्न मान 150 लेने पर 150.3 −150 = 0.3 कम होता है। लेकिन 150.3 का आसन मान 151 लेने पर 151 − 150.3 = 0.7 अधिक लेते है। अर्थात् उस अवस्था में प्रकृत (वास्तविक) मान से आसन्न मान का अन्तर बढ़ जायेगा। अत: 150.3 का आसन्न मान 150 लेने पर गणितीय चिन्ह में प्रकाशित पाते है 150.3 ≈ 150। इस ≈ गणितीय चिन्ह का अर्थ प्राय: बराबर होता है।

1 152.7 सें०मी० का आसन्न मान 253 सें०मी० कैसे देखे।

152.7- के आगे पूर्ण संख्या 152 एवं बाद की संख्या 153 है?

$153 - 152.7 = \square$ लेकिन $152.7 - 152 = \square$

153 प्रकृत मान (वास्तविक मान) के नजदीक है अत: 152.7 $\square$ 153 [स्वयं आसन्न मान का गणितीय चिन्ह बैठाये।]

2 लेकिन 159.5 के पहले की संख्या और बाद की संख्या $\square$ और $\square$

$160 - 159.5 = \square$ और $159.5 - 159 =$

अत: देखते है कि दोनों में अन्तर समान है। इस अवस्था में $159.5 \approx 160$ होगा। अर्थात् बाद की पूर्ण संख्या ही आसन्न मान होगा

3 लेकिन 159.5 का एक दशमलव स्थान तक का आसन्न मान क्या होगा?

$159.25 \approx 159.3$ [क्योंकि शतांश में 5 है]

4 159.251के दो दशमलव स्थान तक का आसन मान क्या होगा?

$159.251 \approx 159.25$ [क्योंकि सहस्रांश में 1 है]

5 यदि 17 मीटर लम्बे फीता को 14 समान टुकड़े करने की कोशिश करें। लेकिन प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई कितनी होगी देखें।

प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई $\frac{17}{14}$ मी० = 1.214285712712.........मीटर।

=1.214285712712.........आसन्न मान लिखे।

1.214285712712......... का पांच दशमलव स्थान तक आसन्न मान = 1.21429 = $\square$

[क्योंकि दशमलव के बाद पांचवे स्थान पर 8 और छठवें स्थान पर 7 है अत: (8+1)=9 हुआ]

6 अब 1.2142871 का चार दशमलव स्थान तक का आसन्न मान लिखो।

$1.2142871 \approx 1.2143$ $\square$ [∵ दशमलव के बाद पाँचवे स्थान पर 8 है अतः चतुर्थ स्थान पर 2+1=3 हुआ]

1.2142871 का चार दशमलव स्थान तक का आसन्न मान लिखो।

$1.2142871 \approx$ $\square$ [स्वयं लिखो]

∴ फीता के प्रत्येक खण्ड की लम्बाई प्राय : 1.21 मीटर (दो दशमलव स्थान तक)

7 मैं $\frac{12}{13}$ के दो, तीन, चार और पांच दशमलव स्थान तक का आसन्न मान लिखूंगा।

$\frac{12}{13} = 0.9230769...$ $\approx$ $\square$ [दो दशमलव स्थान तक]

$\approx$ $\square$ [तीन दशमलव स्थान तक]

$\approx$ $\square$ [चार दशमलव स्थान तक]

$\approx$ $\square$ [पांच दशमलव स्थान तक]

स्वयं लिखो — 10.1

1) नीचे के भिन्नों को दो, तीन और चार दशमलव स्थान तक का आसन्न मान लिखे।

(i) $\frac{13}{17}$ (ii) $\frac{19}{29}$

8 कॉलेज घाट रोड स्थित विवेकानंद उच्च माध्यमिक विद्यालय के भवन का मरम्मत करने के लिए विभिन्न संस्थाओं से चंदा लिया गया। कुल 2486519 रुपऐ चंदा मिला तो कितने लाख चंदा मिला।

प्राय: 25 लाख रुपऐ चंदा मिला।

कारण 2486519 $\approx$ 25,00,000 (लाख के स्थान तक)

2486519 $\approx$ 2490000 (दश हजार के स्थान तक)

2486519 $\approx$ $\square$ (हजार के स्थान तक)

2486519 $\approx$ 2486500 (सैकड़ा के स्थान तक)

2486519 $\approx$ $\square$ (दहाई के स्थान तक)

स्वयं करें—10.2 नीचे की संख्याओं को दहाई, सैकड़ा, हजार दस हजार स्थान तक आसन्न मान लिखो—

मूल संख्या	दहाई स्थान तक	सैकड़ा स्थान तक	हजार स्थान तक	दस हजार स्थान तक
452167				
784062				

बनाकर देखे - 10

1. 3 रुपये 7 लड़के लड़कियों के बीच समान रुप से बाँटना है। हिसाब करके देखे कि प्रत्येक ने कितना पैसा पाया (दो दशमलव स्थान तक आसन्न मान)।
   अब 7 लोगो के कुल रुपये का हिसाब करके देखे की कुल 3 रुपये से कितना कम या अधिक होता है।
2. मैंने 22 रुपये 8 लड़के और 7 लड़कियों में समान रुप से बाँटकर देने की कोशिश किया गया। हिसाब करके देखे प्रत्येक को प्राय: कितना पैसे मिलेगा (दो दशमलव स्थान तक आसन्न मान)।

   और हिसाब करके देखे की 8 लड़को ने कुल कितने रुपये पाये और 7 लड़कियों ने कुल कितने रुपये पाया। 8 लड़के और 7 लड़कियों ने मिलकर कुल कितने रुपये पाये। हिसाब करे और देखे कि कुल रुपये 22 से अधिक या कम हुआ।
3. प्रकाश 1 सेकेण्ड में 186000 मील जाती है। 1 मिल = 1.6093 कि०मी०। प्रकाश 1 सेकेण्ड में जितना दूर जाता है उसे कि०मी० के आसन्न मान में लिखो (दो दशमलव आसन्न तक आसन्न मान)।
4. 0.997 का दो दशमलव स्थान तक आसन्न मान लिखे।

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति करो —

संख्या	संख्या के दशमलव के पहले की पूर्ण संख्या	संख्या के दशमलव के पहले की पूर्ण आसन्न मान	संख्या के एक दशमलव स्थान तक प्रकृत मान	संख्या के एक दशमलव स्थान तक आसन्न मान	संख्या के दो दशमलव स्थान तक प्रकृत मान	संख्या के दो दशमलव स्थान तक आसन्न मान	संख्या के तीन दशमलव स्थान तक प्रकृत मान	संख्या के तीन दशमलव स्थान तक आसन्न मान
54·7049	54	55	54.7	54.7	54.70	54.70	54.704	54.705
35·6268								
2·00065								
0·06251								
0·00626								

6. नीचे के भिन्नों को दो, तीन और चार दशमलव स्थान तक का आसन्न मान लिखो—

(i) $\frac{22}{7}$ (ii) $\frac{3}{14}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{47}{57}$

7. नीचे के भिन्नों को लाख, हजार और शतक के आसन मान लिखो—

मूल संख्या	लाख में आसन्न मान	हजार	शतक में आसन्न मान
2678945			
3124487			
1356921			

8. आसन्न मान का व्यवहारिक प्रयोग —

i) 11बजकर 9 मिनट 40 सैकेण्ड का आसन्न मान कितना (मिनट में) ?

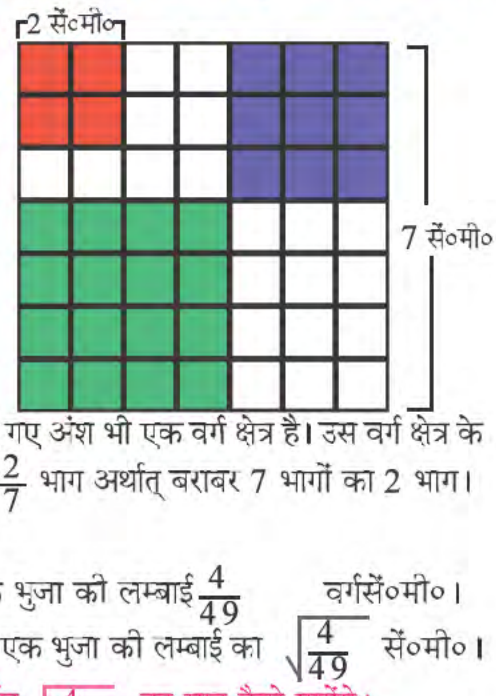
ii) जूता का मूल्य 99.99 रुपये लिखे रहने पर आसन्न मान में जूता का मूल्य कितना होगा ?

iii) एक रेखा की लम्बाई 1.59 सें0मी0 होने पर आसन्न मान में रेखा की लम्बाई कितना होगा ?

iv) मोदीखाना दुकान में पोस्ता खरीदते समय वजन मापने वाली मशीन में 102 ग्राम देखा गया ? दुकानदार आसन्न मान में कितना ग्राम पोस्ता का दाम लेगा देखें।

11. भिन्नों का वर्गमूल

हमलोगों ने विभिन्न रंग के रंगीन कार्ड तैयार किया है। हमलोगों में कई लोग अच्छा चित्र बनाते है। इनलोगों ने इन कार्डों पर कई चित्र बनाये है। हम लोगों में से कुछ अच्छा अंकन नहीं कर पाते है लेकिन कागज काटकर विभिन्न प्रकार का नक्शा बना सकते है। अतः हमलोगों ने तय किया है कि समान माप के अनेकों रंग के वर्गाकार कागज काटेंगे। हमने विभिन्न माप के बड़े वर्गाकार कागज से छोटा-छोटा वर्ग बना लिए जिसके भुजाओ की लम्बाई। 1सें०मी० तथा रंग दिए।



रेहाना ने किया →

देखते हैं कि रेहाना अपने वर्गाकार कागज के 49 समान छोटे-छोटे वर्ग में भाग करके कुछ घर को लाल रंग, कुछ घरों को नीला रंग व कुछ घरों को हरे रंग से रंग दिया है। रेहाना के वर्गाकार कागज का क्षेत्रफल 49 वर्गसें०मी०।

लाल रंग किया → $\frac{\boxed{4}}{\boxed{49}}$ भाग में।

अर्थात् 49 समान भाग का 4 भाग। फिर लाल रंग किए गए अंश भी एक वर्ग क्षेत्र है। उस वर्ग क्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई बड़े वर्गाकार क्षेत्र के भुजा की लम्बाई $\frac{2}{7}$ भाग अर्थात् बराबर 7 भागों का 2 भाग।

वर्गाकार लाल घरों का अंश $\rightarrow \frac{4}{49}$

लाल वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल बड़े वर्गाकार क्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई $\frac{4}{49}$ वर्गसें०मी०।

लाल वर्ग क्षेत्र का एक भुजा की लम्बाई बड़े वर्ग क्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई का $\sqrt{\frac{4}{49}}$ सें०मी०।

1 लेकिन भिन्न का वर्गमूल कैसे पायेगें अर्थात $\sqrt{\frac{4}{49}}$ -का मान कैसे पायेंगे।

$$\sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{2\times 2}}{\sqrt{7\times 7}} = \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{7^2}} = \frac{2}{7}$$

अर्थात भिन्न का वर्गमूल बनाने के लिए अलग से अंश और हर का वर्गमूल निकाला गया।

$\therefore$ लाल वर्गक्षेत्र के 1भुजा की लम्बाई बड़े वर्गक्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई $\frac{2}{7}$

फिर, $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{2^2}{7^2} = \frac{4}{49}$

कागज के नीले वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल बड़े वर्ग क्षेत्र के क्षेत्रफल = $\frac{\square}{\square}$ भाग।

नीले वर्गक्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई बड़े वर्गक्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई = $\sqrt{\frac{9}{49}}$ भाग = $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}}$ भाग = $\frac{\square}{\square}$ भाग

फिर, $(\frac{3}{7})^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$

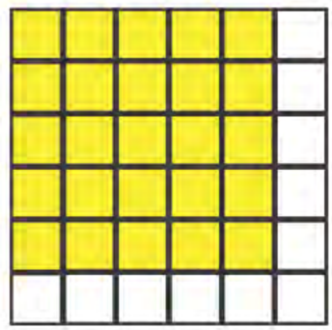
उसी प्रकार रेहाना के वर्गाकार कागज के हरे वर्ग क्षेत्र के एक भुजा का क्षेत्रफल का $\frac{\square}{\square}$ भाग।

$\therefore$ हरे वर्ग क्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई बड़े वर्ग क्षेत्र की एक भुजा की लम्बाई = $\sqrt{\frac{\square}{\square}}$ भाग = $\frac{\square}{\square}$ भाग।

फिर, $(\frac{4}{7})^2 = \frac{\square^2}{\square^2} = \frac{\square}{\square}$

रेहाना ने लाल, नीला और हरा घर को काट लिया।

पीयुष ने किया →



पीयुष के हरे रंग के वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल बड़े वर्ग क्षेत्र के क्षेत्रफल का $\frac{\square}{\square}$ भाग।

पीले रंग के वर्गाकार क्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई बड़े वर्ग क्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई $\sqrt{\frac{\square}{\square}}$ = भाग = $\frac{\square}{\square}$ भाग।

अब वर्गाकार घर न बनाकर वर्गक्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई निकालो।

2 $\frac{32}{50}$ वर्ग से०मी०, क्षेत्रफल वाले एक वर्गाकार भुजा की लम्बाई क्या होगी देखे।

1 भुजा की लम्बाई = $\sqrt{\frac{32}{50}}$ से०मी० $\sqrt{\frac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times 5 \times 5}}$ से०मी० = $\frac{\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2}}{\sqrt{5 \times 5}}$ से०मी०

= $\frac{\sqrt{2^2 \times 2^2}}{\sqrt{5^2}}$ से०मी० = $\frac{2 \times 2}{5}$ से०मी० $\frac{4}{5}$ से०मी०

3 $\frac{121}{144}$ से०मी० क्षेत्रफल वाले वर्गक्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई क्या होगी देखे।

= $\sqrt{\frac{121}{144}}$ से०मी० = $\sqrt{\frac{11 \times 11}{2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3}}$ से०मी० = $\sqrt{\frac{11^2}{12^2}}$ से०मी० = $\frac{11}{12}$ से०मी०

स्वयं करें —11.1

1) नीचे के भिन्नों का वर्ग निकालो–

(i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{8}{10}$ (iv) $\frac{11}{12}$

2) नीचे के भिन्नो का वर्गमूल निकालो:

(i) $\frac{16}{25}$ (ii) $\frac{9}{64}$ (iii) $\frac{36}{121}$, (iv) $\frac{144}{169}$ (v) $\frac{225}{289}$

4 यदि $\frac{9}{32}$ -का वर्गमूल निकालना चाहते है तो कैसे करेगे

$$\sqrt{\frac{9}{32}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{3 \times 3}}{\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2}}$$

32 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। क्योंकि 32 का मौलिक उत्पादक विश्लेषण करने पर पाते है

$32 = 2^2 \times 2^2 \times 2$। इस प्रकार के भिन्न को क्या कहेंगे।

$\frac{9}{36}$, $\frac{4}{49}$ भिन्नों के अंश और हर पूर्ण वर्ग धनात्मक पूर्ण संख्या है।

जैसे, $\frac{9}{36} = \frac{3^2}{6^2}$, $\frac{4}{49} = \frac{2^2}{7^2}$; अत: ये पूर्णवर्ग भिन्न है। लेकिन $\frac{9}{32} = \frac{3^2}{2^2 \times 2^2 \times 2}$ उस प्रकार के भिन्न पूर्ण वर्ग भिन्न नहीं है। अर्थात् $\frac{9}{32}$ पूर्णवर्ग नही है।

5 $\frac{9}{32}$ को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए किस छोटी से छोटी धनात्मक पूर्ण संख्या से गुणा या भाग करेगे।

32-का मौलिक उत्पादक दो चार पूर्ण वर्ग संख्या एवं एक उत्पादक है। जो पूर्ण वर्ग नहीं है।

अत: $\frac{9}{32}$ को 2 से गुणा करने से $\frac{9}{\cancel{32}\ 16}$ — $\frac{9}{16} = \frac{3^2}{4^2}$ ∴ $\frac{9}{16}$ एक पूर्णवर्ग भिन्न है।

∴ $\frac{9}{32}$ -को सबसे छोटे धनात्मक पुर्ण संख्या ☐ से गुणा करने पर पूर्ण वर्ग भिन्न मिलेगा।

6 मैं यदि $\frac{9}{32}$ को 2 से भाग दूंगा तो क्या मिलेगा देखे।

$$\frac{9}{32} \div 2 = \frac{9}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{64} = \frac{3 \times 3}{2\times2\times2\times2\times2\times2} = \frac{3^2}{8^2}$$

∴ $\frac{9}{64}$ एक पूर्ण वर्ग भिन्न है

∴ $\frac{9}{32}$ -को सबसे छोटी धनात्मक पूर्ण संख्या से भाग देने पर पूर्ण वर्ग भिन्न पायेगे।

7 $\frac{36}{243}$ पूर्ण भिन्न है या नहीं देखे एवं किस प्रकार पूर्ण भिन्न पायेगे हिसाब करके देखे।

$$\frac{36}{243} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{3\times3\times3\times3\times3} = \frac{2^2 \times 3^2}{3^2 \times 3^2 \times 3}$$

$\frac{36}{243}$ -के हर के मौलिक उत्पादक विश्लेषण में दो पूर्ण वर्ग संख्या 3^2 एंव एक उत्पादक 3 है या पूर्ण वर्ग नही है।।

अत: $\frac{36}{243}$ पूर्ण वर्ग भिन्न नहीं है।।

∴ $\frac{36}{243}$ -को पूर्ण वर्ग भिन्न बनाने में धनात्मक पूर्ण संख्या ☐ गुणा करना होगा।

फिर $\frac{36}{243}$ को पूर्ण वर्ग भिन्न बनाने के लिए सबसे छोटी धनात्मक पूर्ण संख्या ☐ से भाग देना होगा।

स्वयं करें —11.2

1) किस क्षुद्रतम धनात्मक पूर्ण संख्या से गुना करने पर नीचे के भिन्नों का पूर्ण भिन्न होगा। निर्णय करें –

(i) $\frac{64}{147}$ (ii) $\frac{25}{162}$ (iii) $\frac{100}{128}$ (iv) $\frac{81}{288}$

2) किस सबसे छोटी धनात्मक पूर्ण संख्या से भाग देने पर नीचे के भिन्न पूर्ण वर्ग भिन्न होगे। निर्णय करें –

(i) $\frac{450}{625}$ (ii) $\frac{320}{121}$ (iii) $\frac{245}{64}$ (iv) $\frac{243}{144}$

यदि भिन्न के अंश और हर का वर्गमूल भाग की क्रिया द्वारा निकाले। तब क्या सुविधा होती है देखें

8 $\frac{1764}{5625}$ का वर्गमूल अर्थात् $\sqrt{\frac{1764}{5625}}$ का भाग द्वारा निकालें।

```
        4 2
   4 | 17 64
     |-16
  82 |   1 64
     | - 1 64
     |      0
```
$\therefore \sqrt{1764} = 42$

एंव

```
        7 5
   7 | 56 25
     |-49
 145 |   7 25
     | - 7 25
     |      0
```
$\therefore \sqrt{5625} = 75$

हम पाये, $\sqrt{\frac{1764}{5625}} = \frac{\sqrt{1764}}{\sqrt{5625}} = \frac{\sqrt{42^2}}{\sqrt{75^2}} = \frac{42}{75}$

देखते है कि भिन्न का अंश और हर बड़ी संख्या रहने पर भाग की प्रक्रिया द्वारा वर्गमूल निकालने में सुविधा होगी।

अब $\sqrt{\frac{4761}{5329}}$ का मान भाग प्रकिया द्वारा निकाले।

```
   6 | 47 61
     |-36
 129 |  11 61
     | -11 61
     |      0
```
$\therefore \sqrt{4761} = \square$

```
   7 | 53 29
     |-49
 143 |   4 29
     | - 4 29
     |      0
```
$\therefore \sqrt{5329} = \square$

$\therefore \sqrt{\frac{4761}{5329}} = \frac{\sqrt{4761}}{\sqrt{5329}} = \frac{\sqrt{69^2}}{\sqrt{73^2}} = \frac{\square}{\square}$

9 मैं $\frac{625}{144}$ -के वर्गमूल को किस संख्या से गुणा करुँगा।

कि 1 मिलेगा, हिसाब करके देखें।

$\frac{625}{144}$ -का वर्गमूल अर्थात $\sqrt{\frac{625}{144}} = \frac{\square}{\square}$

10 अब $\frac{25}{12}$ को कितना से गुणा करने पर 1 मिलेगा।

$1 \div \frac{25}{12} = 1 \times \frac{12}{25} = \frac{12}{25}$

$\therefore$ $\frac{25}{12}$ को $\frac{12}{25}$ से गुणा करने पर $\square$ मिलेगा।

11 लेकिन $\frac{625}{144}$ का वर्गमूल अर्थात् $\frac{25}{12}$ को कितने से गुणा करने पर 5 का वर्ग पायेगें।

5-का वर्ग = $\square$

$\therefore$ $\frac{25}{12}$ -को कितना से गुणा करने पर 25 पायेगे देखें।

$25 \div \frac{25}{12} = \cancel{25} \times \frac{12}{\cancel{25}} = 12$

अर्थात् $\frac{25}{12}$ -को 12 से गुणा करने पर 5 का वर्ग पायेगें।

बनाकर देखे — 11.1

1. एक वर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{1089}{625}$ वर्ग से०मी० है। वर्गक्षेत्र की एक भुजा की लम्बाई कितनी होगी। हिसाब करके देखे।

2. नीचे के भिन्नों का वर्गमूल निर्णय करें।

(i) $3\frac{22}{49}$ (ii) $\frac{375}{1215}$ (iii) $6\frac{433}{676}$ (iv) $1\frac{496}{729}$ (v) $\frac{324}{576}$

3. $\frac{121}{169}$ -के वर्गमूल को कितना से गुणा करने पर गुणनफल 1 होगा हिसाब करके देखें।

4. दो धनात्मक संख्याओं में से एक दूसरे के 2 गुणा है। दोनों संख्याओं का गुणनफल। $\frac{17}{32}$ हो तो कौन-कौन संख्याए होगी निर्णय करो।

5. हिसाब करके देखे कि किस भिन्न से उस भिन्न में गुणा करने पर गुणफल $6\frac{145}{256}$ होगा।

6. हिसाब करके देखें कि $\frac{49}{91}$ को किस भिन्न से गुणा करने पर गुणनफल का वर्गमूल 1 होगा।

7. हिसाब करके देखें कि $\frac{35}{42}$ को किस भिन्न से गुणा करने पर गुणनफल का वर्गमूल 1 होगा।

8. $\frac{9}{50}$ को किस सबसे छोटी पूर्ण संख्या से गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्णवर्ग संख्या होगी। निर्णय करें।

9. दो धनात्मक संख्याओं का गुणनफल $\frac{14}{15}$ एवं उनका भागफल $\frac{35}{24}$ हो, तो दोनों संख्याएँ कौन–कौन है निर्णय करें।

10. दो धनात्मक संख्याओं का गुणनफल $\frac{16}{50}$ हो उनका भागफल $\frac{1}{2}$ हो तो वे संख्याएँ कौन–कौन होगी निर्णय करें।

11. $\sqrt{\sqrt{\frac{9}{64}}+\sqrt{\frac{25}{64}}}$ - का मान कितना होगा बताओ।

12. $\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{9}}-\sqrt{\frac{1}{16}}-\sqrt{\frac{1}{25}}$ - का मान कितना होगा बताओ।

13. $\sqrt{\frac{1}{16}}, \sqrt{\frac{1}{25}}, \sqrt{\frac{1}{36}}, \sqrt{\frac{1}{49}}$ - को मान के अधोक्रम में सजाओ।

14. $(\sqrt{16}+\sqrt{36})$ -से $(\sqrt{25}+\sqrt{81})$ कितना अधिक है बताओ।

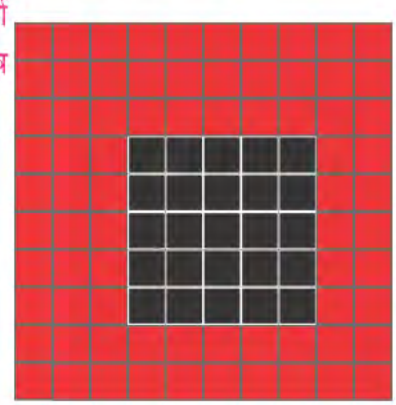
15. भिन्नों का वर्गमूल बनाओ — (i) $3\frac{22}{49}$ (ii) $7\frac{57}{256}$ (iii) $\frac{1089}{2025}$ (iv) $3\frac{814}{1225}$

दशमलव संख्याओं का वर्गमूल

हमारे मुहल्ले के क्लब घर के फर्श को छोटे-छोटे लाल और काले वर्गाकार टाइल्स से बनाया गया है। 100 टाइल्स को वर्गाकार रुप से सजाया गया है। जबकि फर्श के बीच में नीचे की तरह $0{\cdot}5 \times 0{\cdot}5 = 0{\cdot}25$ भाग में काला टाईल्स है।

$0{\cdot}5 \times 0{\cdot}5 = 0{\cdot}25$

$\therefore \quad (0{\cdot}5)^2 = 0{\cdot}25$



12 यदि $0{\cdot}12 \times 0{\cdot}12$ माप की हरी टाइल्स रहती तो फर्श के कितने भाग में हरे रंग का टाइल्स होती हिसाब करके देखे।

$0{\cdot}12 \times 0{\cdot}12 = 0{\cdot}0144$ भाग ।

$\therefore \quad (0{\cdot}12)^2 = 0{\cdot}0144$

फिर, $0{\cdot}15 \times 0{\cdot}15 = 0{\cdot}0225$

$\therefore \quad (0{\cdot}15)^2 = \square$

$\therefore$ 0·25, 0·0144, 0·0225 पूर्ण वर्ग दशमलव संख्या है

0·25 का वर्गमूल था $\sqrt{0{\cdot}25} = 0{\cdot}5$

0·0144 का वर्गमूल था $\sqrt{0{\cdot}0144} = 0{\cdot}12$

0·0225 का वर्गमूल था $\sqrt{0{\cdot}0225} = \square$

देखते है। पूर्ण वर्ग दशमलव संख्या दशमलव के बाद तीन अंक है।

पूर्णवर्ग दशमलव संख्या	पूर्णवर्ग दशमलव संख्या के बाद अंकों की संख्या	पूर्णवर्ग दशमलव संख्या के वर्गमूल के दशमलव बिन्दु के बाद की अंक संख्या
$0{\cdot}6 \times 0{\cdot}6 = \boxed{0{\cdot}36}$	2	1
$0{\cdot}9 \times 0{\cdot}9 =$	$\square$	$\square$
$0{\cdot}16 \times 0{\cdot}16 = \square$	4	2
$0{\cdot}27 \times 0{\cdot}27 = \square$		
$0{\cdot}115 \times 0{\cdot}115 = \square$	$\square$	$\square$

हम पाते है कि किसी भी दशमलव संख्या के दशमलव बिन्दु के बाद बेजोड़ संख्या में अंक रहने पर वह दशमलव संख्या कभी भी पूर्णवर्ग दशमलव संख्या नहीं होगी।

अब दशमलव पूर्णवर्ग संख्या का वर्गमूल निकालने की चेष्टा करें।

13 0·81-का वर्गमूल निकालो।

$\sqrt{0{\cdot}81}$-का दशमलव रहित अखण्ड संख्या 81

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^2 \times 3^2$

$\therefore \sqrt{81} = 3 \times 3 = 9$

क्योंकि पूर्ण वर्ग दशमलव संख्या 0·81 के दशमलव के पश्चात् [2] अंक है। अत: 0·81 के वर्गमूल में दशमलव के दाहिने तरफ [1] अंक रहेगा।

$\therefore \sqrt{0{\cdot}81} = 0{\cdot}9$

दूसरे तरीके से भिन्न में बदलकर

=$\sqrt{0.81}$ का मान निकालें

$$\sqrt{0{\cdot}81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3}}{\sqrt{2 \times 5 \times 2 \times 5}} = \frac{3 \times 3}{2 \times 5} = \frac{9}{10} = 0{\cdot}9$$

$\therefore$ 0·81 का वर्गमूल = 0·9

14 1·69 -का वर्गमूल निकालो।

1.69-का दशमलव रहित संख्या = [169]

$169 = 13 \times 13$

$\therefore \sqrt{169} = 13$

क्योंकि, पूर्ण वर्ग दशमलव संख्या 1.69-के दशमलव के पश्चात् [2] अंक है अत: 1.69 के वर्गमुल के दशमलव के दाहिने तरफ [1] अंक रहेगा।

$\therefore \sqrt{1.69} = 1{\cdot}3$

दूसरे तरीके से भिन्न में बदलकर $\sqrt{1{\cdot}69}$ का मान निकालेंगे

$$\sqrt{1{\cdot}69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{\sqrt{13 \times 13}}{\sqrt{2 \times 5 \times 2 \times 5}} = \frac{13}{2 \times 5} = \frac{13}{10} = 1{\cdot}3$$

$\therefore$ 1·69 का वर्गमूल = 1·3

15 0·1225-का वर्गमूल निकालें।

0·1225 का दशमलव के बिना संख्या = [ ]

$1225 = 5 \times 5 \times 7 \times 7 = 5^2 \times 7^2$

$\therefore \sqrt{1225} = 5 \times 7 = 35$

क्योंकि, पूर्ण वर्ग दशमलव संख्या 0·1225 का दशमलव के बाद [ ] अंक हैं अत: 0·1225 के वर्गमूल के दशमलव के दाहिने तरफ [ ] अंक रहेगा।

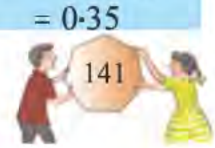
$\therefore \sqrt{0{\cdot}1225} = 0{\cdot}35$

दूसरे तरीके से भिन्न में बदलकर

$\sqrt{0{\cdot}1225}$ का मान निकालें

$$\sqrt{0{\cdot}1225} = \sqrt{\frac{1225}{10000}} = \sqrt{\frac{5 \times 5 \times 7 \times 7}{2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5}} = \sqrt{\frac{5^2 \times 7^2}{2^2 \times 2^2 \times 5^2 \times 5^2}} = \frac{5 \times 7}{2 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$= \frac{35}{100} = 0.35$ $\therefore$ 0·1225 का वर्गमूल = 0·35



स्वयं करें —11.3

1) नीचे की दशमलव संख्याओं के वर्ग का मान लिखो—

(i) 0.7 (ii) 0·16 (iii) 0·08 (iv) 0·25

2) दशमलव बिन्दु के बाद के अंकों की संख्या के विचार से नीचे की दशमलव संख्याओं में से कौन पूर्ण वर्ग दशमलव संख्या है देखें—

(i) 22.5 (ii) 1.44 (iii) 62.5 (iv) 12.1

3) नीचे के दशमलव संख्याओं के वर्गमूल का मान निर्णय करो।

(i) 4·41 (ii) 2·25 (iii) 0·0256 (iv) 0·0484

भाग पद्धति से धनात्मक अखण्ड संख्या का वर्गमूल किये। लेकिन भाग पद्धति से दशमलव संख्या का वर्गमूल निकाल सकते है या नहीं देखें।

16 0·0121 का वर्गमूल भाग की विधि द्वारा निकालकर देखो।

```
            ·1 1
     1  | ·0 1 2 1
        |  - 1
     21 |    2 1
        |  - 2 1
        |      0
```

∴ भाग पद्धलि से $\sqrt{.0121} = 0{\cdot}11$

वर्गमूल के लिए दशमलव के पश्चात् जोड़ा संख्या रखना होगा। अत: दशमलव के दाहिने से दो करके संख्याओं के माथे पर तीर चिन्ह दिया (जोड़ा नहीं होने पर '०' देकर जोड़ा बना लिया जाता है) तथा अखण्ड संख्या के क्षेत्र में जिस नियम से भाग विधि द्वारा वर्गमूल निर्णय किए है उसी तरह आगे बढ़ें।

$\sqrt{1{\cdot}21}$ 121 का मान भाग पद्धति से कैसे पाते हैं देखें—

अखण्ड संख्या को भाग पद्धति से वर्गमूल करते समय दाहिने तरफ से बायें की ओर दो संख्या के सिर पर तीर चिन्ह दिया जाता है।

पाया,

```
          1 ·1
     1  | 1 ·2 1
        | - 1
     21 |   2 1
        | - 2 1
        |     0
```

∴ $\sqrt{1{\cdot}21} = 1{\cdot}1$

भाग पद्धति से $\sqrt{0{\cdot}050625}$, $\sqrt{0{\cdot}000324}$, $\sqrt{85{\cdot}3776}$, $\sqrt{3{\cdot}4596}$ और $\sqrt{0{\cdot}8836}$ का मान लिखो।

```
        .2 2 5
   2 | 0.050625
     | - 4
  42 | 106
     | - 84
 445 | 2225
     | -2225
     |     0
```

$\therefore \sqrt{0{\cdot}050625} = 0{\cdot}225$

```
        ·0 1 8
   0 | 0.000324
     | - 00
   1 | 03
     | - 1
  28 | 224
     | - 224
     |     0
```

$\therefore \sqrt{0{\cdot}000324} = 0{\cdot}018$

```
          1 ·  8  6
   1 |  3 · 45 96
     | - 1
  28 |  2 4 5
     | - 2 2 4
 366 |    2 1 9 6
     |  - 2 1 9 6
     |          0
```

$\therefore \sqrt{3 \cdot 4596} = 1{\cdot}86$

स्वयं करें —11.4

नीचे के दशमलव संख्याओं का भाग की विधि से वर्गमूल निकालें —

1) 0·000256 2) 0·045369 3) 1·0609 4) 75·69

जो संख्याएँ पूर्णवर्ग नहीं है उनका भाग की पद्धलि से वर्ग मूल निकालने की चेष्टा करें और तीन दशमलव स्थान तक आसन्न मान लिखो।

17 मैं 2 का वर्गमूल निकालनें की कोशिश करूँ।

2 को 1 से भाग देने पर दशमलव के बाद हरबार 1 शून्य उतार सकते है। लेकिन भाग विधि से वर्गमूल के क्षेत्र में दशमलव के बाद से कितने शून्य उतार सकते हैं?

```
          1. 4 1 4 2
     1 | 2.00000000
       | - 1
    24 | 100      ← [दशमलव के बाद से पहले दो शून्य पायें]
       | - 96
   281 |  400     ← [ दशमलव के बाद से दूसरे बार दो शून्य पायें ]
       | - 281
  2824 |  11900   ← [ दशमलव के बाद से तीसरे बार दो शून्य पायें ]
       | - 11296
 28282 |   60400
       | - 56564
       |    3836
```

$\sqrt{2}$ के तीन दशमलव स्थान तक आसन्न मान 1.414

$\sqrt{2}$ का दो दशमलव स्थान तक आसन्न मान [ ] [स्वयं करें]

मैं भाग पद्धति से $\sqrt{3}$ का चार दशमलव स्थान तक आसन्न मान क्या पाया हूँ देखें—

```
                1.73205
        1     | 3.0000000000
              |-1
        27    | 2 00          ←  [ दशमलव के बाद से पहले दो शून्य पाया ]
              |-1 89
        343   |  1100         ←  [ दशमलव के बाद से दूसरी बार दो शून्य पाया ]
              | -1029
        3462  |    7100       ←  [दशमलव के बाद से तीसरी बार दो शून्य पाया ]
              |  - 6924
        346405|   1760000     ←  [भाग नहीं जा रहा है अत: दशमलव के अंतिम बार दो
              |  - 1732025        जोड़ा शून्य पाया।]
                    27975
```

∴ $\sqrt{3}$ का चार दशमलव स्थान तक आसन्न मान 1.7321

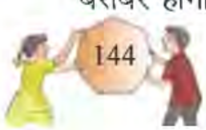
एवं $\sqrt{3}$ का दो दशमलव स्थान तक आसन्न मान ☐ [स्वयं करें]

स्वयं करें —11.5

$\sqrt{5}$ और $\sqrt{7}$ का दो और तीन दशमलव स्थान तक आसन्न मान निकालो।

बनाकर देखें—11.2

1. एक वर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल 32.49 वर्ग सें०मी० है। इस वर्ग क्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई कितनी सें०मी० होगी। निकालें।
2. 2.1214 वर्गमीटर एवं 2.9411 वर्ग मीटर क्षेत्रफल वाले दो आयत क्षेत्र के क्षेत्रफल के योग के क्षेत्रफल के बराबर एक वर्ग क्षेत्र की भुजाओं की लम्बाई कितनी होगी।
3. 0.28 के साथ कौन सी दशमलव संख्या को जोड़ने से योगफल का वर्गमूल 1 होगा।
4. 0.162 एवं 0.2 के गुणनफल का वर्गमूल कितना होगा लिखो।
5. $\sqrt{240.25} + \sqrt{2.4025} + \sqrt{0.024025}$ का मान क्या होगा निकालो।
6. 1.4641 वर्गमीटर और 1.0609 क्षेत्रफल वाले वर्ग क्षेत्र में किसकी भुजा की लम्बाई अधिक होगी तथा कितना अधिक होगी।
7. 0.4 वर्ग के साथ 0.3 के वर्ग का योग करने पर जो योगफल मिलेगा, वह उस संख्या के वर्ग के बराबर होगा उस संख्या को निकालो।



8. भाग की विधि से वर्गमूल निर्णय करें —

(i) 2.56 (ii) 4.84 (iii) 5.76 (iv) 6.76 (v) 0.045369 (vi) 0.000169 (vii) 76.195441 (viii) 170.485249 (ix) 5505.64

9. दशमलव संख्या को उसी से गुणा करने पर गुणनफल 1.1025 होगा। बताओ।

10. 0.75 के साथ किस दशमलव संख्या को जोड़कर उसका वर्गमूल 2 होगा।

11. 48.09 से किस दशमलव संख्या को घटाने पर वियोगफल का वर्गमूल 5.7 होगा। बताओ।

12. 0.000328 से कौन सी छोटी संख्या घटाने पर वियोगफल एक पूर्ण वर्ग संख्या होगा। (छः दशमलव स्थान तक)

13. नीचे की संख्याओं का आसन्न मान लिखो।

(i) $\sqrt{6}$ (दो दशमलव स्थान तक) (ii) $\sqrt{8}$ (दो दशमलव स्थान तक) (iii) $\sqrt{11}$ (तीन दशमलव स्थान तक) (iv) $\sqrt{12}$ (तीन दशमलव स्थान तक)

14. $\sqrt{15}$ का दो दशमलव स्थान तक आसन्न मान लिखो। इस आसन्न मान का वर्ग करने पर वह वर्ग 15 से कितना कम अथवा अधिक होगा।

12. बीजगणितीय सूत्रावली

विभिन्न प्रकार के रंगों का आयताकार और वर्गाकार कार्ड बनायें और सजायें।

आज मैं रुमा, बूलू, तिमिर और तमाल सबने मिलकर विभिन्न रंग तथा विभिन्न माप का वर्गाकार और आयताकार पिचबोर्ड का कार्ड बनायेंगे एवं उसके बाद विभिन्न तरह से सजाकर क्या पायेंगे देखें।

मैं एक लाल रंग के वर्गाकार पिचबोर्ड का कार्ड बनाया जिसकी एक भुजा की लम्बाई 5 से०मी० है।

रुमा ने नीले रंग के वर्गाकार पिचबोर्ड से कार्ड बनाया जिसकी एक भुजा की लम्बाई 3 से०मी० है।

तिमिर ने एक हरे रंग के आयताकार पिचबोर्ड से कार्ड बनाया जिसकी एक भुजा की लम्बाई 5 से०मी० तथा चौड़ाई 3 से०मी० है।

बूलू ने तिमिर की तरह पीले रंग का आयताकार पिचबोर्ड बनाया जिसकी एक भुजा की लम्बाई 5 से०मी० और चौड़ाई 3 से०मी० है।

अब इस लाल, नीले, हरे और पीले रंग के चार प्रकार के कार्डों के नमूने विभिन्न प्रकार से सजाने की कोशिश की तथा पास की तस्वीर की तरह एक बड़ा वर्ग क्षेत्र प्राप्त किया।

देखते है, इस बड़े पिचबोर्ड से वर्ग क्षेत्र बनाने पर उसके एक भुजा की लम्बाई (5 + 3) से०मी० होगी।
अतः बड़ा वर्गाकार क्षेत्र के पिचबोर्ड का क्षेत्रफल = $(5+3)^2$ वर्ग से०मी०।

लेकिन इस बड़े वर्गाकार पिचबोर्ड का क्षेत्रफल = लाल रंग के वर्गाकार पिचबोर्ड का क्षेत्रफल +
पीले रंग के आयताकार पिचबोर्ड का क्षेत्रफल +
हरे रंग के आयताकार पिचबोर्ड का क्षेत्रफल +
नीले रंग के वर्गाकार पिचबोर्ड का क्षेत्रफल

अर्थात् $(5+3)^2$ वर्ग से०मी० = 5^2 वर्ग से०मी० + 3से०मी० × 5से०मी० + 5से०मी०× 3से०मी० + 3^2 वर्ग से०मी०

= 5^2 वर्ग से०मी० + 2(5से०मी० × 3 से०मी०) + 3^2 वर्ग से०मी० [∵ 3×5 = 5×3]

अतः $(5+3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

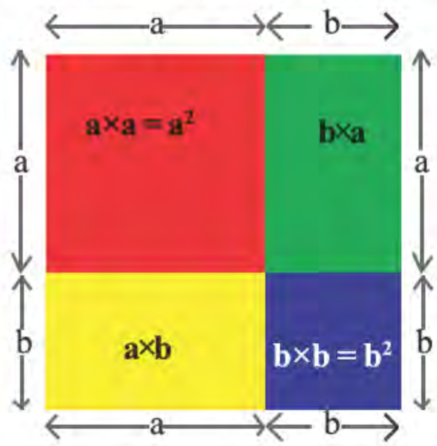
(1) 7 से०मी० और 3 से०मी०लम्बाई के भुजावाले दो वर्गाकार कार्ड बोर्ड एवं 7 से०मी० लम्बा और 3 से०मी० चौड़ा दो आयताकार कार्ड बोर्ड को लेकर इस तरह तैयार करके देखते हैं।

$(7+3)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 3 + 3^2$ कागज काटकर स्वयं करें।

(2) अन्य किसी भी लम्बाई के वर्ग क्षेत्र और आयत क्षेत्र बनाकर क्या-क्या पाते हैं देखें। [स्वयं करें]

स्वयं से

अब मान लें a इकाई लम्बे भुजा वाले एक लाल रंग का वर्गाकार पिचबोर्ड, एवं b इकाई लम्बे भुजा वाले एक नीले रंग का वर्गाकार पिचबोर्ड एवं a इकाई लम्बाई तथा b इकाई चौड़ाई वाले हरे और पीले रंग के दो आयताकार पिचबोर्ड बनाकर सजाया और इस प्रकार पाया—



इस (a + b) इकाई लम्बाई के लम्बे पिचबोर्ड से वर्ग क्षेत्र पाया—

$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$

$= a^2 + ab + ab + b^2$ [∵ ab = ba]

$= a^2 + 2ab + b^2$

a और b कोई भी संख्या रहने पर $(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b)$
अर्थात् $(a+b)$ के साथ $(a+b)$ का गुणा करके क्या पाते हैं देखें।

$$(a+b)\times(a+b) = (a+b)a + (a+b)b \quad \text{[विच्छेद नियम से]}$$
$$= a\times a + b\times a + a\times b + b\times b$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 \quad [\because ba = ab]$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$\therefore \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\therefore$ हाथ कलम से बीजगणितीय राशियों का गुणा करके पाये — $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

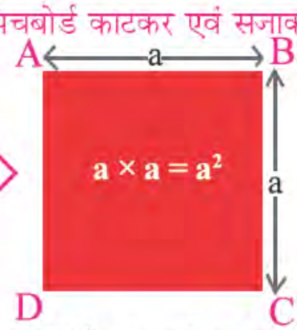
लेकिन $(a-b)\times(a-b)$ — इस बीजगणितीय राशि का गुणा करके पाये —

$$(a-b)\times(a-b) = (a-b)\times a - (a-b)\times b \quad \text{[विच्छेद नियम से]}$$
$$= a\times a - b\times a - (a\times b - b\times b)$$
$$= a^2 - b\times a - a\times b + b^2$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2 \quad [\because ba = ab]$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

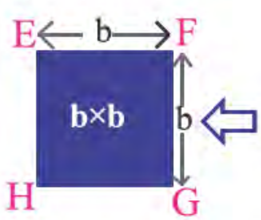
स्वयं से $\quad \therefore (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

हम आगे की तरह वर्गाकार और आयताकार रंगीन पिचबोर्ड काटकर एवं सजाकर स्वयं से $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ जाँचने की चेष्टा करें।

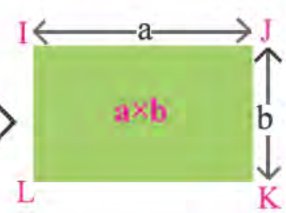
मैं a इकाई लम्बाई की भुजा वाले लाल रंग से रंगे पिचबोर्ड से एक वर्ग क्षेत्र बनाया।

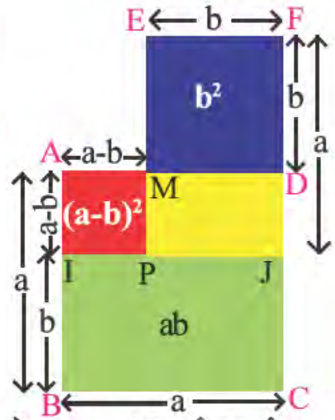


अब सुनीति ने b इकाई लम्बाई के (b < a) भुजा वाले नीले रंग के पिचबोर्ड से एक वर्ग क्षेत्र बनाया।



मुसकान ने हरे रंग के पिचबोर्ड से दो आयताकार क्षेत्र बनाया जिसकी लम्बाई a इकाई तथा चौड़ाई b इकाई है।





मैंने पहले लाल रंग के पिचबोर्ड के ऊपर हरे और पीले रंग के पिचबोर्ड को पास के चित्र की तरह रखा। अब नीले रंग के पिचबोर्ड के पास के चित्र की तरह रखा। इस बार क्या मिला देखें।

AIPM वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुजा की लम्बाई (a-b) इकाई

$\therefore$ AIPM वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल $(a-b)^2$ वर्ग इकाई

ABCD वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल $= a^2$ वर्ग इकाई। EMDF वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल $= b^2$ वर्ग इकाई।

IBCJ आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल $= a \times b$ वर्ग इकाई।

EPJF आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल $= b \times a$ वर्ग इकाई।

$\therefore$ AIPM वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल

= ABCD वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल + EMDF वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल - IBCJ आयत का क्षेत्रफल - EPJF आयत का क्षेत्रफल

$\therefore$ $(a-b)^2$ वर्ग इकाई $= (a^2+b^2-ab-ba)$ वर्ग इकाई

$= (a^2 + b^2 - 2ab)$ वर्ग इकाई $[\because ab = ba]$

$= (a^2 - 2ab + b^2)$ वर्ग इकाई

$\therefore$ स्वयं से बीजगणितीय राशियों का गुणा करके पाये — $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

a = 7 से०मी० और b = 4 से०मी० लम्बाई के वर्गाकार और आयताकार पिचबोर्डों को तैयार करके तथा सजाकर पायेंगें —

$$(7 + 4)^2 = 7^2 + 2\times7\times4 + 4^2$$

देखते हैं, $(7 + 4)^2 = 11^2 = 121$ एवं $7^2 + 2\times7\times4 + 4^2$

$= 49 + 56 + 16$

$= 105 + 16 = 121$

$\therefore$ $(7 + 4)^2 = 7^2 + 2\times7\times4 + 4^2$

a = 5 से०मी० व b = 3से०मी० लम्बाई के वर्गाकार और आयताकार पिचबोर्डों को तैयार करके तथा सजाकर पायेगें — $(5-3)^2 = 5^2 - 2\times5\times3 + 3^2$

देखेते हैं, $(5-3)^2 = 2^2 = 4$ एवं $5^2 - 2\times5\times3 + 3^2$

$= 25 - 30 + 9$

$= 34 - 30 = 4$

$\therefore$ $\boxed{(5-3)^2 = 5^2 - 2\times5\times3 + 3^2}$

a और b कोई भी संख्या लेकर जाँच करें।

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ — (I)

$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ — (II)

(स्वयं करें)

अत: (I) और (II) दोनों अभेद। कोई भी राशियाँ यदि '=' चिन्ह के दोनों तरफ रहे एवं दोनों तरफ का मान चल के किसी भी मान के लिए समान हो तो उसे अभेद कहा जाता है।

I नं० सूत्र में b के जगह (-b) बैठाने से क्या पाते हैं देखें—

$\{a+(-b)\}^2 = a^2 + 2\times a\times(-b) + (-b)^2$

$\therefore$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ अर्थात् (II) नं० सूत्र पायें

1 अब $(a+b)^2$ और $(a-b)^2$ को जोड़कर देखें।

$(a+b)^2 + (a-b)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$= a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 2ab - 2ab$

$= 2a^2 + 2b^2$

$= 2(a^2 + b^2)$

$\therefore$ $\boxed{(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)}$

a = -2, b=7 लेकर $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ की जाँच करें।

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = (-2+7)^2 + (-2-7)^2$

$= (5)^2 + (-9)^2 = 25 + 81 = 106$

फिर, $2(a^2 + b^2) = 2\{(-2)^2 + (7)^2\}$

$= 2\{4+49\} = 2\times53 = 106$

$\therefore$ $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

a और b का अन्य मान लेकर जाँचने पर $\boxed{(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)}$ (स्वयं करें)

2 $(a+b)^2 - (a-b)^2$ से क्या पाते हैं देखें।

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2}$$
$$= 4ab.$$
$$\therefore \boxed{(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab}$$

$a = 6$ और $b = 3$ लेकर कि $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ से क्या पाते हैं।

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = (-6+3)^2 - (-6-3)^2$$
$$= (-3)^2 - (-9)^2$$
$$= 9 - 81 = -72$$
$$4 \times a \times b = 4 \times (-6) \times 3 = -72$$

$\therefore$ $\boxed{(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab}$ मिला।

a व b के लिए कोई भी मान रखकर जाँच करें $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

(स्वयं करें)

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$$
$$\frac{\cancel{4}ab}{\cancel{4}} = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$ [दोनों पक्ष में 4 से भाग देने पर]
$$\therefore \quad ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$
$$= \frac{(a+b)^2}{2^2} - \frac{(a-b)^2}{2^2}$$
$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\therefore \boxed{ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)} \text{ ——— (I)}$$

3 (I) नं० में $a = x$ और $b = y$ रखकर देखें क्या पाते हैं।

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

4 फिर (I) नं० में यदि, $a = x$ और $b = -y$ रखकर देखें क्या पाते हैं।

$$(x-y)^2 = x^2 + 2 \times x \times (-y) + (-y)^2$$
$$= x^2 - 2xy + y^2$$

5 फिर (I) नं० में यदि, $a = 3x$ और $b = 5y$ रखकर देखें क्या पाते हैं।

$$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times (5y) + (5y)^2$$

6 (I) नं० की सहायता से $(101)^2$ का मान निकालें।

$$(101)^2 = (100 + 1)^2$$
$$= (100)^2 + 2\times100\times1+(1)^2$$
$$= \square$$ स्वयं करें।

7 यदि (I) नं० में, a = x और b= y+z रखे तो देखे क्या होता है

$$\{x + (y+z)\}^2 = x^2 + 2\times x\times (y+z) + (y+z)^2$$
$$= x^2 + 2xy + 2xz + (y+z)^2$$
$$= x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$
$$\therefore \quad \boxed{(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx}$$

अतः $\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$ —— (III)

8 (I) नं० में $a = \frac{x}{5}$, $b = \frac{-z}{2}$ रखने पर पाते हैं—

$$\left(\frac{x}{5} + \frac{-z}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{5}\right)^2 + 2\times\left(\frac{x}{5}\right)\times\left(-\frac{z}{2}\right) + \left(-\frac{z}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{x}{5} - \frac{z}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{25} - \frac{xz}{5} + \frac{z^2}{4}$$

9 (III) नं० में, a = 2, b = 3 और c = 4 रखकर देखे क्या पाते हैं।

$$(a+b+c)^2 = (2+3+4)^2 = 9^2 = 81$$

फिर, $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 2\times2\times3 + 2\times3\times4 + 2\times4\times2$
$$= 4+9+16+12+24+16 = 81$$
$$\therefore \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

स्वयं करें - 12.1 $(a + b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$ की सहायता से नीचे की संख्याओं का वर्ग निर्णय करने के लिए a और b की जगह क्या-क्या लिए लिखें एवं वर्ग निर्णय करें—

(i) x+3 (ii) p+9 (iii) 6-x (iv) y-2 (v) $mn + l^2$ (vi) 6x +3 (vii) 4x + 5y (viii) pqc +2 (ix) $\frac{5}{k} + 3$ (x) $\frac{3}{r} + \frac{2}{p}$ (xi) $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$ (xii) $m^2 + n^2$ (xiii) 3xy +4z (xiv) 2x+ 3y +z (xv) 102 (xvi) p+q+r+s

$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ --- (II)

10 (3) नं० में, a = x और b= y रखकर देखें क्या पाते हैं

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

11 फिर, (II) नं० में, a = x और b= y रखकर देखें क्या पाते हैं

$\{x - (-y)\}^2 = x^2 - 2\times x(-y) + (-y)^2$

$\therefore (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

12 यदि (II) नं० में, $a = \frac{m}{2}$ और $b\frac{n}{5}$ बैठाने पर क्या होता है देखें।

$(\frac{m}{2} - \frac{n}{5})^2 = (\frac{m}{2})^2 - 2\times\frac{m}{2}\times\frac{n}{5} + (\frac{n}{5})^2$

$= \frac{m^2}{4} - \frac{mn}{5} + \frac{n^2}{25}$

13 यदि (II) नं० में, a = 6x , और b= -7y रखकर देखें क्या होता है।

$\{6x - (-7y)\}^2 = (6x)^2 - 2\times 6x(-7y) + (-7y)^2$

$\therefore (6x + 7y)^2 = 36x^2 + 84xy + 49y^2$

14 अब (II) नं० में a = x+y और b= z रखकर देखें क्या होता हैं।

$\{(x+y) - z\}^2 = (x+y)^2 - 2\times(x+y)z + z^2$

$= \boxed{}$ स्वयं करें

15 (II) नं० की सहायता से $(99)^2$ का मान खोंजे।

$(99)^2 = (100-1)^2$

$= (100)^2 - 2\times 100\times 1 + (1)^2$

$= \boxed{}$ स्वयं करें

स्वयं करें -12.2

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ —की सहायता से वर्ग निर्णय करने के लिए a और b की जगह क्या-क्या लिखकर वर्ग निर्णय करेंगे।

(i) x - 5 (ii) m-n, (iii) 10-x, (iv) x+y, (v) 3x-y, (vi) 4m+2, (vii) 5y +x, (viii) ce-fg, (ix) $px - \frac{1}{2}$ (x) p+q-r, (xi) p-q+r, (xii) $\frac{2x}{3} - \frac{3y}{4}$, (xiii) $3m^3 - 4n^3$, (xiv) 2x+y-z, (xv) 999, (xvi) p+q -r-s.

$(a+b)^2 = \square + 2ab + \square$ ------ (I)

एवं $(a-b)^2 = \square - 2ab + \square$ ----- (II)

(I) नं० एवं (II) नं० की सहायता से बीजगणितीय राशिओं को पूर्ण वर्गाकार लिखने की कोशिश करें।

16 $4x^2 + 12xy + 9y^2$ — को पूर्ण वर्गाकार में लिखें एवं a तथा b का मान क्या पाते हैं देखें।

$4x^2 + 12xy + 9y^2$

$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2$ [यहाँ $a = 2x$, $b = 3y$]

$= (2x + 3y)^2$ [(I) नं० सूत्र से पाया]

17 $4a^2 + 4 + \frac{1}{a^2}$ बीजगणितीय संख्या माला को पूर्ण वर्गाकार में लिखो और मान निकालो यदि $a = \frac{1}{2}$

$4a^2 + 4 + \frac{1}{a^2}$

$= \square^2 + 2 \times 2a \times \frac{1}{a} + (\frac{1}{a})^2$

$= (2a + \frac{1}{a})^2$ [(I) नं० सूत्र से पाया]

$= \{\cancel{2} \times (-\frac{1}{\cancel{2}}) + \left(\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right)\}^2$ [$a = -\frac{1}{2}$ बैठाकर पायें]

$= (-1 - 2)^2 = (-3)^2 = 9$

18 ऊपर के (II) नं० की सहायता से

$(3a + 2b)^2 - 2(3a+2b)(a+2b) + (a+2b)^2$ का मान निकालें।

$(3a + 2b)^2 - 2(3a + 2b)(a+2b) + (a + 2b)^2$

[माना $3a + 2b = x$, एवं $a+2b = y$]

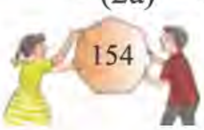
$= x^2 - 2xy + y^2$

$= (x-y)^2$ [(II) नं० के सूत्र से पाया]

$= \{(3a + 2b) - (a+2b)\}^2$ [$x = 3a + 2b$ और $y = a+2b$ रखकर पाये]

$= (3a + 2b - a - 2b)^2$

$= (2a)^2 = 4a^2$



19 मैं $x^2y^2 - 10xyz + 25z^2$ बीजगणितीय राशि को पूर्ण वर्गाकार में सजाकर मान निकालें जब $x = 1, y = 1$ और $z = 2$

$x^2y^2 - 10\,xyz + 25z^2$

$= (xy)^2 - 2\times xy \times 5z + (5z)^2$

$= (xy - 5z)^2$ [(II) नं० सूत्र से पाया]

अब देखें, $x = 1, y = -1$ व $z = 2$ बैठाकर क्या पाते है देखें (स्वयं करें)

बनाकर देखें— 12.1

1. $(a+b)$ को $(a+b)$ से गुणा करने पर गुणनफल नीचे का कौन सा होगा देखें।

   (i) $a^2 + b^2$ (ii) $(a+b)^2$ (iii) $2(a+b)$ (iv) $4ab$

2. $(x+7)^2 = x^2 + 14x + k$ हो तो k का मान नीचे में कौन होगा।

   (i) 14 (ii) 49 (iii) 7 (iv) कोई नहीं

3. $a^2 + b^2$ के साथ कौन सी बीजगणितीय राशि जोड़ने पर योगफल एक पूर्ण वर्ग राशि होगी लिखें।

   (i) $4ab$ (ii) $-4ab$ (iii) $2ab$ अथवा $-2ab$ (iv) 0

4. $(a+b)^2 = a^2 + 6a + 9$ हो तो b का धनात्मक मान नीचे में से कौन सी राशि होगी लिखें।

   (i) 9 (ii) 6 (iii) 3 (iv) -3

5. $x^2 + \frac{1}{4}x$ के साथ नीचे की कौन सी राशि जोड़ने पर योगफल पूर्ण वर्ग राशि होगी।

   (i) $\frac{1}{64}$ (ii) $-\frac{1}{64}$ (iii) $\frac{1}{8}$ (iv) कोई नहीं

6. (i) k का कौन सा मान या मानो से $c^2 + kc + \frac{1}{9}$ पूर्ण वर्ग होगा।

   (ii) $9p^2 + \frac{1}{9P^2}$ संख्या माला से कौन सी संख्या या संख्याओं को घटाने पर वियोगफल पूर्ण होगा।

   (iii) $(x - y)^2 = 4 - 4y + y^2$ हो तो x का मान कितना होगा।

(iv) $(c-3)^2 = c^2 + kc + 9$ कोई नहीं k का मान क्या होगा।

7. सूत्र की सहायाता से सरल करें ।

(i) $(2q-3z)^2 - 2(2q-3z)(q-3z) + (q-3z)^2$

(ii) $(3p+2q-4r)^2 + 2(3p+2q-4r)(4r-2p-q) + (4r-2p-q)^2$

8. पूर्ण वर्गाकार में व्यक्त करके मान निकालें।

(i) $16a^2 - 40ac + 25c^2$ (ii) $4p^2 - 2p + \frac{1}{4}$

(iii) $1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$ (iv) $9a^2 + 24ab + 16b^2$

9. पूर्ण वर्गाकार में व्यक्त करके मान निकालें।

(i) $64a^2 + 16a + 1$ जब $a=1$

(ii) $25a^2 - 30ab + 9b^2$ जब $a=3$ और $b=2$

(iii) $64 - \frac{16}{p} + \frac{1}{p^2}$, जब $p=-1$

(iv) $p^2q^2 + 10pqr + 25r^2$ जब $p=2, q=-1$ और $r=3$

10. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ एवं

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ या

$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ की सहायता से

(i) st और (s^2+t^2) का मान निकालें यदि $s+t=12$ और $s-t=8$

(ii) $8xy(x^2+y^2)$ का मान निकालें यदि $(x+y)=5$ और $(x-y)=1$

(iii) $\frac{x^2+y^2}{2xy}$ का मान निकालें यदि $(x+y)=9$ और $(x-y)=5$

(iv) 36 को दो वर्गों के अन्तर के रुप में व्यक्त करें। [संकेत $36 = 4\times9 = \left(\frac{4+9}{2}\right)^2 - \left(\frac{4-9}{2}\right)^2$]

(v) 44 को दो वर्गों के अन्तर के रुप में व्यक्त करें।

(vi) $8x^2 + 50y^2$ को दो वर्गों के योग के रुप में व्यक्त करें।

(vii) x को दो वर्गों के अन्तर के रुप में व्यक्त करें।

बीजगणितीय राशियों को गुणा करके क्या पायेंगे देखें।

$(x+5) \times (x+3) = x \times (x+3) + 5 \times (x+3)$

$= x^2 + 3x + 5x + 15 = x^2 + 8x + 15$

$\therefore \quad \boxed{(x+5) \times (x+3) = x^2 + 8x + 15}$ ———————— (IV)

अब (IV) में बराबर चिन्हों के दोनों तरफ $x = 6$ रखकर क्या पायेंगे।

बायें तरफ $x = 6$ बैठाकर पाते हैं, $(6+5) \times (6+3) = 11 \times 9 = 99$

फिर दायें तरफ $x = 6$ बैठाकर पाते हैं $6^2 + 8 \times 6 + 15 = 36 + 48 + 15 = 99$

पायें $(6+5) \times (6+3) = 6^2 + 8 \times 6 + 15$

x के किसी भी मान के लिए,

$(x+5) \times (x+3) = x^2 + 8x + 15$ बराबर चिन्हों के दोनों तरफ होता है।

इस (IV) नं० सूत्र के विषय में क्या कहेंगे जब x का कोई भी मान बराबर चिन्ह के दोनों तरफ बैठाने पर एक बराबर मान पाते हैं।

उन्हें **अभेद** कहा जाता है

अब समझे हैं

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

ये सब **अभेद** हैं

20 अब $(x+a)$ और $(x+b)$ का गुणनफल कितना होगा देखें।

$(x+a) \times (x+b) = x \times (x+b) + a \times (x+b)$

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a+b)x + ab$

पाये $\boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$ ———————— (V)

21 (V) नं० अभेद में $x = -2$ रखकर पाते हैं

$(-2+a)(-2+b) = -2(-2+b) + a(-2+b)$

$= (-2) \times (-2) + (-2) \times b + a \times (-2) + a \times b$

$= 4 - 2b - 2a + ab$

$= 4 - 2(b+a) + ab$

$(-2)^2 + (a+b)(-2) + a \times b = 4 - 2(a+b) + ab$

$\therefore (-2+a)(-2+b) = (-2)^2 + (a+b)(-2) + a \times b$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ इस अभेद का व्यवहार करें।

22 नीचे की संख्याओं का गुणनफल निकालें।

(i) $(x+2)(x+5)$ (ii) $(x+3)(x-7)$ (iii) $(x+1)(x+8)$ (iv) $(x-6)(x+9)$.

(i) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

इस अभेद में $a=2$ तथा $b=5$ बैठाकर पाते है

$$(x+2)(x+5) = x^2 + (2+5)x + 2 \times 5$$
$$= x^2 + 7x + 10$$

(ii) फिर उस अभेद में $a = -3$, $b = -7$ रखकर पाते है।

$(x-3)(x-7) = x^2 + (-3-7)x + (-3)(-7)$

$= x^2 - 10x + 21$

[(iii) और (iv) स्वयं करें]

I नं० और II नं० अभेदों को लिखें तथा दूसरे तरीके से सजायें।

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$

$\therefore (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$ $\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ ....(VI)

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^2 + 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab$

$\therefore (a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$ $\therefore a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ ....(VII)

(VI) एवं (VII) अभेदों की सहायता से कुछ बीजगणितीय संख्याओं का मान निकालने की कोशिश करेंगे।

23 माना $a + b = 0$ एवं $ab = -25$; तो a^2+b^2 का मान निकालें।

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

मान बैठाकर पाते हैं, $0^2 = a^2+b^2+2\times(-25)$

या, $0 = a^2+b^2 - 50$

या, $a^2+b^2 = 50$

$\therefore\ a^2+b^2 = 50$

दूसरी पद्धति,

$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$= (0)^2 - 2\times(-50)$ [$\because a + b = 0$ एवं

$= 0 + 50$ $\quad ab = -25$]

$= 50\ \therefore\ a^2+b^2 = 50$

24 यदि $2p + \frac{1}{p} = 5$ हो, तो $(p + \frac{1}{2p})^2$ एवं $p^2 + \frac{1}{4p^2}$ का मान निकालें।

$2p + \frac{1}{p} = 5$

या, $2p + \frac{2}{2p} = 5$

या, $2(p + \frac{1}{2p}) = 5$

या, $p + \frac{1}{2p} = \frac{5}{2}$

$\therefore (p + \frac{1}{2p})^2 = (\frac{5}{2})^2$ [दोनों तरफ वर्ग करने पर]

$= \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

फिर $(p + \frac{1}{2p})^2 = \frac{25}{4}$

या, $p^2 + 2.p.\frac{1}{2p} + (\frac{1}{2p})^2 = \frac{25}{4}$

या, $p^2 + \frac{1^2}{4p^2} = \frac{25}{4} - 1$

$= \frac{25-1}{4} = \frac{21}{4}$

अत: $p^2 + \frac{1}{4p^2} = 5\frac{1}{4}$

दूसरी पद्धति,

$2p + \frac{1}{p} = 5$

वा, $2(p + \frac{1}{2p}) = 5$

$\therefore p + \frac{1}{2p} = \frac{5}{2}$

$\therefore (p + \frac{1}{2p})^2 = (\frac{5}{2})^2$ [दोनों तरफ वर्ग करने पर]

$= \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

$p^2 + \frac{1}{4p^2} = p^2 + (\frac{1}{2p})^2$

$= (p + \frac{1}{2p})^2 - 2.p.\frac{1}{2p}$

$= (\frac{5}{2})^2 - 1$

$= \frac{25}{4} - 1$

$= \frac{25-4}{4}$

$= \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$

25 $6(x - \frac{1}{x}) = 5$ हो, तो $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान कितना होगा निर्णय करें।

$6(x - \frac{1}{x}) = 5$

या, $x - \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$

$(x - \frac{1}{x})^2 = (\frac{5}{6})^2$, [दोनों तरफ वर्ग करने पर]

या, $x^2 - 2.\cancel{x}.\frac{1}{\cancel{x}} + (\frac{1}{x})^2 = \frac{25}{36}$

या, $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{25}{36}$

या, $x^2 + \frac{1}{x^2} - \cancel{2} + \cancel{2} = \frac{25}{36} + 2$ [दोनों तरफ 2 जोड़ने पर]

$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\frac{25}{36}$

द्वितीय पद्धति

$6(x - \frac{1}{x}) = 5$

$\therefore (x - \frac{1}{x}) = \frac{5}{6}$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + (\frac{1}{x})^2$

$= (x - \frac{1}{x})^2 + 2.x.\frac{1}{x}$

$= (\frac{5}{6})^2 + 2$

$= \frac{25}{36} + 2 = 2\frac{25}{36}$

26 $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} + \frac{3}{2}$ हो तो $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$ का मान निकालें।

$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} + \frac{3}{2}$

या, $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}$

$\therefore (\frac{x}{y} - \frac{y}{x})^2 = \frac{9}{4}$ [दोनों तरफ वर्ग करने पर]

या, $\frac{x^2}{y^2} - 2.\frac{x}{y}.\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{9}{4}$

या, $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{9}{4} + 2 = \frac{9+8}{4} = \frac{17}{4}$

$= 4\frac{1}{4}$

द्वितीय पद्धति

$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} + \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}$

अब $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = (\frac{x}{y})^2 + (\frac{y}{x})^2$

$= (\frac{x}{y} - \frac{y}{x})^2 + 2.\frac{x}{y}.\frac{y}{x}$

$= (\frac{3}{2})^2 + 2$

$= \frac{9}{4} + 2$

$= \frac{9+8}{4} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$

27 अब $(a+b)^2$ को $(a-b)^2$ के रूप में व्यक्त करने की कोशिश करें।

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = a^2+b^2-2ab + 4ab = (a-b)^2 + 4ab$

28 अब $(a-b)^2$ को $(a+b)^2$ के रूप में व्यक्त करने की कोशिश करें।

$(a-b)^2 = \square + \square + \square = a^2+b^2+2ab - 4ab = (a+b)^2 - 4ab$

हम पायें, $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ ——————— (VIII)

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ ——————— (IX)

29 (VIII) एवं (IX) की सहायता से $m+n = 10$ और $mn = 9$ हो, तो $(m-n)$ का धनात्मक मान निकालें।

$(m-n)^2 = (m+n)^2 - 4mn = (10)^2 - 4 \times 9 = 100 - 36 = 64 = 8^2$

$\therefore m-n = \sqrt{8^2} = 8$

बनाकर देखें — 12.2

1. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ इस अभेद की सहायता से नीचे की बीजगणितीय संख्याओं का गुणा करें।

(i) $(x+7)(x+1)$ (ii) $(x-8)(x-2)$ (iii) $(x+9)(x-6)$

(iv) $(2x+1)(2x-1)$ (v) $(xy-4)(xy+2)$ (vi) $(a^2+5)(a^2-4)$

2. सूत्र की सहायता से दिखलाएँ कि —

(i) $(2x+3y)^2 - (2x-3y)^2 = 24xy$, (ii) $(a+2b)^2+(a-2b)^2 = 2(a^2+4b^2)$

(iii) $(l+m)^2 = (l-m)^2 + 4lm$, (iv) $(2p-q)^2 = (2p+q)^2 - 8pq$

(v) $(3m+4n)^2 = (3m-4n)^2 + 48mn$ (vi) $(6x+7y)^2 - 84xy = 36x^2+49y^2$

(vii) $(3a-4b)^2+24ab = 9a^2+16b^2$ (viii) $(2a+\frac{1}{a})^2 = (2a-\frac{1}{a})^2 + 8$

3. प्रत्येक को सूत्र की सहायता से हल करें।

(i) $x-y=3, xy=28$ हो, तो x^2+y^2 का मान कितना होगा।

(ii) $a^2+b^2 = 52$, $a-b=2$ हो, तो ab का मान कितना होगा।

(iii) $l^2+m^2 = 13$ एवं $l+m = 5$ हो, तो lm का मान कितना होगा।

(iv) $a+\frac{1}{a}=4$ हो, तो $a^2+\frac{1}{a^2}$ का मान कितना होगा।

(v) $a-\frac{1}{a}=4$ हो, तो $a^2+\frac{1}{a^2}$ का मान कितना होगा।

(vi) $5x+\frac{1}{x}=6$ हो, तो दिखाओं $25x^2+\frac{1}{x^2}=26$

(vii) $2x + \frac{1}{x} = 5$ हो, तो $4x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान लिखें।

(viii) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3$ हो, तो $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$ का मान लिखें।

(ix) $x^2 + y^2 = 4xy$ हो, तो प्रमाणित करें कि $x^4 + y^4 = 14x^2y^2$

(x) $2a + \frac{1}{3a} = 6$ हो, तो $4a^2 + \frac{1}{9a^2}$ का मान कितना होगा।

(xi) $5a + \frac{1}{7a} = 5$ हो, तो $25a^2 + \frac{1}{49a^2}$ का मान कितना होगा।

(xii) $2x - \frac{1}{x} = 4$ हो, तो $x^2 + \frac{1}{4x^2}$ का मान लिखें।

(xiii) $m + \frac{1}{m} = -p$ हो, तो दिखाओ कि $m^2 + \frac{1}{m^2} = p^2 - 2$

(xiv) $a^2 + b^2 = 5ab$ हो, तो दिखाओ कि $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 23$

(xv) $6x^2 - 1 = 4x$ हो, तो दिखाओ कि $36x^2 + \frac{1}{x^2} = 28$

(xvi) $m + \frac{1}{m} = p - 2$ हो, तो दिखाओ कि $m^2 + \frac{1}{m^2} = p^2 - 4p + 6$

(xvii) $m - \frac{1}{m-2} = 6$ हो, तो $(m-2)^2 + \frac{1}{(m-2)^2}$ का मान कितना होगा।

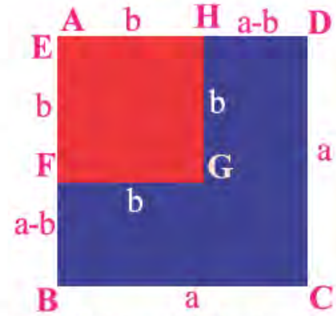
स्वयं से

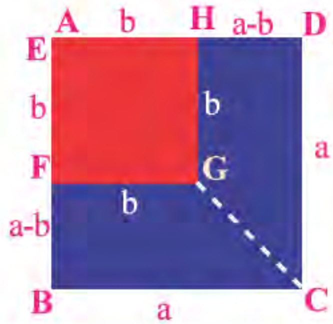
वर्गाकार और आयताकार कागज काटकर तथा उसे जोड़कर कुछ बनाने की कोशिश करें

a सें०मी० लम्बाई भुजा वाले एक नीले रंग के वर्गाकार पिचबोर्ड ABCD को काट लिया, इसलिए ABCD वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल a^2 वर्ग से०मी० [माना, a = 6 से०मी०]

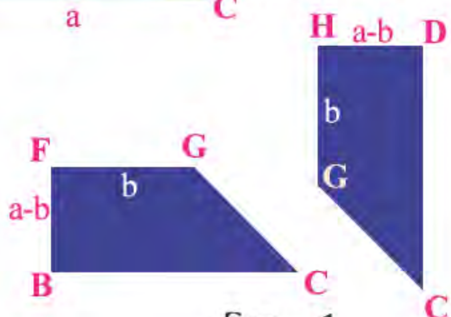
अब b से०मी० लम्बे भुजा वाले एक लाल रंग के वर्गाकार पिचबोर्ड से EFGH काट लिया। EFGH वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल b^2 वर्ग से०मी० [माना, b = 2 से०मी०]

अब बगल के चित्र की तरह ABCD वर्गाकार पिचबोर्ड के ऊपर EFGH वर्गाकार पिचबोर्ड को रखा।



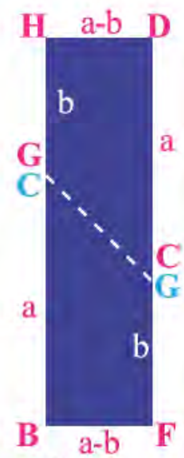


अब पास के चित्र की तरह G और C दोनों बिन्दुओं को जोड़ दिया। अब GC के बराबर काँच से काटकर दो ट्रापीजिय HGCD एवं GFBC पाया और अलग करके रख दिया।



चित्र - 1

HGCD एवं GFBC दोनों ट्रापीजिय को पास के चित्र की तरह सजा लिया।



चित्र - 2

क्या पायें देखें।

ABCD वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = a^2 वर्ग से०मी०

EFGH वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = b^2 वर्ग से०मी०

ABCD वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल - EFGH वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल =

ट्रापीजिय (HDCG) का क्षेत्रफल + ट्रापीजिय (FGCB) का क्षेत्रफल [(1) नं० चित्र से]

= HDFB आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल [(2) नं० चित्र से]

$= HB \times HD$

$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$

$\therefore \quad (a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$

इस तरह से स्वयं से रंगीन कागज काटकर तथा जोड़कर देखा

$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$ या $(a+b)(a-b) = (a^2 - b^2)$

30 $(a+b)\times(a-b)$ को गुणा करके देखें क्या पाते हैं।

$$(a+b)\times(a-b) = (a+b)\times a - (a+b)\times b$$
$$= a^2 + ba - ab - b^2$$
$$= a^2 + ab - ab - b^2 \; [\because ab=ba]$$
$$= a^2-b^2$$

पाया, $(a+b)\times(a-b) = a^2-b^2$

$a= -2$, $b= 9$ रखकर देखें क्या पाते हैं।

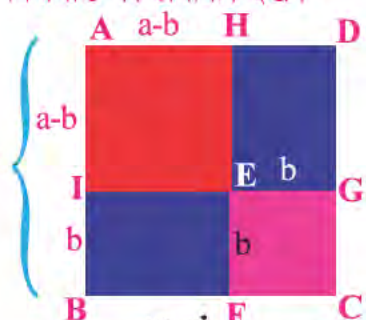
$(a+b)\times(a-b) = (-2+9)\times(-2-9) = 7\times(-11) = -77$

$a^2-b^2 = (-2)^2 - (9)^2 = 4-81 = -77$

$\therefore \quad (a+b)(a-b) = a^2-b^2$

a और b का कोई भी मान रखकर जाँच करें $(a+b)(a-b) = (a^2-b^2)$ [स्वयं करें]

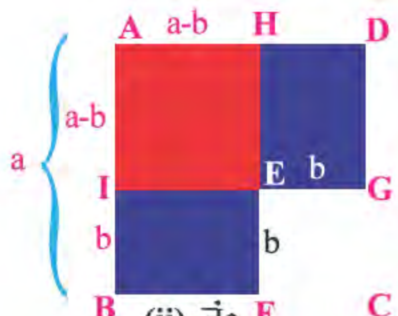
अलग तरीके से हाथ कलम से रंगीन कागज काटें और बड़ा पिचबोर्ड पर लगाकर देखें।



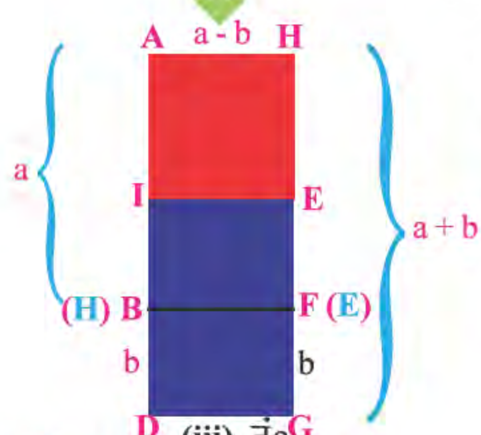
(i) नं०

ABCD वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल = a^2 वर्ग इकाई

EFCG वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल = b^2 वर्ग इकाई



(ii) नं०



(iii) नं०

ABCD वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल - EFCG वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल

= AHEI वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल + IBFE आयत का क्षेत्रफल + DHEG आयत का क्षेत्रफल = AHGD आयत का क्षेत्रफल

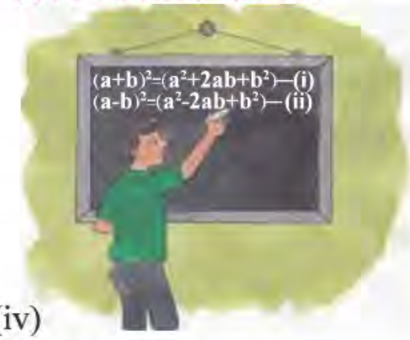
[**(iii)** नं० चित्र की तरह सजाकर पाया]

$= AH \times HG$

$= (a-b)\times(a+b)$

$\therefore \; a^2-b^2=(a+b)\times(a-b)$

बीजगणितीय राशियों को लेकर विभिन्न अभेदों को जानकर उसे लिखों और उनके बीच सम्पर्क को खोजों।



$(a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2)$ ———— (i)

$(a-b)^2 = (a^2-2ab+b^2)$ ———— (ii)

$(a+b)(a-b) = (a^2-b^2)$ ———— (iii)

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ———— (iv)

स्वयं करें – 12.3

1) (iv) नं० अभेद में $x = a$ एवं $a = b$ रखकर (i) अभेद की तरह पाते हैं या नहीं देखे।

2) (iv) नं० अभेद में $x = a$ एवं $a = -b$ रखकर (iii) अभेद की तरह पाते हैं या नहीं देखे।

3) (iv) नं० अभेद में $x = a$ एवं $a = -b$ रखकर कौन सा अभेद पायेगें देखें।

31 $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ की सहायता से (i) $78^2 - 22^2$ और (ii) 94×106 का मान निकालें।

(i) $78^2 - 22^2 = (78+22) \times (\square - \square)$

$= \square \times 56 = 5600$

(ii) $94 \times 106 = (\boxed{100} - \square)(\boxed{100} + \square)$

$= \square - \square$

$= \square - \square = 9964$

32 सूत्र की सहायता से (i) (p+5) (p-5) से क्या पाते हैं देखे और (ii) $81-a^2$ को दो द्विपदी राशि के के गुणनफल के आकार में व्यक्त करने की चेष्टा करें।

(i) $(p+5)(p-5) = p^2 - (5)^2$

$= p^2 - 25$

(ii) $81-a^2 = (9)^2 - (a)^2$

$= (9+a)(9-a)$

33 सूत्र की सहायता से $(2x+4y-3z)^2 - (2x-4y+3z)^2$ का मान निकालें।

$(2x+4y-3z)^2 - (2x-4y+3z)^2$

$= (2x+4y-3z+2x-4y+3z)\{(2x+4y-3z)-(2x-4y+3z)\}$

$= 4x \times \{2x+4y-3z-2x+4y-3z\}$

$= 4x \times (8y-6z)$

$= 32xy - 24xz$

34 सूत्र की सहायता से $(5m+2n+3p)(5m+2n-3p)$ का गुणनफल लिखें।

$(5m+2n+3p)(5m+2n-3p)$

$= \{(5m+2n)+3p\}\{(5m+2n)-3p\}$

$= (a+b)(a-b)$ [माना, $5m+2n = a$, $3p = b$]

$= (a^2-b^2)$

$= (5m+2n)^2 - (3p)^2$

$= 25m^2 + 20mn + 4n^2 - 9p^2$

35 सूत्र की सहायता $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$ से क्रमिक (एक के बाद एक) गुणा करें और क्या पाते हैं देखें।

$(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$= (\square \times \square)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$= (\square - \square)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$= \{(x^2-y^2)(x^2+y^2)\}(x^4+y^4)$

$= (\square - \square)(x^4+y^4)$

$= x^8-y^8$

बनाकर देखें —12.3

1. $(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)$ सूत्र की सहायता से मान निर्णय करें।

   (i) $(37)^2-(13)^2$ (ii) $(2.06)^2-(0.94)^2$ (iii) $(78) \times (82)$

   (iv) 1.15×0.85 (v) $(65)^2-(35)^2$

2. (i) $k-p^2 = (9+p)(9-p)$ हो,तो k का मान कितना होगा।

   (ii) $(25-4x^2) = (5+ax)(5-ax)$ हो, तो a का धनात्मक मान कितना होगा, निकालें।

   (iii) $(4-x) \times \square = (16-x^2)$ हो तो खाली जगह में क्या होगा।

3. सूत्र की सहायता से गुणनफल निकालें।

   (i) $25l^2 - 16m^2$ (ii) $49x^4 - 36y^4$

   (iii) $(2a+b)^2-(a+b)^2$ (iv) $(x+y)^2-(a+b)^2$

   (v) $(x+y-z)^2-(x-y+z)^2$ (vi) $(m+p+q)^2-(m-p-q)^2$

4. सूत्र की सहायता से क्रमिक गुणनफल निकालें।

   (i) $(c+d)(c-d)(c^2+d^2)$

   (ii) $(1-3x^2)(1+3x^2)(1+9x^4)$

   (iii) $(a^2+b^2)(a^2-b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$

5. नीचे की बीचगणितीय संख्याओं को गुणनफल के रूप में लिखें।

   (i) $16c^4 - 81d^4$ (ii) $p^4q^4 - r^4s^4$

   (iii) $81 - x^4$ (iv) $625 - a^4b^4$

6. $(p+q)^4-(p-q)^4 = 8pq(p^2+q^2)$ — प्रमाणित करें।

7. सूत्र की सहायता से गुणा करें $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

8. $x = \frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ एवं $y = \frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ हो तो दिखाएं कि, $x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = 16$

9. सूत्र की सहायता से गुणा करें $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$

10. यदि $x = (a+\frac{1}{a})$ एवं $y = (a-\frac{1}{a})$ तो $x^4+y^4-2x^2y^2$ का मान सूत्र की सहायता से निकालें।

11. $(4x^2+4x+1-a^2+8a-16)$ को दो वर्ग के रूप में (a^2-b^2 आकार में) व्यक्त करें।

12. $a^2 + \frac{1}{a^2} - 3$ को दो वर्ग के रूप में (a^2-b^2 आकार में) व्यक्त करें।

13. समानान्तर सरल रेखा और कटान बिन्दुओं की धारणा

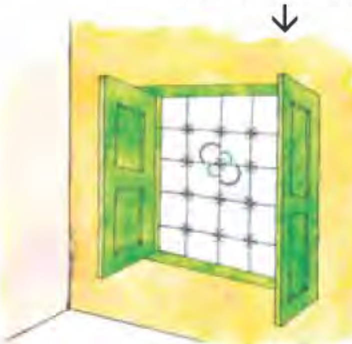
आज पूरे दिन काफी वर्षा हुई। मैं और मेरे स्कूल के कुछ मित्र स्कूल नहीं जा पाये। हम मैदान में भी खेलने नहीं जा सके।

अत: आज मैं और मेरे मित्र सब मिलकर मेरे घर के आंगन में बैठकर कलम और पेंसिल से विभिन्न प्रकार के चित्र बनायेंगे तथा कैंची से काटकर बड़े पिचबोर्ड पर चिपकाकर रखेंगे।

जया ने बनाया →

सुजय ने बनाया →

रेहाना ने हमारे बरामदा के सामने की ग्रील को बनाने की कोशिश की।



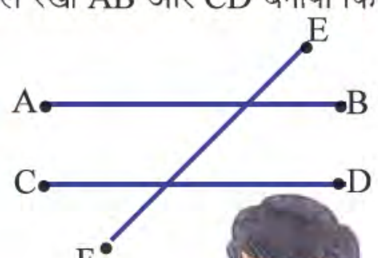
देखता हूँ कि जया द्वारा बनाये गए चित्र मुँह खुले कैंची के विपरीत तरफ एक जोड़ा करके कोण बनाते है।

इस प्रकार के कोण को क्या कहेंगे ?

दो सरल रेखा एक दूसरे को काटने पर कटान बिन्दु के विपरीत बने एक जोड़े कोण को **विपरीत कोण** कहा जाता है।

मुँह खुले कैंची में दो जोड़े विपरीत कोण देखते हैं। सुजय का बनाया गया रेल लाइन में दो रेल लाइन समानान्तर, लेकिन दूसरी एक लाइन उनको काटते हुए चली गई है। इस प्रकार के लाइन को क्या कहेंगे ?

मैं एक स्केल बैठाकर स्केल के दोनों तरफ दो समानान्तर सरल रेखा AB और CD बनाया कि EF सरल रेखा AB और CD को दो बिन्दुओं पर काटती है।

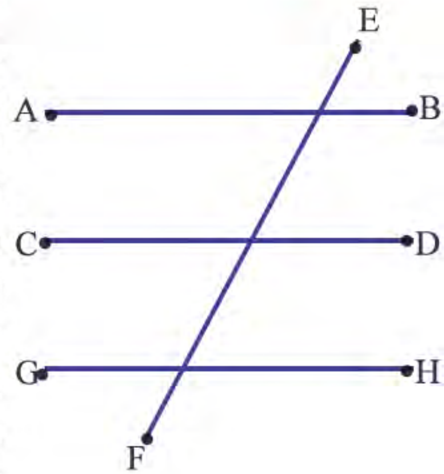


जो सरल रेखा दो या उससे अधिक सरल रेखा अलग-अलग बिन्दु पर काटती हैं उसे **छेदक या भेदक** कहा जाता है।

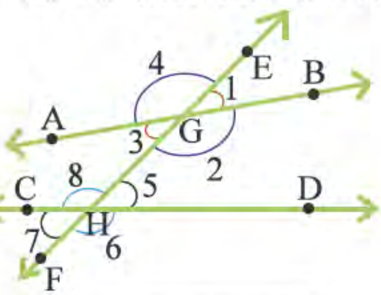
अत: इस EF सरल रेखा को AB और CD समानान्तर सरल रेखा का छेदक कहते हैं।

लेकिन दो से अधिक समानान्तर सरल रेखा की तरह खीचेंगे।

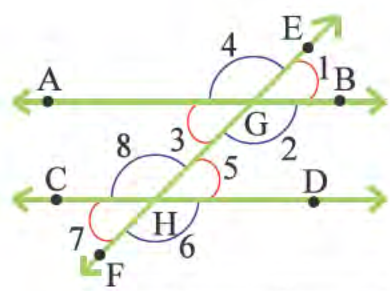
सबसे पहले एक स्केल रखकर स्केल के दोनों तरफ पेंसिल से दाग देकर AB और CD सरल रेखा खींचा। फिर उस स्केल को बैठाकर और एक स्केल CD सरल रेखा के साथ अर्थात् पहले के स्केल के एक किनारे के साथ सम्पूर्ण रूप से सटाकर बैठाया। इसके पश्चात् दूसरे स्केल के एक किनारे के बराबर पेंसिल से एक सरल रेखा GH खींचा। अब दोनों स्केल को उठा लिया। इसके पश्चात् एक स्केल से एक सरल रेखा EF इस प्रकार से खींचा। जिससे EF सरल रेखा AB, CD और GH सरल रेखा को तीन बिन्दुओं पर काटती है। सुजय की तरह बनाये गए रेल लाईन की तरह स्केल और पेंसिल से बनायें गये हमारे चित्र को रेहाना द्वारा बनाये गए ग्रील में अनेकों सरल रेखा एवं छेदक और भेदक देखते है। इससे अनेक कोण बने है। इन कोणों में सम्पर्क जानने की कोशिश करें।



अत: गार्गी और जाकिर बड़े सफेद कागज पर स्केल और पेंसिल की सहायता से दो–दो करके सरल रेखा तथा उसका कटान या भेदक बनाया।



गार्गी का चित्र



जाकिर का चित्र

गार्गी के चित्र का AB और CD सरल रेखा परस्पर समानान्तर नहीं है। गार्गी के चित्र के कोणों का नाम 1,2,3,4,5,6,7 और 8 दिया। गार्गी के चित्र के विपरीत एक जोड़ा कोण ∠1 और ∠3 है तथा अन्य एक जोड़ा विपरीत ∠2 और ∠4 है।

अन्य दो जोड़ा विपरीत कोणों का नाम लिखें— [स्वयं दिए]

मेरे चित्र में ∠2, ∠5, ∠8 और ∠3 कोण को एक GH एवं AB और CD सरल रेखा के बीच स्थित हैं उनको क्या कहेंगे ?

गार्गी के चित्र ∠2, ∠5, ∠8, और ∠3 कोण अन्तस्थ कोण है। ∠2, ∠5 और ∠3, ∠8 कटान बिन्दु के एक ही तरफ के अन्तस्थ कोण है। लेकिन ∠2, ∠8 और ∠3, ∠5 कटान बिन्दु के विपरीत दिशा के अन्तस्थ कोण है। लेकिन ∠1, ∠4, ∠6 और ∠7 बाह्य कोण है।

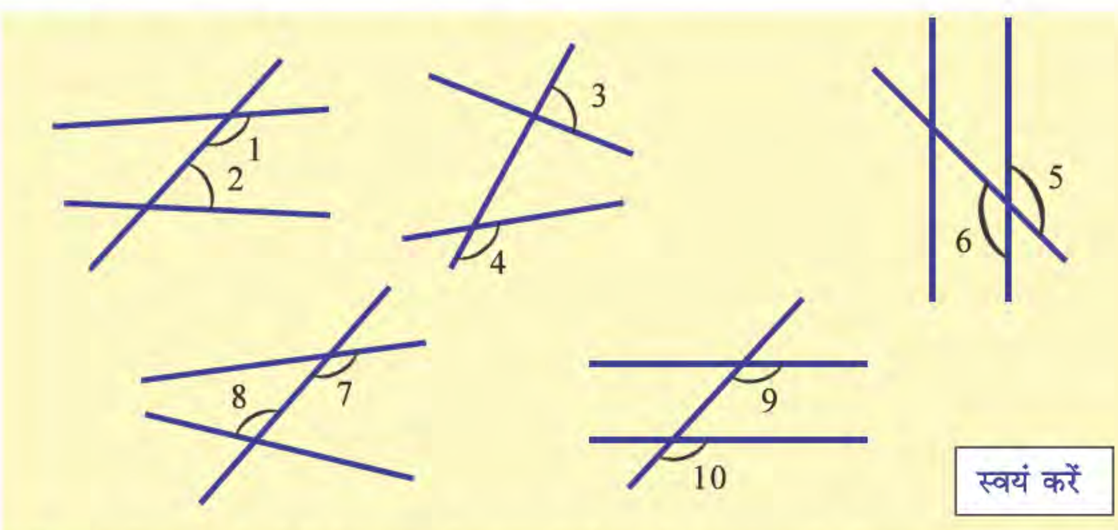
गार्गी के चित्र के ∠1 और ∠5 किसी दो छेदक के एक ही तरफ स्थित है। ∠1 बाह्य कोण और ∠5 दूरवर्ती अन्तस्थ कोण है, इनको क्या कहेंगे ?

∠1 और ∠5 अनुरूप कोण, दूसरा जोड़ा अनुरूप कोण ∠4 और ∠8 एवं और दो जोड़ा अनुरूप कोण ∠2, ∠6 और ☐; ☐

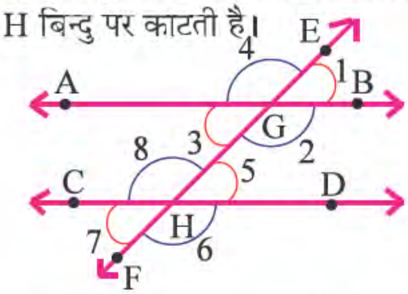
फिर मेरे चित्र के ∠3 और ∠5 अन्तस्थ दो कोण EF कटान बिन्दु के विपरीत तरफ स्थित है। इन दोनों कोणों को क्या कहेंगे ?

मेरे चित्र के ∠3 और ∠5 कोणों को एकान्तर कोण कहा जाता है। दूसरा एक जोड़ा एकान्तर कोण ∠2 और ∠8 है।

नीचे के चित्रों के जोड़ा कोणों का नाम लिखों।



जाकिर के चित्र को देखते है कि AB और CD दोनों सरलरेखा एक दूसरे की समानान्तर है तथा EF सरलरेखा दोनों सरल रेखा AB और CD को क्रमश: G और H बिन्दु पर काटती है।



जाकिर के चित्र के कोणों का नाम

∠1, ∠2, ∠3, ∠4, ∠5, ∠6, ∠7 और ∠8 है।

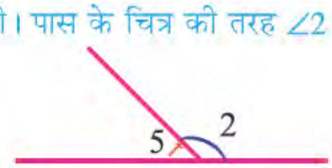
अब कैंची से कोणों को काट ले और एक के ऊपर दूसरे को मिलाकर रखे तो पाते है —

∠1 = ∠3 , ∠2 =∠4 → अर्थात् विपरीत कोण बराबर है।

∠1= ∠5 , ∠2 = ∠6 → अर्थात् ☐ कोण बराबर है।

∠2= ∠8, ∠3 = ∠5 → अर्थात् ☐ कोण बराबर है।

रेहाना इस ∠2 और ∠5 को लेकर एक मजे की बात की। पास के चित्र की तरह ∠2 और ∠5 को मिलाकर एक सरल कोण बनाई।



अर्थात् दो समानान्तर सरल रेखा के कटान बिन्दु के एक ही ओर के अन्तस्थ कोणों का योग ☐ डिग्री पाई।

बनाकर देखें — 13

जाकिर के चित्र की तरह गार्गी के चित्र के कोणों को काटकर अलग किया एवं एक के ऊपर एक कोण रखकर मिलाया क्या पाये देखें।

जब दो सरल रेखाएँ समानान्तर नहीं हो

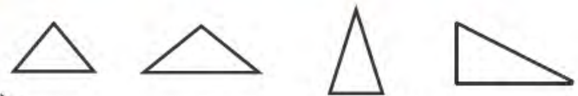
गार्गी के चित्र के कोण	कोण का प्रकार	समान / असमान
∠1 और ∠5	अनुरूप कोण	असमान
∠4 और ∠8	☐	☐
∠3 और ∠7	☐	☐
∠2 और ∠6	☐	☐
∠2 और ∠8	☐	☐
∠3 और ∠5	☐	☐
∠2 और ∠5	☐	☐
∠3 और ∠8	☐	☐
∠1 और ∠3	☐	☐
∠2 और ∠4	☐	☐
∠5 और ∠7	☐	☐
∠6 और ∠8	☐	☐
		(स्वयं करें)

जब दो सरल रेखाएँ समानान्तर हो

जाकिर के चित्र का कोण	कोण का प्रकार	समान / असमान
∠1 और ∠5	अनुरूप कोण	समान
∠4 और ∠8	☐	☐
∠3 और ∠7	☐	☐
∠2 और ∠6	☐	☐
∠2 और ∠8	☐	☐
∠3 और ∠5	☐	☐
∠2 और ∠5	☐	☐
∠3 और ∠8	☐	☐
∠1 और ∠3	☐	☐
∠2 और ∠4	☐	☐
∠5 और ∠7	☐	☐
∠6 और ∠8	☐	☐
		(स्वयं करें)

14. त्रिभुज की विशेषतायें

आयेशा ने स्केल और पेंसिल से अनेकों त्रिभुज बनाया। हेमु ने कैंची से उन त्रिभुजों को काट लिया।

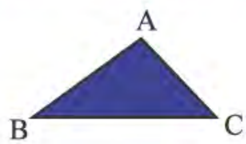


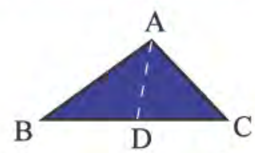
देखते है , कि प्रत्येक त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु ☐ है।

प्रत्येक त्रिभुज की भुजायें ☐ है।

प्रत्येक त्रिभुज के कोण ☐ है।

मैंने एक त्रिभुजाकार क्षेत्र लिया और मोड़कर प्रत्येक भुजा के मध्य बिन्दु को खोंजूंगा।

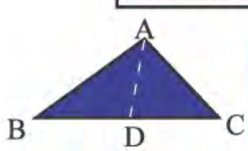




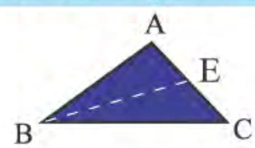
त्रिभुजाकार क्षेत्र के BC भुजा को मोड़कर B बिन्दु को C बिन्दु से मिलाया तथा BC भुजा का मध्यबिन्दु D पाया।

मैं यदि A शीर्ष बिन्दु D मध्य बिन्दु के बराबर मोड़कर खोल दिया कि देखें क्या पाते है।

AD सरल रेखा के ΔABC को क्या कहेंगे?



AD सरल रेखा , ABC त्रिभुज कि **मध्यमा** अर्थात् त्रिभुज का शीर्ष बिन्दु तथा विपरीत भुजाओं के मध्य बिन्दु का संयोग सरल रेखा त्रिभुज की मध्यमा है।



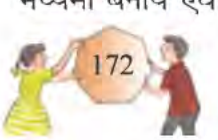
मैं कागज को मोड़कर AC भुजा का मध्य बिन्दु E और विपरीत शीर्ष बिन्दु ☐ मोड़कर मध्यमा बनायें।

अब मैं कागज मोड़कर ABC त्रिभुज के AB भुजा का मध्य बिन्दु खोजकर तृतीय मध्यमा तैयार करें और देखें कि ABC त्रिभुज की मध्यमा तीनों एक बिन्दु पर मिलते हैं या नहीं।

अर्थात्, तीनों मध्यमा ☐।

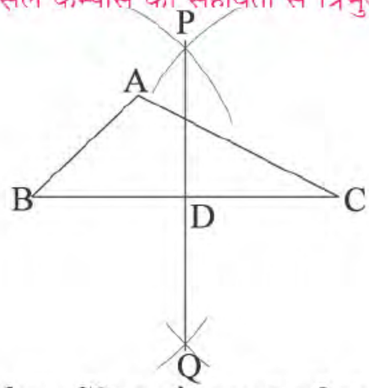
स्वयं करें— 14.1

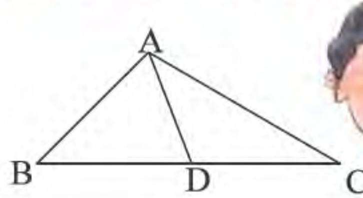
समबाहु, समद्विबाहु और बिषम बाहु त्रिभुजाकार क्षेत्रों को काटकर एक ही तरह से मोड़कर तीन मध्यमा बनायें एंव प्रत्येक त्रिभुज की मध्यमा कैसी है देखें ?



साकिर ने आयेसा की तरहा एक त्रिभुज बनाया और कागज को मोड़े बिना कम्पास और स्केल की सहायता से त्रिभुज के प्रत्येक भुजा की मध्य बिन्दु खोजने की कोशिश करें।

1 पेंसिल कम्पास की सहायता से त्रिभुज ABC की भुजा BC का मध्य बिन्दु खोजें।





(i) सर्वप्रथम पेंसिल और कम्पास की सहायता से त्रिभुज ABC की भुजा BC को बिन्दु C को केन्द्र करके BC भुजा की लम्बाई का आधा से अधिक अर्द्धव्यास लेकर BC भुजा के ऊपर और नीचे दो वृत्तचाप खींचा जो एक दूसरे को P और Q बिन्दु पर काटते है।

(ii) P और Q दोनों बिन्दुओं को जोड़ दिया। PQ, BC को D बिन्दु पर काटती है। BC का मध्य बिन्दु D पाया।

(iii) A और D दोनों बिन्दुओं को जोड़कर ABC त्रिभुज की एक मध्यमा पाया। देखते है कि तीनो मध्यमा ☐ ।

सुचेता कोण भेदकर तीन त्रिभुज बनायी। तीनों त्रिभुज स्थूलकोणी, समकोणी और अधिक कोणी है।

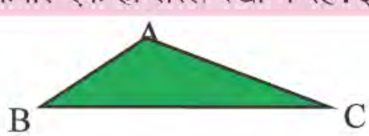
उन तीनों त्रिभुज के मध्यमाकाओं को बनाकर देखे कि वे समबिन्दु है या नहीं। [स्वयं करे]

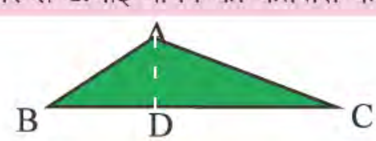
हमलोगों ने अनेकों रंगीन कागजों से त्रिभुज की रचना किये है और उन्हें काटकर अलग रखे है। अब मैंने तय किया है कि उन त्रिभुजों को एक सफेद पिचबोर्ड पर रखकर देखेंगे कि वे समबिन्दु है या नहीं।

प्रत्येक त्रिभुज को अलग-अलग आयताकार जगह रखा जायेगा। लेकिन प्रत्येक त्रिभुज के लिए कितना आयताकार क्षेत्र लगेगा? कैसे पायेंगे ?

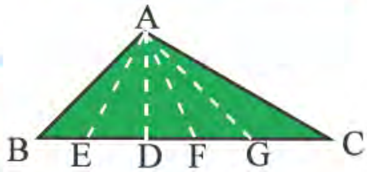
प्रत्येक त्रिभुज की ऊंचाई को मापना होगा अर्थात् प्रत्येक त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु से विपरीत भुजा लम्ब की दुरी मापना होगा।

सर्वप्रथम कागज के त्रिभुजों के शीर्ष बिन्दु A के बराबर ऐसे मोड़ा गया जिससे मोड़ के दोनों तरफ BC की ओर दो किनारे एक ही सरल रेखा में रहे। इस प्रकार से ऊँचाई मापने की कोशिश करे।





लेकिन आयशा ठीक से नहीं मोड़ पाने के कारण पाई



स्केल की सहायता से मापकर देखो AD लम्बाई सबसे कम

चाँद की सहायता से मापकर देखो $\angle ADC = 90^0$

$\therefore$ त्रिभुज ABC की ऊँचाई AD या A बिन्दु से BC भुजा पर लम्ब।

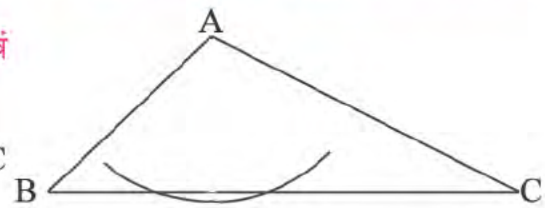
इस तरह प्रत्येक त्रिभुज की ऊँचाई स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से निकालने की कोशिश करें।

ABC त्रिभूज ☐ की उच्चता पाई। भुजा भेद त्रिभुजों को बनाया।

त्रिभुजाकार क्षेत्रों को कैंची से काटकर एवं कागज को मोड़कर प्रत्येक त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु से विपरीत भुजाओं के ऊपर तीनों लम्ब समबिन्दु है कि नहीं देखें।

हमलोग कोण भेद और भुजा भेद के अनेकों त्रिभुजों को बनाकर त्रिभुजाकार क्षेत्रों को कैंची से काट लिये। इन सभी को सफेद पिचबोर्ड पर लगाने के लिए खाली आयताकार स्थान पर रखेंगे, इसलिए प्रत्येक त्रिभुज की उच्चता स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से निकालने का प्रयास करेंगे।

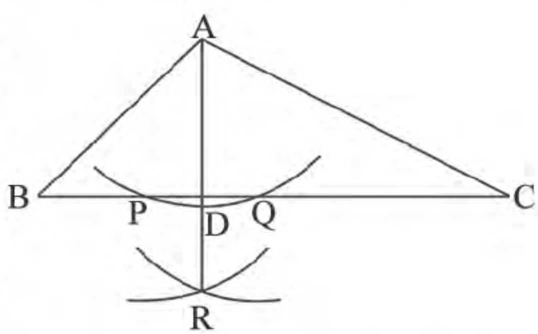
2 सर्वप्रथम पास के त्रिभुज को स्केल, पेंसिल एवं कम्पास की सहायता से ऊँचाई निकालें।



A बिन्दु से BC भुजा के ऊपर लम्ब बनायेंगे अर्थात् BC भुजा का बाह्य बिन्दु A से BC भुजा पर लम्ब खीचेंगे।

(i) सर्वप्रथम पेंसिल और कम्पास की सहायता से A बिन्दु को केन्द्र करके एक ऐसी लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर वृतचाप खींचेंगे कि वृत्तचाप BC भुजा को P और Q बिन्दु पर काटेगी।

(ii) अब पेंसिल और कम्पास की सहायता से BC भुजा के जिस तरफ A बिन्दु है उसके विपरीत तरफ P और Q बिन्दु को केन्द्र मानकर PQ की लम्बाई का आधा से अधिक लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर और दो वृतचाप खींचा जो परस्पर एक दूसरे को R बिन्दु पर काटती है। स्केल और पेंसिल की सहायता से A और R दोनों बिन्दुओं को मिलाया। AR, BC भुजा को D बिन्दु पर काटती है।



AD, त्रिभुज ABC की ऊँचाई है या A शीर्ष बिन्दु के विपरीत भुजा BC के ऊपर लम्ब है।

स्वयं करें– 14.2

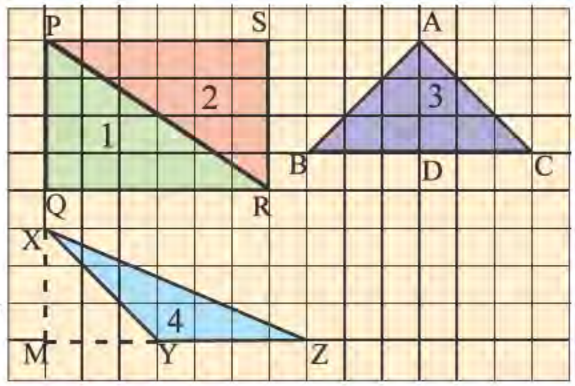
1) एक त्रिभुज की कितनी ऊँचाई पायेंगे स्वयं बनाकर देखें।

2) एक ही तरह से स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से भुजा भेद और त्रिभुज की उच्चता को पाने की कोशिश करें।

i) किसी त्रिभुज की ऊँचाई उस त्रिभुज की एक भुजा होगी। बनाकर देखें।

ii) किसी त्रिभुज की ऊँचाई और मध्यमा एक ही सरल रेखा पर होगी, बनाकर देखें।

हम सभी जब विभिन्न प्रकार के रंगो का त्रिभुज काट रहे थे, तब फिरोज ने एक कागज तैयार कर लिया। मिलि स्वयं के द्वारा बनाये गए त्रिभुज क्षेत्र को तालिका कागज के ऊपर पास के चित्र की तरह रखी एवं उसके चारो तरफ पेंसिल से दाग दे दी।



माना तालिका कागज के क्षुद्रतम वर्ग क्षेत्र की प्रत्येक भुजा की लम्बाई = 1 से०मी०।

∴ तालिका कागज के प्रत्येक क्षुद्रतम वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल = 1 वर्ग से०मी०।

चित्र में देखते है कि दोनों एक ही माप अर्थात् PQR त्रिभुजाकार क्षेत्र के बराबर PSR त्रिभुज का क्षेत्र काट लिया। समकोण त्रिभुज PQR और PSR पास के कर्ण बराबर मिलकर एक आयत क्षेत्र PQRS बनाता है। जिसकी लम्बाई 6 सें०मी० और चौड़ाई 4 से०मी० है।

लेकिन 1 नं० त्रिभुज या ΔPQR की ऊँचाई = 4 से०मी० [आधार QR भुजा]

1 नं० त्रिभुज या ΔPQR का आधार = 6 से०मी० (QR भुजा)

2 नं० त्रिभुज या ΔPSR की ऊँचाई = 4 से०मी० (SR भुजा) [जब आधार PS भुजा]

2 नं० त्रिभुज या ΔPSR का आधार = 6 से०मी० (SP भुजा)

∴ PQR त्रिभुज का क्षेत्रफल = PSR त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times$ PQRS आयत का क्षेत्रफल।

PQRS आयत का क्षेत्रफल = QR × PQ = आधार × ऊँचाई

PQR त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times$ आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{}{\underset{3}{\cancel{6}}} \times 4$ वर्ग से०मी० = 12 वर्ग से०मी०

छक कागज से देखते हैं, $\triangle PQR$ का क्षेत्रफल = 12 वर्ग से०मी० (प्राय:) [10 पूरा घर 2 आधा से अधिक वर्ग घर एवं 2 आधे से कम वर्ग घर जुड़े हैं]।

∴ त्रिभुज के आकृति का क्षेत्रफल की ऊँचाई और आधार की लम्बाई के ऊपर निर्भर करते हैं।

मैं 3 नं० त्रिभुज की आकृति के क्षेत्र अर्थात् ABC त्रिभुज का आधार और ऊँचाई मापें।

$\triangle ABC$ का आधार BC = 6 से०मी०।

उच्चता AD = ☐ से०मी०।

∴ $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{3}{\cancel{6}} \times 3$ वर्ग से०मी० = 9 वर्ग से०मी०

प्रयोग कागज के घरों को गिनकर पाते हैं $\triangle ABC$ त्रिभुज का क्षेत्रफल = 9 वर्ग से०मी० [6 पूर्ण वर्गाकार घर और 6 आधे वर्ग का घर]

4 नं० त्रिभुज क्षेत्र अर्थात् XYZ त्रिभुज का आधार (YZ) = ☐ से०मी०

एवं XYZ त्रिभुज की ऊँचाई (XM) = ☐ से०मी०

∴ XYZ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

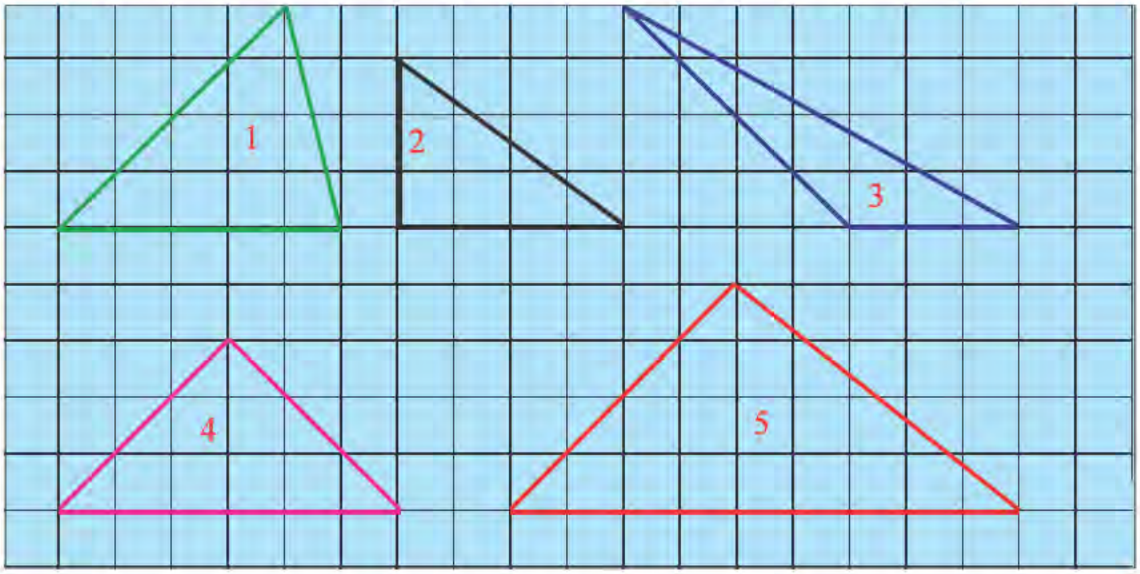
$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{2}{\cancel{4}} \times 3$ वर्ग से०मी० = 6 वर्ग से०मी०।

प्रयोग कागज के घरों को गिनकर पाते हैं XYZ त्रिभुज का क्षेत्रफल = 6 वर्ग से०मी०(प्राय:)।

क्योंकि ΔXYZ में 3 सम्पूर्ण वर्ग, 1 आधा से अधिक वर्ग 4 आधे से कम वर्ग और 2 आधे वर्ग घर जुड़े हैं।

∴ XYZ त्रिभुज का क्षेत्रफल प्राय: 6 वर्ग से०मी० के बराबर पाया।

नीचे के छक कागज के घर को गिनकर त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना होता है देखें एवं त्रिभुजों के आधार और ऊँचाई को मापें एवं $\boxed{\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}$ का मान निर्णय करें तथा देखें कि दोनों त्रिभुज का क्षेत्रफल बराबर होते हैं या नहीं।

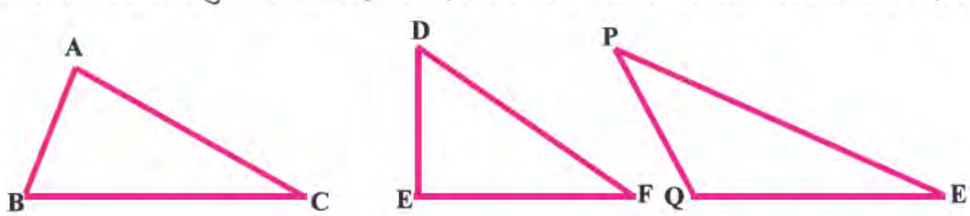


बनाकर देखें—14

1. (i) एक त्रिभुज की कितनी मध्यमा होती है लिखो।
   (ii) एक त्रिभुज की कितनी मध्यमाएँ कितनी बिन्दु पर काटती है लिखो।
   (iii) एक त्रिभुज की कितनी ऊँचाई पायेंगे लिखो।
   (iv) एक त्रिभुज की ऊँचाई कितनी बिन्दुओं पर काटती है लिखो।
   (v) किसी त्रिभुज की प्रत्येक ऊँचाई और मध्यमा एक ही है लिखो।

2. कोण व भुजा के अनुसार त्रिभुज बनाओ और उनकी मध्यमाओं को बनाकर देखें त्रिभुज की मध्यमा पेंसिल कम्पास की सहायता लें।

3. नीचे के प्रत्येक त्रिभुज की लम्बाई मापें (स्केल और पेंसिल-कम्पास की सहायता लें)।



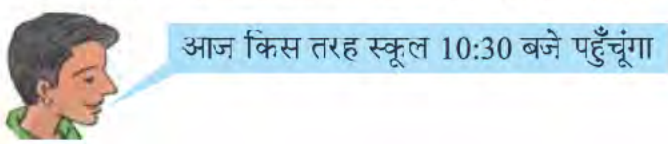
4. कोण के अनुसार त्रिभुज बनाओ। त्रिभुज की प्रत्येक ऊँचाई सर्वदा त्रिभुज के अंदर रहेगी या नहीं देखें (स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता लें)

15. समय और दूरी

हमारे स्कूल में प्रतिदिन सुबह 10 बजकर 40 मिनट पर प्रार्थना शुरू होती है। हमलोग प्रतिदिन 10 बजकर 30 मिनट पर स्कूल पहुँचकर अपने श्रेणी में किताब का थैला रखकर प्रार्थना के लिए स्कूल के बरामदा में लाईन से खड़ा हो जाते हैं।

मैं प्रतिदिन सुबह 10:05 बजे घर से निकालकर साइकिल से स्कूल 10: 30 बजे पहुँच जाता हूँ। अर्थात् मैं (10 बजकर 30 मिनट – 10 बजकर 05 मिनट = 25 मिनट में साइकिल से स्कूल पहुँचता हूँ।

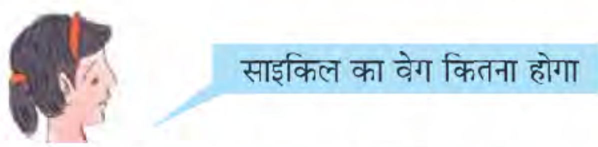
लेकिन आज घर से निकलते वक्त 5 मिनट देर हो गयी। अर्थात् सुबह 10: 10 बजे घर से निकला।



साइकिल और तेज चलाना होगा अर्थात साइकिल का वेग कुछ बढ़ाना पड़ेगा।

अत: (10 : 30 बजे – 10 : 10 बजे) = 20 मिनट में स्कूल पहुँचना होगा।

घर से स्कूल की दूरी 4 कि०मी० = 4000 मीटर



इकाई समय में कोई वस्तु निर्दिष्ट दिशा में जितनी दूरी जाती है वही उस वस्तु की गति या वेग है।

प्रत्येक दिन मेरे साइकिल का वेग/घंटा कितना था, देखें—

समय (मिनट)	दूरी (मीटर)
25	4000
60	?

गति समान रहने पर अधिक समय में ज्यादा दूरी जायेगी। अत: समय और दूरी सरल समानुपात में है।

$\therefore$ 25 : 60 :: 4000 : *

$\therefore$ (*) अर्थात् चतुर्थ समानुपाती = $\dfrac{\overset{160}{\cancel{4000}}\times 60}{\cancel{25}} = 9600$ $\therefore$ वेग = 9600 मीटर/घंटा

दूसरे तरीके से, 25 मिनट में जाते है 4000 मीटर

1 मिनट में जाते है $\dfrac{4000}{25}$ मीटर

60 मिनट में जाते है = $\dfrac{\overset{160}{\cancel{4000}}}{\cancel{25}} \times 60 = 9600$ मीटर

$\therefore$ प्रतिदिन मेरे साइकिल का वेग था घंटा में 9600 मीटर या 9600 मीटर/घंटा

ठीक समय पर स्कूल पहुँचने के लिए आज मेरी साइकिल का वेग करना होगा, देखे—

साइकिल से 20 मिनट में 4000 मीटर गया था।

गणित की भाषा में पाते है,

समय (मिनट)	दूरी (मीटर)
20	4000
60	?

वेग समान रहने पर जब समय बढ़ेगा तो दूरी भी बढ़ेगी। अतः समय और दूरी सरल समानुपाती है।

20 : 60 :: 4000 : *

$\therefore$ (*) अर्थात चतुर्थ समानुपाती = $\dfrac{\overset{200}{\cancel{4000}}\times 60}{\cancel{20}} = 12000$

$\therefore$ साइकिल का वेग प्रतिघंटा 12000 मीटर या 12000 मीटर/घंटा

साइकिल का वेग घंटा में कितना बढ़ाना पड़ा हिसाब करें।

12000 मीटर/घंटा 9600 मीटर/घंटा = 2400 मीटर/घंटा

$\therefore$ हमारे साइकिल का वेग घंटा में 2400 मीटर बढ़ाना पड़ा।

आज शाम को मेरी बहन ऐसी गति से साईकिल चलाकर बाजार गई कि 30 मिनट में पहुँच गई।

1 यदि घर से बाजार की दूरी 4050 मीटर हो, तो बाजार जाते समय बहन के साइकिल का वेग प्रति मिनट कितना था।

गणित की भाषा में पाते है,

समय (मिनट)	तय दूरी (मीटर)
30	4050
1	?

30 मिनट में जाता है 4050 मीटर

1 मिनट में जाता है $\frac{\overset{135}{\cancel{4050}}}{\cancel{30}}$ मीटर = 135 मीटर

∴ बहन के साइकिल का वेग 135 मीटर/मिनट

दूसरे तरीके से, 30 : 1 :: 4050 : *

∴ (*) या चतुर्थ समानुपाती = $\frac{1\times\overset{135}{\cancel{4050}}}{\cancel{30}}$ = 135

बहन की साइकिल का वेग = 135 मीटर/मिनट

(गति या वेग समान रहने पर समय और दूरी सरल समानुपाती होते है)

देखते है, तय दूरी को प्रयोजनीय समय से भाग देने पर गति/वेग पाया जाता है।

∴ वेग/गति = $\frac{\text{तय दूरी}}{\text{प्रयोजनीय समय}}$

2 लेकिन बाजार से घर लौटते समय बहन 150 मीटर / मिनट वेग से साइकिल चलाकर घर आई। अत: बाजार से घर आने में बहन को कितना समय लगा, हिसाब करें।

गणित की भाषा में पाते है,

तय दूरी (मीटर)	समय (मीनट)
150	1
4050	?

150 मीटर जाती है 1 मिनट में

1 मीटर जाती है $\frac{1}{150}$ मिनट में

4050 मीटर जाती है $\frac{\cancel{4050}^{27}}{\cancel{150}} = 27$ मिनट

दूसरे तरीके से

वेग समान रहने पर अधिक दूरी तय करने में अधिक समय लगता है। अत: समय और दूरी सरल समानुपाती है।

$150 : 4050 :: 1 : *$

चतुर्थ समानुपाती ($*$) = $\frac{\cancel{4050}^{27} \times 1}{\cancel{150}} = 27$ $\therefore$ 27 मिनट समय लगा।

अब देखते है कि तय दूरी में वेग से भाग देने पर प्रयोजनीय समय मिलता है।

$\therefore$ प्रयोजनीय समय = $\frac{\text{तय दूरी}}{\text{वेग}}$

3 लेकिन 150 मीटर/मिनट वेग से साइकिल चलाने पर 25 मिनट में कितनी दूरी जा पायेंगे, हिसाब करें।

समय (मिनट)	दूरी (मीटर)
1	150
25	?

वेग समान रहने पर समय और दूरी सरल समानुपाती है।

$1 : 25 :: 150 : *$

($*$) अथवा चतुर्थ समानुपाती = $\frac{25 \times 150}{1} = 3750$; $\therefore$ 25 मिनट में 3750 मीटर दूरी जायेगी।

दूसरे तरीके से, 1 मिनट में जाती है 150 मीटर

25 मिनट में जाती है 150×25 मीटर = 3750 मीटर

देखते है कि प्रयोजनीय समय को गति से गुणा करने पर तय दूरी पायेंगे।

$\therefore$ तय दूरी = वेग × प्रयोजनीय समय

स्वयं करे। नीचे के तालिका को किसी भी पद्धति से हिसाब करके पूरा करने की कोशिश करें।

तय दूरी	प्रयोजनीय समय	वेग
120 कि.मी.	5 घंटा	
276 कि.मी.	6 घंटा	
18 कि.मी.	1 घंटा	

तय दूरी	वेग	प्रयोजनीय समय
1600 मी.	32मी./मिनट	
25 कि.मी.	80 मी./से०	
52 कि.मी.	1.3कि.मी./मि.	

वेग	प्रयोजनीय समय	तय दूरी
45कि.मी./घं.	1.5 घंटा	
165 मी./मि.	24 मिनट	
5 कि.मी./घं.	10 मिनट	

आज रविवार है। मैं सुबह जल्दी से उठकर बगान का कुछ काम करके जल्दी–जल्दी 160 मीटर/मिनट के वेग से साइकिल चलाकर अपने मित्र परेश के घर गया। परेश का घर हमारे घर से 2.4 कि०मी० दूर है। आज मैं और परेश अनूप सर को लाने के लिए स्टेशन जायेंगे।

4 लेकिन परेश के घर जाने के बाद मेरी साइकिल खराब हो गई। अत: मैं एवं परेश रिक्शा से स्टेशन गये। मैं साइकिल से परेश के घर जितने समय में गया था उतना ही समय परेश के घर से स्टेशन जाने में लगा। रिक्शा का वेग 150 मीटर प्रति मिनट था।

परेश के घर से स्टेशन की दूरी कितना है, निकाले।

गणित की भाषा में समस्या हुई—

वेग (मीटर/मिनट)	दूरी (मीटर)
160	$2.4 \times 1000 = 2400$
150	?

वेग बढ़ाने या कम करने पर एक ही समय में अधिक दूरी या कम दूरी तय करेंगे।

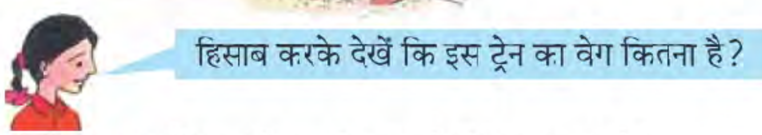
अत: गति और दूरी सरल अनुपात में है।

$\therefore 160 : 150 :: 2400 : *$

$\therefore$ (*) या चतुर्थ समानुपाती = $\frac{150 \times \cancel{2400}^{\cancel{30}\ 15}}{\cancel{160}_{\cancel{2}}} = 2250$

$\therefore$ परेश के घर से स्टेशन की दूरी 2250 मीटर है।

5 लेकिन स्टेशन पहुँचकर देखा कि एक 75 मीटर लम्बी ट्रेन कुछ क्षण के बाद 4.5 सेकेण्ड में परेश को पार करके चली गई।



देखते है ट्रेन 4.5 सेकेण्ड में अपनी लम्बाई को पार करती है।

गणित की भाषा में, समस्या हुई—

समय (सेकेण्ड)	दूरी (मीटर)
4.5	75
1	?

वेग एक ही रहने पर समय और दूरी सरल समानुपाती है ∴ 4.5 : 1 :: 75 : ?

$\therefore$ दूरी $= \frac{75 \times 1}{4.5}$ मीटर $= \overset{5}{\cancel{75}} \times \frac{10}{\underset{3}{\cancel{45}}}$ मीटर

$= \frac{50}{3}$ मीटर $= 16\frac{2}{3}$ मीटर

$\therefore$ ट्रेन का वेग $16\frac{2}{3}$ मीटर/सेकेण्ड

लेकिन उस ट्रेन का वेग घंटा में कितना होगा देखे।

ट्रेन 1 सेकेण्ड में जाती है $\frac{50}{3}$ मीटर

ट्रेन 60 × 60 सेकेण्ड में जाती है $\frac{50 \times 60 \times \overset{20}{\cancel{60}}}{\cancel{3}}$ मीटर = 60000 मीटर

= ☐ मीटर

$\therefore$ ट्रेन का वेग प्रति घंटा 60 कि०मी०।

6 यदि वह ट्रेन परेश को पार न करके 125 मीटर पुल को उसी वेग से पार करेगी तो कितना समय लगेगा।

जब ट्रेन किसी पुल को पार करेगी तो ट्रेन को पार करना होगा,

ट्रेन की लम्बाई + पुल की लम्बाई। अर्थात् ☐ मीटर + 125 मीटर

= 200 मीटर

ट्रेन का वेग पाये है ☐ / सेकेण्ड

गणित की भाषा में समस्या हुई,

दूरी (मीटर)	समय (सेकेण्ड)
$\frac{50}{3}$	1
200	*

वेग एक ही रहने पर समय और दूरी सरल समानुपाती होगें।

∴ ☐ : ☐ :: ☐ : *

$\therefore$ समय = $\dfrac{200}{\frac{50}{3}}$ सेकेण्ड = $\dfrac{\overset{4}{\cancel{200}} \times 3}{\cancel{50}}$ सेकेण्ड

= 12 सेकेण्ड

दूसरे तरीके से,

$\frac{50}{3}$ मीटर जाती है 1 सेकेण्ड में

1 मीटर जाती है $1 \div \frac{50}{3}$ सेकेण्ड = $\frac{1 \times 3}{50}$ सेकेण्ड

200 मीटर जाती है = $\overset{4}{\cancel{200}} \times \frac{3}{\cancel{50}}$ सेकेण्ड = 12 सेकेण्ड

अतः ट्रेन 125 मीटर लम्बे पुल को 12 सेकेण्ड में पार करेगी।

7 स्टेशन पर देखता हूँ 200 मीटर और 240 मीटर लम्बी दो ट्रेन आस पास के दो लाइनों पर 42.5 कि॰मी॰ तथा 36.7 कि॰मी॰ प्रति घंटा के वेग से एक दूसरे की तरफ आ रही है।

हिसाब करके देखें कि दोनों ट्रेन मिलने के बाद कितने समय में एक दूसरे को पार करेगी।

दोनों ट्रेन मिलने के पश्चात् एक दूसरे को पार करेगी अर्थात् दोनों ट्रेन एक साथ अपनी लम्बाई के बराबर दूरी तय करेगी।

∴ दोनों ट्रेन दूरी तय करेगी 200 मी. + 240 मी.

= 440 मीटर

पहली ट्रेन का वेग 42.5 कि॰मी॰ / घंटा = ☐ मीटर / घंटा।

दूसरी ट्रेन का वेग 36.7 कि॰मी॰ / घंटा = ☐ मीटर / घंटा।

पहली ट्रेन और दूसरी ट्रेन एक दूसरे के विपरीत चलने पर 1 घंटा में जायेगी।

42500 मीटर + 36700 मीटर = ☐ मीटर

अब गणित की भाषा में समस्या हुई—

दूरी (मीटर)	समय (सेकेण्ड)
79200	60 × 60
440	?

दूरी और समय सरल समानुपाती है

∴ ☐ : ☐ : : 60 × 60 : *

अतः समय लगेगा = 20 सेकेण्ड

∴ ट्रेन एक दूसरे को 20 सेकेण्ड में पार करेगी

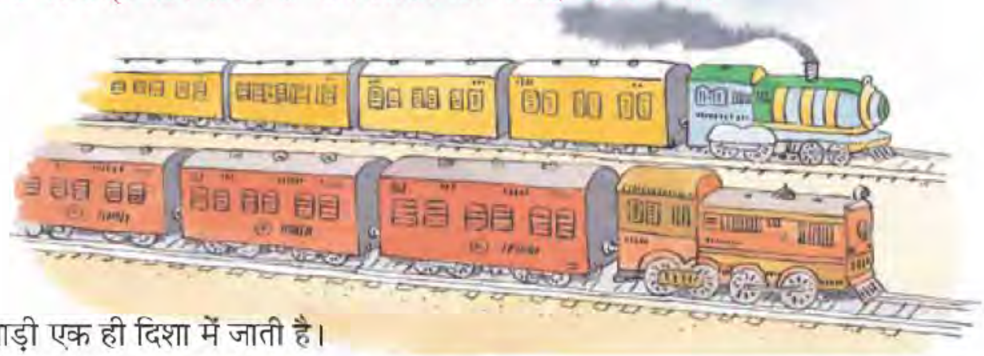
दूसरे तरीके से,

79200 मीटर जाती है 60 × 60 सेकेण्ड

1 मीटर जाती है $\frac{60 \times 60}{79200}$ सेकेण्ड

440 मीटर जाती है = $\frac{\overset{10}{\cancel{60}} \times \overset{10}{\cancel{60}} \times \overset{20}{\cancel{440}}}{\underset{\cancel{13200}\ \cancel{2200}\ \cancel{100}\ \cancel{10}}{\cancel{79200}}}$ = 20 सेकेण्ड

8 यदि दो गाड़ियाँ अलग-अलग लाईन पर एक ही दिशा में जाती तो प्रथम गाड़ी द्वितीय गाड़ी से मिलने के पश्चात् कितने समय के बाद उसको पार करती, हिसाब करें।



दोनों गाड़ी एक ही दिशा में जाती है।

प्रथम गाड़ी दूसरी गाड़ी से 1 घंटा में अधिक जाती है

42500 मीटर – 36700 मीटर = 5800 मीटर

दोनों गाड़ी मिलने के बाद पहली गाड़ी को दूसरी गाड़ी से पार करने के लिए कुल दूरी तय करना होगा

☐ मीटर + ☐ मीटर = 440 मीटर

गणित की भाषा में समस्या हुई,

दूरी (मीटर)	समय (सेकेण्ड)
5800	60 × 60
440	?

समय और दूरी सरल समानुपात में है,

∴ 5800 : 440 : : 60 × 60 : ?

∴ प्रजोयजनीय समय = $\frac{440 \times 60 \times 60}{5800}$ सेकेण्ड (अंश में 60 कटकर 6 तथा 60 कटकर 3; हर में 5800 कटकर 290, 290 कटकर 29)

$\frac{7920}{29}$ सेकेण्ड = $273\frac{3}{29}$ सेकेण्ड

स्वयं करे—15.1

स्टेशन मास्टर से मिलने के पश्चात् मैं और परेश मास्टर साहब के साथ एक टैक्सी से कार्यक्रम की जगह पर 18 मिनट में आए। टैक्सी का वेग 35 कि०मी०/घंटा हो तो स्टेशन से उस कार्यक्रम स्थल की दूरी कितनी है, हिसाब करें।

बनाकर देखें— 15

1. मैं शनिवार को 2 घंटा में 13 कि०मी० / घंटा के वेग से साइकिल द्वारा कुछ दूर गया। लेकिन रविवार को उस एक ही समय में 11 कि०मी० / घंटा के वेग से साइकिल द्वारा कुछ दूर गया। शनिवार व रविवार में से किस दिन 2 घंटा साइकिल चलाकर कितना अधिक दूरी तय किया। यहाँ समय को स्थिर रखकर वेग और तय दूरी के बीच सम्पर्क स्थापित करें (सरल या व्यस्त समानुपात)।

2. मैं सोमवार को 12 कि०मी०/ घंटा के वेग से साइकिल चलाकर बाजार गया। लेकिन मंगलवार 15 कि०मी०/घंटा के वेग से साइकिल चलाकर बाजार गया। यदि घर से बाजार की दूरी 2 कि०मी० हो तो किस दिन बाजार जाने में कम समय लगा तथा कितना समय लगा। यहाँ दूरी स्थिर रखकर वेग के साथ प्रयोजनीय समय में सम्पर्क स्थापित करें। (सरल या व्यस्त अनुपात)।

3. वेग को स्थिर रखकर समय के साथ तय दूरी के बीच सम्पर्क खोजें (स्वयं कहानी बनाकर तैयार करें और सम्पर्क खोजे)।

4. मैं बस से 12 कि०मी० 40 मिनट में गया। बस का वेग निर्णय करें।

5. 100 मीटर लम्बी एक ट्रेन 60 कि०मी०/घंटा के वेग से एक पेड़ को कितने समय में पार करेगी। बताओं।

6. समान वेग से एक टैक्सी 6 घंटा 12 मिनट 217 कि०मी० जाती है। 273 कि०मी० जाने में टैक्सी का कितना समय लगेगा। (सम्पर्क का उल्लेख करो)।

7. आज हमारे मुहल्ले के अनयदा अपनी मोटर साइकिल से 2 घंटा 5 मिनट में 100 किमी० दूरी तय किए। लेकिन शिबूदा वही दूरी अपनी साइकिल से 6 घंटा 40 मिनट में गए। मोटर साइकिल और साइकिल के वेग का अनुपात निकाले।

8. समान वेग से चलकर एक मालगाड़ी 2 घंटा 45 मिनट में 49.5 कि०मी० दूर एक स्टेशन पहुँची। 58.5 कि०मी० दूर स्थित एक स्टेशन पर पहुँचने के लिए उस मालगाड़ी को कितना समय लगेगा।

9. मेरे छोटे चाचा घर से मोटर साइकिल द्वारा पाँचला गये तथा 1 घंटा काम करके घर आ गए। इसमें उन्हें कुल 3 घंटा 30 मिनट समय लगा। यदि यातायात में मोटर साइकिल का वेग 40 कि०मी०/घंटा हो तो घर से पाँचला की दूरी कितनी है।

10. एक बस सुबह 7 बजकर 30 मिनट पर कोलकाता से रवाना होकर बिना रूके दोपहर 12 बजे दीघा पहुँची। यदि बस का वेग 45 कि०मी०/घंटा हो तो कोलकाता से दीघा की दूरी कितनी होगी।

11. 70 मीटर लम्बी एक ट्रेन का वेग 75 कि०मी०/घंटा है, तो वह 105 मी० लम्बे प्लेटफार्म को कितने समय में पार करेगी।

12. 90 मीटर लम्बी एक रेलगाड़ी एक खम्बे को 25 सेकेण्ड में पार करती है। तो रेलगाड़ी का वेग निकाले।

13. 250 मीटर लम्बे एक पुल को 150 मीटर लम्बी एक गाड़ी 30 सेकेण्ड में पार करती है। तो वह गाड़ी 130 मीटर प्लेटफार्म को कितने समय में पार करेगी।

14. एक ट्रेन के यात्री ने देखा की ट्रेन को एक प्लेटफार्म पार करने में 15 सेकेण्ड लगा। ट्रेन की गति यदि 60 कि०मी०/घंटा हो तो प्लेटफार्म की लम्बाई कितनी होगी।

15. एक रेलगाड़ी 4 सेकेण्ड में एक टेलीग्राफ पोस्ट को तथा 20 सेकेण्ड 264 मी० लम्बे एक पुल को पार करती है इस ट्रेन की लम्बाई तथा वेग कितना है।

16. एक ट्रेन 210 मीटर एवं 122 मीटर दो पुलों को क्रमश: 25 सेकेण्ड और 17 सेकेण्ड में पार करती है तो ट्रेन की लम्बाई तथा वेग कितना है?

17. 48 कि०मी० प्रति घंटा वेग से 100 मीटर लम्बी एक ट्रेन 21 सेकेण्ड में पहाड़ के भीतर स्थित एक सुरंग को पार करती है। सुरंग की लम्बाई कितनी है।

18. एक ट्रेन 150 मी० लम्बे प्लेटफार्म पर खड़े एक आदमी को 10 सेकेण्ड में तथा प्लेटफार्म को 22 सेकेण्ड में पार करती है तो ट्रेन की लम्बाई तथा वेग निकाले।

19. ______ मीटर और ______ लम्बी दो गाड़ियाँ दो लाईनों पर क्रमश: ______ कि०मी०/घंटा तथा ______ किमी०/घंटा के वेग से एक दूसरे की तरफ आ रही है। मिलने के बाद कितने समय में दोनों गाड़ियाँ एक दूसरे को पार करेगी। (स्वयं संख्या बैठाओ)

20. 250 मी० लम्बी एक मालगाड़ी 33 कि०मी०/घंटा के वेग से आ रही है। पीछे से एक दूसरी लाईन पर 200 मीटर लम्बी एक मेल गाड़ी 60 कि०मी०/घंटा के वेग से आकर मालगाड़ी को कितने समय में पार कर जायेगी।

16. द्विस्तंभ लेख

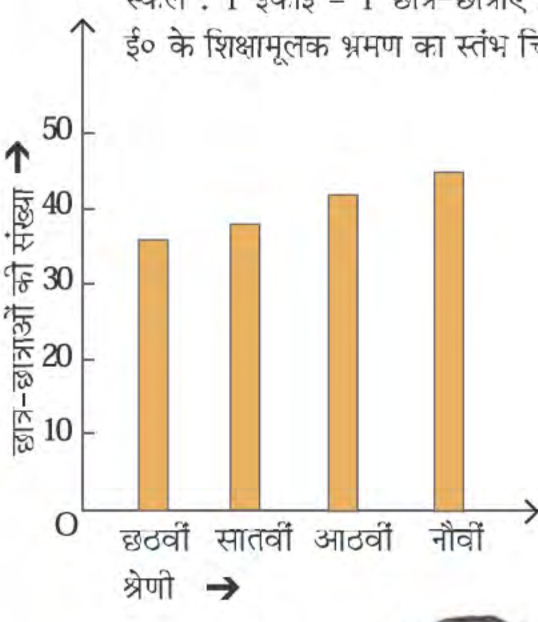
प्रत्येक वर्ष की तरह इस साल भी हमारे स्कूल से शिक्षामूलक भ्रमण की व्यवस्था की गई है।

इस वर्ष भी छठवीं, सातवीं, आठवीं तथा नौवीं श्रेणी के छात्र-छात्रायें भ्रमण के लिए जायेगी। मैं और सुमिता इस वर्ष किस कक्षा से कितने छात्र-छात्रायें जायेगी उसका एक तालिका बनायेंगें और स्तम्भ चित्र बनायेंगें।

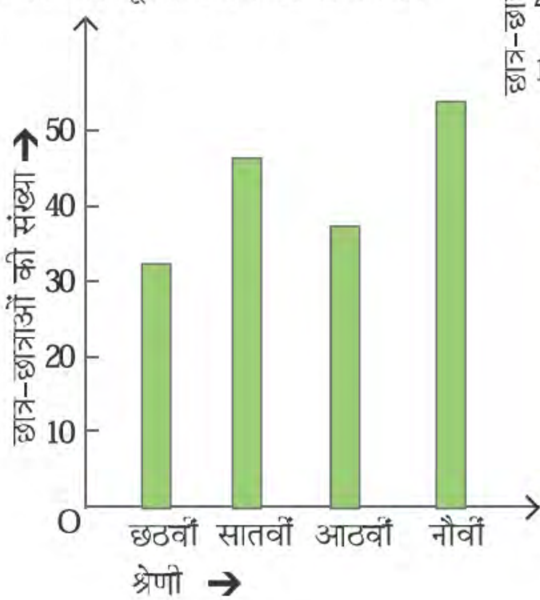
2013 ई० में शिक्षामूलक भ्रमण में जाने वालों की संख्या —

छठवीं श्रेणी — 36 लोग
सातवीं श्रेणी — 38 लोग
अष्टम श्रेणी — 42 लोग
नवम श्रेणी — 45 लोग

स्केल : 1 इकाई = 1 छात्र-छात्राएँ 2013 ई० के शिक्षामूलक भ्रमण का स्तंभ चित्र



स्केल : 1 इकाई = 1 छात्र-छात्राएँ 2012 ई० के शिक्षामूलक भ्रमण का स्तंभ चित्र



2012 के स्तंभ चित्र से क्या-क्या जाने लिखे —

1) 2012 ई० में भी शिक्षामूलक भ्रमण में छठवीं, सांतवीं, आठवीं और नौवीं श्रेणी के छात्र-छात्रायें गए थे।

2) 2012 वर्ष में छठवीं श्रेणी के छात्र-छात्राओं की संख्या 40 से कम थी।

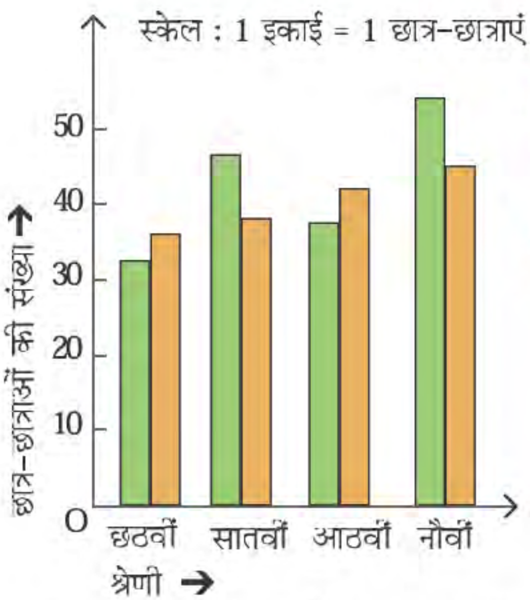
3) 2012 वर्ष में सांतवीं श्रेणी के छात्र-छात्राओं की संख्या प्राय: ☐ के आस-पास थी।

4) 2012 वर्ष में आठवी श्रेणी के छात्र-छात्राओं की संख्या प्राय: 30 और ☐ के बीच थी।

5) 2012 वर्ष में नौवीं श्रेणी के छात्र-छात्राओं की संख्या प्राय: ☐ के आस-पास थी।

1 लेकिन 2012 और 2013 वर्ष के शिक्षामूलक भ्रमण में छात्र-छात्राओं की तुलना और भी सहज तरीके से कैसे किया जाय।

नीचे के चित्र देखें और भी सहज तुलना करने की चेष्टा करें।



इस चित्र से सहज ही समझते है कि 2013 ई० में 2012 ई० की तुलना में छठवीं श्रेणी और आठवीं श्रेणी के भ्रमण वाले छात्र-छात्राओं की संख्या बढ़ी है, लेकिन सातवीं श्रेणी और नौवीं श्रेणी के भ्रमण में जाने वाले छात्र-छात्राओं की संख्या कम हुई है।

लेकिन इस प्रकार के चित्र को क्या कहेंगे?

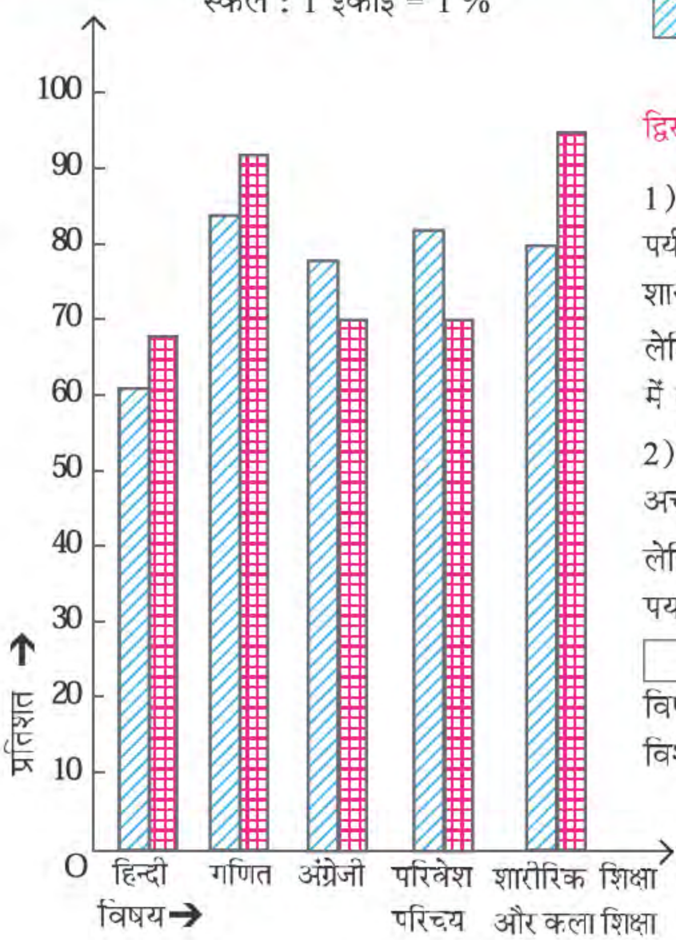
इस दो स्तंभ चित्र को पास-पास बनाकर दो तथ्यों की सहज ही तुलना करने के लिए जो चित्र बनायें है, इसे द्विस्तंभ लेख (Double Bar Graph) कहा जाता है।

2 मेरी बहन पांचवी कक्षा में पढ़ती है, मैं अपनी बहन के दो पर्यायक्रम मूल्यांकन में पाये नम्बरों के प्रतिशत को द्विस्तंभ लेख चित्र बनाया एवं बहन ने किस-किस विषय में और अच्छा फल प्राप्त किया है। किस-किस विषय में और अच्छा करने की जरुरत है उसे द्विस्तंभ चित्र से समझने की कोशिश करें।

विषय	हिन्दी	गणित	अंग्रेजी	परिवेश परिचय	शारीरिक शिक्षा और कला शिक्षा
प्रथम पर्यायक्रम मूल्यांकन	61 %	84 %	78 %	82 %	80 %
द्वितीय पर्यायक्रम मूल्यांकन	68 %	92 %	70 %	70 %	95 %

स्केल : 1 इकाई = 1 %

प्रथम द्वितीय



द्विस्तंभ लेख चित्र से देखते है —

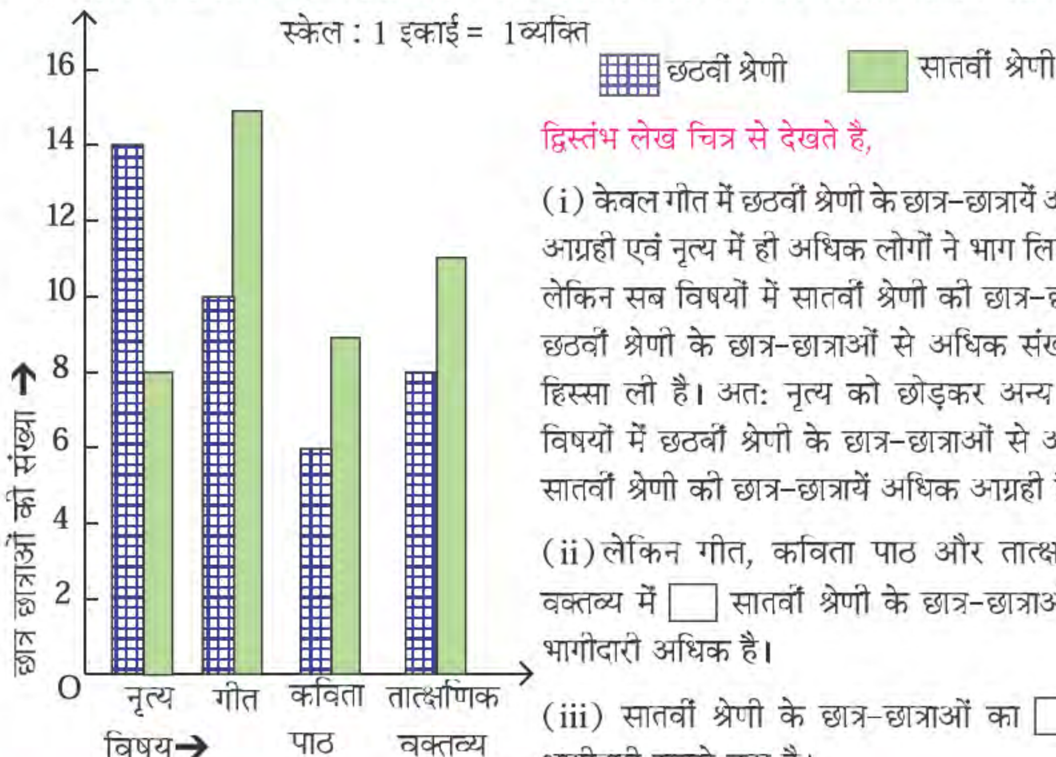
1) बहन प्रथम पर्यायक्रम से द्वितीय पर्यायक्रम मूल्यांकन में हिन्दी, गणित और शारीरिक शिक्षा में अच्छा फल पायी है। लेकिन अंग्रेजी और परिवेश परिचय विषय में खराब फल की है।

2) द्वितीय पर्यायक्रम मूल्यांकन में सबसे अच्छा ______ विषय में हुआ है। लेकिन प्रथम पर्यायक्रम परीक्षा से द्वितीय पर्यायक्रम परीक्षा में सबसे खराब फल ______ विषय में है। अत: बहन को अन्य विषय में से अंग्रेजी और परिवेश परिचय में विशेष रूप से तैयारी की जरुरत है।

3 हमारे स्कूल में नृत्य, गीत, कविता पाठ और तात्क्षणिक वक्तव्य का कार्यक्रम होगा। मैं और सहाना ने छठवीं एवं सातवीं श्रेणी के भाग लेने वाले छात्र-छात्राओं की एक सूची बनायी।

विषय	नृत्य	गीत	कविता पाठ	तात्क्षणिक वक्तव्य
षष्ठ श्रेणी के छात्र-छात्राओं की संख्या	14	10	6	8
सप्तम श्रेणी के छात्र-छात्राओं की संख्या	8	15	9	11

मैं एक द्विस्तंभ लेख चित्र के द्वारा दोनों श्रेणी के छात्र-छात्राओं को किस विषय में विशेष आग्रह है उसे दिखाये।



द्विस्तंभ लेख चित्र से देखते है,

(i) केवल गीत में छठवीं श्रेणी के छात्र-छात्रायें अधिक आग्रही एवं नृत्य में ही अधिक लोगों ने भाग लिया है। लेकिन सब विषयों में सातवीं श्रेणी की छात्र-छात्रायें छठवीं श्रेणी के छात्र-छात्राओं से अधिक संख्या में हिस्सा ली है। अत: नृत्य को छोड़कर अन्य सभी विषयों में छठवीं श्रेणी के छात्र-छात्राओं से अधिक सातवीं श्रेणी की छात्र-छात्रायें अधिक आग्रही है।

(ii) लेकिन गीत, कविता पाठ और तात्क्षणिक वक्तव्य में ☐ सातवीं श्रेणी के छात्र-छात्राओं की भागीदारी अधिक है।

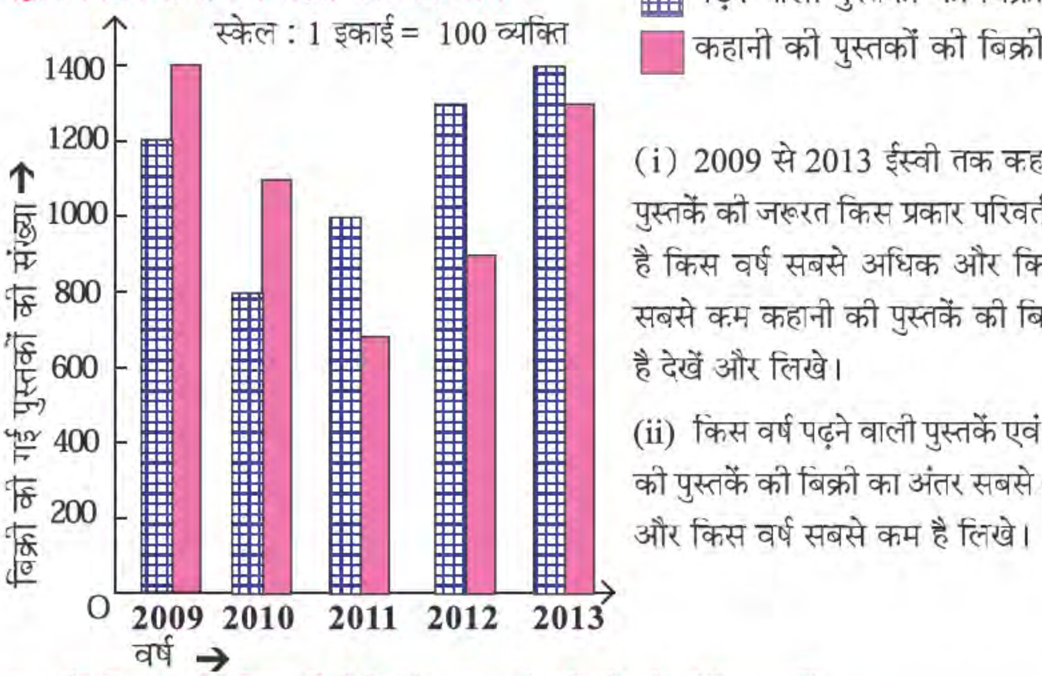
(iii) सातवीं श्रेणी के छात्र-छात्राओं का ☐ में भागीदारी सबसे कम है।

4 मुहल्ले के सूबल चाचा की पुस्तक की दुकान में पांच वर्ष की कहानियों की पुस्तक बिक्री एवं पढ़ने की पुस्तक के बिक्री की तालिका नीचे देखे और द्विस्तंभ लेख चित्र के द्वारा किस प्रकार की पुस्तकें किस वर्ष अधिक बिक्री हुई है एवं किस प्रकार की पुस्तकें कम बिक्री हुई है।

पाठक की जरूरत के अनुसार सूबल चाचा किस प्रकार की पुस्तक अगले वर्ष अधिक खरीदेंगे एवं किस प्रकार की पुस्तकें कम खरीदेंगे।

वर्ष	2009	2010	2011	2012	2013
पढ़ने की पुस्तकें	1200	800	1000	1300	1400
कहानी की पुस्तकें	1400	1100	700	900	1300

द्विस्तंभ चित्र से नीचे के प्रश्नों का उत्तर खोजे —



(i) 2009 से 2013 ईस्वी तक कहानी की पुस्तकें की जरूरत किस प्रकार परिवर्तन हुआ है किस वर्ष सबसे अधिक और किस वर्ष सबसे कम कहानी की पुस्तकें की बिक्री हुई है देखें और लिखे।

(ii) किस वर्ष पढ़ने वाली पुस्तकें एवं कहानी की पुस्तकें की बिक्री का अंतर सबसे अधिक और किस वर्ष सबसे कम है लिखे।

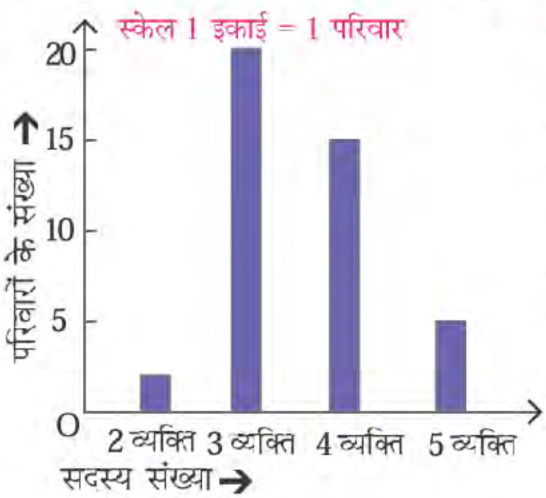
ऊपर के द्विस्तंभ लेखचित्र को देखे और उत्तर को खोजने की कोशिश करें —

(1) पढ़ने वाली पुस्तक के स्तंभ की ऊँचाई 2010 कम होने पर भी 2011 से क्रमशः बढ़ा है। अतः 2010 में पढ़ने वाली पुस्तक कम बिक्री होने के बावजूद 2011 से क्रमश बढ़ा है।

सबसे अधिक पढ़ने वाली पुस्तकों की बिक्री हुई है ☐ साल में। सबसे कम पढ़ने वाली पुस्तकों की बिक्री ☐ साल में हुई है।

बनाकर देखे — 16

1. हम अपने मुहल्ले के 55 परिवार के सदस्यों की संख्या का एक स्तंभ लेख चित्र बनाया।



इस स्तंभ लेख चित्र देखे और नीचे प्रश्नों का उत्तर खोजने की कोशिश करें —

(a) 55 परिवारों में से 4 सदस्य की संख्या का परिवार कितने है लिखो।

(b) इन 55 परिवारों में से सबसे अधिक परिवार के सदस्य की संख्या कितनी है लिखें। इस प्रकार के परिवार की संख्या लिखे।

(c) स्तंभ लेख चित्र से देखते है ☐ परिवारों के सदस्य संख्या 5 एवं ☐ परिवार की सदस्य संख्या 2 है।

2. नीचे के पर्वतों की श्रेणियों की ऊँचाई देखे एवं तालिका कागज में 1 इकाई = 1000 मीटर की ऊँचाई मानकर स्तंभ लेख तैयार करें।

पर्वत शृंखला का नाम	गाडवीन आस्टिन	कैलास	नन्दादेवी	अन्नपूर्णा
ऊँचाई (मीटर प्राय:)	8610	6710	7825	8090

3. हमारे सातवीं कक्षा के 55 छात्र-छात्राओं और अष्टम श्रेणी के 60 छात्र-छात्राओं के प्रिय खेल के तथ्य को इकट्ठा करके नीचे के टेबल में लिखा 1 उस तथ्य को द्विस्तंभ चित्र के रूप में वयक्त करें।

खेल	क्रिकेट	फुटबॉल	तैराकी	हॉकी	खो-खो
सातवीं श्रेणी के छात्र-छात्राओं की संख्या	12	14	8	11	10
आठवीं श्रेणी के छात्र-छात्राओं की संख्या	14	16	10	12	8

4. कृष्णनगर के एक कुम्हार के पांच महीने की मिट्टी के पुतुल एवं शोला से बने पुतुल का तथ्य नीचे के टेबल में दिया गया है। इस तथ्य को द्विस्तंभ चित्र की सहायता से वयक्त करने की चेष्टा करें।

महिना	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई
मिट्टी के पुतुल की संख्या	600	550	450	750	900
शोला के पुतुल की संख्या	500	450	600	650	700

5. मैं अपने कक्षा के 50 छात्र-छात्राओं की सफेद, लाल, हरा, नीला एवं काला रंग में से कौन रंग पसंद है उसकी तालिका तैयार करें और स्तंभ लेख चित्र के माध्यम से व्यक्त करें (स्वयं करें)।

6. तराई तारापद उच्च-माध्यमिक विद्यामंदिर का विगत् 4 वर्ष और इस वर्ष के छात्र-छात्राओं की संख्या की तालिका बनाकर नीचे लिखा है। इस तथ्यों को द्विस्तंभ लेख चित्र बनायें। समय के साथ-साथ छात्र-छात्राओं के शिक्षा का दर जाने एवं छात्रों की तुलना में छात्राएं कितनी शिक्षा में आगे है या पीछे है उसका हिसाब करें।

वर्ष	2009	2010	2011	2012	2013
छात्र	628	536	709	655	660
छात्राएँ	312	415	384	510	629

8)हम 6 मित्रों ने प्रथम पर्यायक्रम परीक्षा के बाद समूहगत रूप से स्वयं नये पद्धति से विषय को जानने की कोशिश किया। अत: द्वितीय पर्यायक्रम परीक्षा के बाद दो परीक्षा में पाये नम्बर के प्रतिशत की एक तालिका तैयार करे।

मेरे मित्र	सुमित	रूमकी	जहीर	मैरी	जोसेफ	नसरीन
प्रथम पर्यायक्रम परीक्षा	45%	60%	55%	38%	72%	62%
द्वितीय पर्यायक्रम परीक्षा	65%	65%	68%	60%	80%	70%

द्विस्तंभ लेख चित्र बनाकर स्वयं नयी पद्धति कितना लाभकारी और किसकी अधिक उन्नति में सहायता की है, उसकी व्याख्या करने की कोशिश करें।

(9) फूलिया के उत्पल और अमीना बीबी के वर्ष में बनाये ताँत की साड़ी का परिमाण द्विस्तंभ लेख चित्र के माध्यम से वयक्त करें।

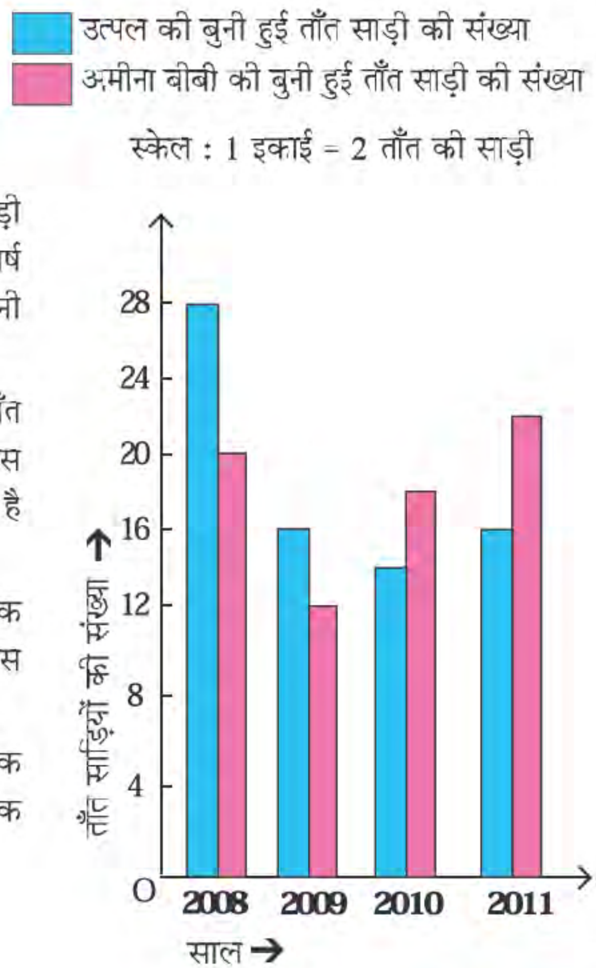
द्विस्तंभ लेख चित्र देखे और नीचे के प्रश्नों का उत्तर देने की कोशिश करें —

(i) किस वर्ष उत्पल सबसे अधिक ताँत की साड़ी बुना है और कितनी साड़ी बुना है। फिर किस वर्ष उत्पल सबसे कम ताँत की साड़ी बुना है तथा कितनी साड़ियाँ बुना है।

(ii) किस वर्ष अमीना बीबी सबसे अधिक ताँत की साड़ी बुनी है और कितनी बुनी है। फिर किस वर्ष अमीना बीबी सबसे कम ताँत की साड़ी बुनी है और कितनी साड़ी बुनी है।

(iii) किस-किस वर्ष उत्पल अमीना बीबी से अधिक ताँत की साड़ी बुना है। उत्पल सबसे अधिक किस वर्ष अमीना बीबी से अधिक साड़ी बुना है।

(iv) फिर किस वर्ष अमीना बीबी उत्पल से अधिक ताँत की साड़ी बुनी है। अमीना बीबी सबसे अधिक किस वर्ष उत्पल से अधिक साड़ी बुनी देखें।

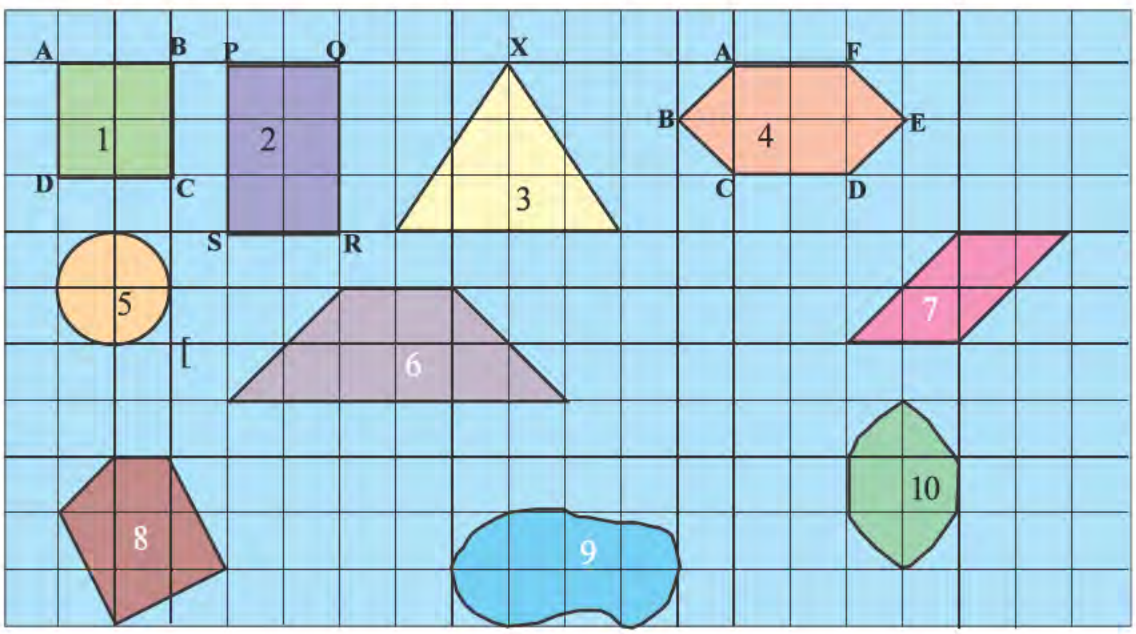


17. आयत क्षेत्र और वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल

मेरी दीदी अपनी कॉपी पर रंगीन कागज का जिल्द लगा रही है, इसलिए बहुत से छोटे–छोटे कागज के रंगीन टुकड़ें फैले हुए हैं। मैं और राहुल इस बिखरे कागजों को एकत्रित करके एक पिचबोर्ड के बक्से में रखा हैं।

आज हमलोगों ने तय किया है कि तालिका कागज बनाकर इन टुकड़े कागजों का क्षेत्रफल मापने की कोशिश करेंगे।

मैं तालिका कागज के प्रत्येक छोटे वर्ग क्षेत्र के घर के भुजा की लम्बाई 1से०मी० लिया।



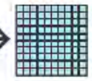
∴ प्रत्येक सबसे छोटे वर्ग क्षेत्र के घर का क्षेत्रफल = 1 से०मी० × 1से०मी० = 1 वर्ग से०मी०।

(1) नम्बर वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल = 4 वर्ग से०मी० [क्योंकि, 4 वर्गक्षेत्राकार घर जुड़े हुए है]

(2) नम्बर आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल ☐ वर्ग से०मी० [क्योंकि, ☐ वर्गक्षेत्राकार घर जुड़े हुए है]

लेकिन राहुल ने जो तालिका तैयार किया उसका प्रत्येक क्षुद्रतम वर्ग क्षेत्र का घर, मेरे तालिका कागज के प्रत्येक क्षुद्रतम वर्ग क्षेत्र के घरों से भी छोटा है।

राहुल ने मेरे 1से०मी० घर के प्रत्येक भुजा को 10 बराबर भाग में बाँटा है।

अत: पाते हैं 1 वर्ग से०मी० ⟶ राहुल का बनाया वर्गाकार घर ⟶ 

1 से०मी० 10 भाग का 1 भाग = 1 मीलीमी०

∴ राहुल 1 वर्ग से०मी० वर्ग क्षेत्र के घरों के बीच [100] वर्ग क्षेत्र का घर बनाया है।

इस 100 क्षुद्रतम वर्ग क्षेत्र के घरों के भुजा की लम्बाई [ ] मीलीमी०

राहुल के क्षुद्रतम वर्ग क्षेत्र के घरों का क्षेत्रफल = 1 मीलीमी० × 1 मीलीमी०

= 1 वर्ग मीलीमीटर

∴ 1 वर्ग से०मी० = 100 × 1 वर्ग मीली मी०

= 100 वर्ग मीली मी०

∴ 1वर्ग से०मी० = 100 वर्ग मीलीमी०   ∴ 1 मिलीमी० = 1÷100 वर्ग से०मी० = 0.01 वर्ग से०मी०

यदि तालिका कागज के क्षुद्रतम वर्ग क्षेत्र के घरों के 1 भुजा की लम्बाई 1 डेसीमी० लेता तब,

1 क्षुद्रतम वर्ग क्षेत्र के घर का क्षेत्रफल

1 डेसीमी0 × 1 डेलीमी0 = 10 से०मी० × 10 से०मी०

∴ 1 वर्ग डेसी मी0 = 100 वर्ग से०मी०

= 100 × 100 वर्ग मीलीमी०

= 10000 वर्ग मीलीमी०

∴ 1 वर्ग डेसीमी0 = 10000 वर्ग मीलीमी०

∴ 1 वर्ग से०मी० = (1 ÷ [ ]) वर्ग डेसीमी० = 0.01 वर्ग डेसीमी०

फिर, 1 वर्ग डेसीमी० = (1÷ [ ]) वर्ग मीलीमी० = 0.0001 वर्ग मीलीमी०

1 मैं अपने तालिका कागज के(1) नं० (2) नं० का क्षेत्रफल कितना वर्ग मीली मीटर पाता हूँ।

(1) नं० वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल = 4 वर्ग से०मी०

= 4×1 वर्ग से०मी० = 4×100 वर्ग मीली मी० = 400 वर्ग मीलीमीटर

= 6 × [ ] वर्ग मीलीमी० = [ ] वर्ग मीलीमी०

2 मैं एक तालिका कागज के (1) और (2) क्षेत्रों का क्षेत्रफल वर्ग डेसीमी० में व्यक्त करने की कोशिश करें।

(1) नं० वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल = 4 वर्ग मी०

= 4 × (0.01) वर्ग डेसीमी० ∵ [1 वर्ग से०मी०= 0.01 वर्ग डेसी मी०]

= 0.04 डेसी मी०

(2) नं० आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = 6 वर्ग किमी०

= □ × □ वर्ग डेसीमी०

= □ वर्ग डेसीमी०

∴ (3) नं० त्रिभुजाकार क्षेत्र के तालिका कागज के 2 वर्ग क्षेत्राकार घर, 4 आधा से अधिक वर्ग क्षेत्राकार घर और 2 आधा से कम वर्गक्षेत्राकार घर जुड़े हुए हैं।

∴ 3 नं० त्रिभुज का क्षेत्रफल = (2 + 4) वर्ग से०मी०

= 6 वर्ग से०मी०

∴ 3 नं० त्रिभुज का क्षेत्रफल = □ वर्ग डेसीमी० = □ वर्ग मीलीमी० [स्वयं संख्या बैठाएँ]

स्वयं करें

तालिका कागज के (4) नम्बर चित्र का क्षेत्रफल = □ वर्ग से०मी०

= □ वर्ग डेसीमी० = □ वर्ग मिली मी०

मैं वर्ग से०मी० को एक ही तरह से अन्य क्षेत्रफल इकाई एवं अन्य क्षेत्रफल के इकाई वर्ग से०मी० में व्यक्त करने की कोशिश करें।

1 वर्ग मी० = 1 मीटर × 1 मीटर

=100 से०मी० × 100 से०मी० = 10000 वर्ग से०मी०

∴1 वर्ग मीटर = 10000 वर्ग से०मी० ∴ 1 वर्ग से०मी० = 1÷10000 वर्ग मीटर = 0.0001 वर्ग मीटर

∴ 1 वर्ग कि०मी० = □ वर्ग मीटर स्वयं करें।

1 वर्ग मीटर = □ वर्ग किमी० स्वयं करें।

स्वयं करें — 17.1

(i) 1 वर्ग कि०मी० = □ वर्ग डेका मी०

(ii) 1 वर्ग कि०मी० = □ वर्ग हेक्टो मी०

(iii) तालिका कागज के (5) नम्बर चित्र का क्षेत्रफल प्राय: □ वर्ग से०मी० =प्राय: □ वर्ग मीली मीटर

=प्राय: □ वर्ग मीली मीटर

(iv) तालिका कागज के (6) नम्बर चित्र का क्षेत्रफल = □ वर्ग मीली मी०

= □ वर्ग हेक्टो मी० = □ वर्ग मीली मी०

(v) 7 और 8 नं० चित्र के क्षेत्रफल को भी वर्ग से०मी०, वर्ग डेकामीटर और वर्ग मीटर में लिखें।

(vi) 9 और 10 नं० चित्र के क्षेत्रफल यथाक्रम प्राय: □ वर्ग से०मी० और □ वर्ग से०मी०।

फर्श पर टाली बैठायें

हमारे गाँव के पुराने अस्पताल का मरम्मत किया जा रहा है। दो नए घर बनाये गये है। उन घरों के फर्श पर टाली लगाये जा रहे है।

3 कितना टाली लगेगा इसका हिसाब करें।

मापकर देखता हूँ कि प्रथम घर के आयताकार फर्श की लम्बाई 24 मीटर तथा चौड़ाई 20 मीटर है।

∴ प्रथम घर के फर्श का क्षेत्रफल = 24 मीटर × 20 मीटर

= 480 वर्ग मीटर

मापकर देखते है कि 1 वर्गाकार टाली के एक भुजा की लम्बाई 25 से०मी०

∴ 1 वर्गाकार टाली का क्षेत्रफल = 25 से०मी० × 25 से०मी०

= 625 वर्ग से०मी०

घर के फर्श का क्षेत्रफल ☐ वर्ग मीटर

लेकिन 1 टाली का क्षेत्रफल ☐ वर्ग से०मी०।

प्रथम दोनों क्षेत्रफल को एक ही इकाई में बदले।

∴ फर्श का क्षेत्रफल 480 वर्ग मीटर।

= 480 × 10000 वर्ग से०मी०

प्रथम घर के फर्श में टाली लगेगा। (480 × 10000) ÷ 625 टाली

$$= \frac{480 \times \cancel{10000}^{\cancel{400}\ \cancel{80}\ 16}}{\cancel{625}_{\cancel{25}\ 5}} = \square \text{ टाली}$$

4 लेकिन दूसरे आयताकार घर के फर्श को एक ही माप के टाली लगाने में 8000 टाली लगा है। हिसाब करके देखें कि इस घर का क्षेत्रफल कितना है।

1 टाली का क्षेत्रफल = 625 वर्ग से०मी०

= 625 × ☐ वर्ग मीटर = 0.0625 वर्ग मीटर

∴ 8000 टाली का क्षेत्रफल = 8000 × .0625 वर्ग मीटर = ☐ वर्ग मीटर

∴ द्वितीय घर के फर्श का क्षेत्रफल = ☐ वर्ग मीटर

5 इस द्वितीय घर के फर्श की लम्बाई 25 मीटर हो तो चौड़ाई निकालें।

द्वितीय घर के फर्श का क्षेत्रफल 500 वर्ग मीटर

अर्थात् लम्बाई × चौड़ाई = 500 वर्ग मीटर एवं फर्श की लम्बाई = 25 मीटर

∴ फर्श की चौड़ाई = (500 ÷ □) मीटर

= □ मीटर

6 यदि एक ही माप के 2000 टाली से किसी आयताकार घर का फर्श सम्पूर्ण रूप से ढंका जाए, तो उस घर के फर्श का क्षेत्रफल का हिसाब करें। (स्वयं करें)

लेकिन 6400 एक ही माप के टाली से वर्गाकार घर के फर्श को ढंका जाएगा तो उसके एक भुजा की लम्बाई का हिसाब करें। (स्वयं करें)

एक आयताकार हॉल घर की लम्बाई 25 मीटर तथा चौड़ाई 16 मीटर है। घर के फर्श को 2 डेसीमी0 लम्बी भुजा वाले वर्गाकार टाली को बिछाने में कितने टाली लगेंगे। (स्वयं करें)

चार दीवारों को रंग करें

7 हमारे गाँव के अस्पताल के नए घर के दोनों फर्श में टाली बिछाया जाएगा और चार दीवारों को प्लास्टर करके रंग किया जाएगा।

प्लास्टर करने में प्रति वर्ग मी० पर 85 रूपये खर्च होता है। तो प्रथम घर के चार दिवारों को प्लास्टर करने में कितना खर्च होगा हिसाब करें। प्रत्येक घर की ऊँचाई 6 मीटर है।

सर्वप्रथम पहले घर के चार दीवारों का क्षेत्रफल मापें।

पहले घर की लम्बाई = □ मीटर, चौड़ाई = □ मीटर

पहले घर के चार दीवारों का क्षेत्रफल = पहले घर की लम्बाई बराबर

2 आयताकार दीवारों का क्षेत्रफल और प्रथम घर की चौड़ाई बराबर

2 आयताकार दीवारों का क्षेत्रफल का योग ।

= 2× लम्बाई × चौड़ाई + 2 × चौड़ाई × ऊँचाई

= 2× 24 × 6 वर्ग मीटर + 2× 20 × 6 वर्ग मीटर

= □ वर्ग मीटर + □ वर्ग मीटर = 528 वर्ग मीटर

8 लेकिन प्रथम घर में 2 मीटर चौड़ा और 3 मीटर ऊँचा दो आयताकार दरवाजे एवं 1.5 मीटर चौड़ा और 2 मीटर ऊँचा दो आयताकार खिड़कियाँ हैं। इन जगहों पर प्लास्टर नहीं करना पड़ेगा। अत: इस दो दरवाजे और दो खिड़कियों के कुल क्षेत्रफल को चारों दीवारों के क्षेत्रफल से घटाना होगा। देखें क्या पाते हैं।

1 दरवाजा का क्षेत्रफल 3 मीटर × 2 मीटर = 6 वर्ग मीटर

∴ 2 दरवाजा का क्षेत्रफल 2 × 6 वर्ग मीटर = 12 वर्ग मीटर

1 खिड़की का क्षेत्रफल 2 मीटर × 1.5 मीटर = 3 वर्ग मीटर

∴ 2 खिड़की का क्षेत्रफल 2 × 3 वर्ग मीटर = 6 वर्गमीटर

∴ 2 दरवाजे और दो खिड़कियों का कुल क्षेत्रफल = □ वर्ग मीटर □ वर्ग मीटर

= □ वर्ग मीटर

∴ प्लास्टर करना होगा (528 वर्ग मीटर –18 वर्ग मीटर) = 510 वर्ग मीटर ।

प्रति वर्ग मीटर पर 85 रुपये के हिसाब से 510 वर्ग मीटर प्लास्टर पर खर्च करना होगा □ ×85 रुपये

= □ रुपये।

9 प्रति वर्ग मीटर 315 रुपये के हिसाब से 2 दरवाजे और 2 खिड़कियों को रंग करने में कितना खर्च होगा हिसाब करें।

1 वर्ग मीटर पर खर्च होगा 315 रुपये।

∴ 18 वर्ग मीटर पर खर्च होगा 315×18 रुपये।

= □ रुपये।

प्रथम घर का सीलिगं सफेद रंग करने में प्रति वर्ग मीटर 60 रुपये के दर से खर्च होगा। हिसाब करें।

प्रथम घर के छत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= (24×20) वर्ग मी० = 480 वर्ग मी०।

∴ सफेद रंग करने में कुल खर्च होगा (480×60) रुपये = □ रुपये।

स्वयं करें —17.2

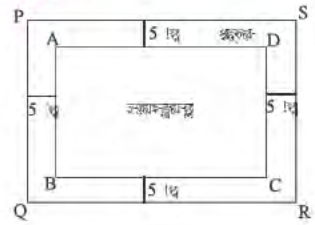
1) गाँव के अस्पताल के द्वितीय घर की ऊँचाई 7 मीटर होने पर दरवाजा एवं खिड़की सहित द्वितीय घर के चार दीवारों के क्षेत्रफल का हिसाब करें।

2) इस द्वितीय घर में 1.8 मीटर चौड़ा और 2.5 मीटर ऊँचा दो दरवाजे और 1.5 मीटर चौड़ा और 1.8 मीटर ऊँचे दो खिड़कियाँ है। प्रति वर्ग मीटर 75 रुपये के हिसाब से दरवाजा खिड़की बाद देकर चार दीवारों को प्लास्टर करने में कितना खर्च होगा हिसाब करें।

3) प्रति वर्ग मी० 300 रुपये के दर से उस दूसरे घर के दरवाजे और खिड़कियों को रंग करने में कुल कितना खर्च होगा। हिसाब करें।

4) दूसरे घर के सीलिंग को सफेद रंग से रंगने में 55 रुपये प्रति वर्ग मी० खर्च होने पर कितना खर्च होगा हिसाब करें।

यह अस्पताल आयताकार दीवार से घिरा हुआ है। दिवार को छोड़कर जमीन की लम्बाई 70 मीटर और चौड़ाई 60 मीटर है दीवार के भीतर 5 मीटर चौड़ा रास्ता अस्पताल के चारों तरफ है। उस रास्ते को बनाने में प्रति वर्ग मीटर 12 रुपये खर्च होता है। तो कुल कितने रुपये खर्च होगा।



पहले मैं छोटा एक चित्र बनाकर समझूँ कि अस्पताल में कहाँ रास्ता है।

देखते हैं, ABCD → अस्पताल

PQRS → चारों तरफ रास्ता सहित अस्पताल

PS = 70 मीटर

AD= (70 मीटर - 5 मीटर -5 मीटर) = □ मीटर

PQ = 60 मीटर

AB = (60 मीटर -5 मीटर -5 मीटर) = □ मीटर

∴ PQRS आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = □ मीटर × □ मीटर

= (70 × 60) वर्ग मीटर = □ वर्ग मीटर

ABCD आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = 60 मीटर × 50 मीटर

= □ वर्ग मीटर।

चित्र से देखता हूँ कि PQRS आयत क्षेत्र के क्षेत्रफल से ABCD आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल घटाने पर रास्ते का क्षेत्रफल पाते है।

∴ रास्ते का क्षेत्रफल = PQRS आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल ABCD आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल।

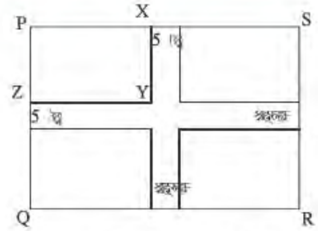
= 4200 वर्ग मीटर 3000 वर्ग मीटर = 1200 वर्ग मीटर

∴ प्रति वर्ग मीटर पर 12 रुपये के हिसाब से 1200 वर्ग मीटर पक्का रास्ता बनाने में खर्च होगा।

= (12×1200)रुपये

= □ रुपये

10 यदि अस्पताल में दो रास्ते जमीन के बीच से होते अर्थात् पास के चित्र की तरह होते तो रास्ते का क्षेत्रफल कैसे पाते।



PS = 70 मीटर PQ = 60 मीटर

PQRS आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = 70 मीटर × 60 मीटर

= ☐ मीटर

देखते हैं कि दोनों रास्ते पूरे जमीन को 4 बराबर आयताकार जमीन में भाग करते हैं।

PXYZ आयत क्षेत्र का $PX = \frac{70-5}{2}$ = ☐ मीटर

$PZ = \frac{60-5}{2}$ = ☐ मीटर

∴ PXYZ आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = 32.5 मीटर × 27.5 मीटर

= ☐ वर्ग मीटर

4 PXYZ आयत के क्षेत्रफल को बराबर पाये एवं उनका कुल क्षेत्रफल = 4 × ☐ वर्ग मीटर

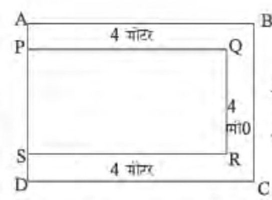
=3575 वर्ग मीटर

∴ रास्ता का क्षेत्रफल = (4200 – 3575) वर्ग मीटर

= 625 वर्ग मीटर

दूसरे तरीके से रास्ता का क्षेत्रफल निकाल पाते या नहीं देखें।

स्वयं करें— 17.3

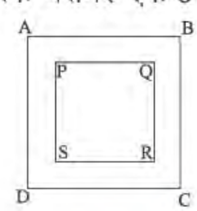


AB = 54 मी0
AD = 28 मी0

1) ABCD आयत क्षेत्र जमीन के भीतर के चित्र की तरह 4 मीटर चौड़ा रास्ता का क्षेत्रफल मापें।

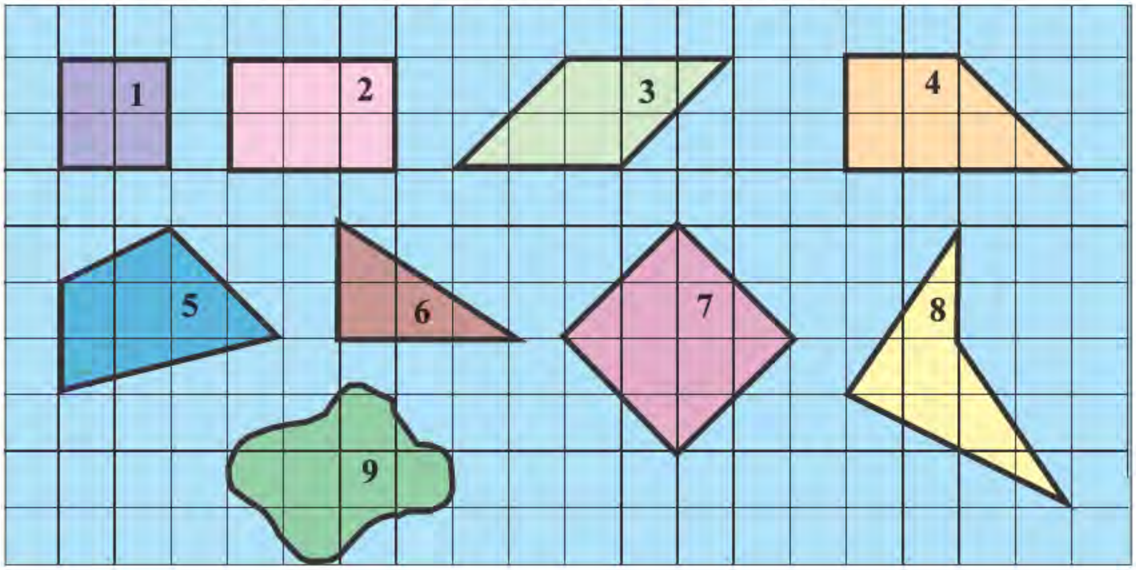
2) 2500 वर्ग मीटर क्षेत्रफल वाले PQRS वर्गाकार पार्क के बाहर चारों तरफ बराबर एक 6 मीटर चौड़ा रास्ता है।

रास्ते का क्षेत्रफल निकालें।



बनाकर देखें — 12

1. तालिका कागज से घर गिनकर क्षेत्रफल निर्णय करने की कोशिश करें



तालिका कागज के विभिन्न क्षेत्रों के आकारों को देखें और नीचें के घरों को पूर्ण करें

आकार	सम्पूर्ण वर्ग क्षेत्रकार घरों की संख्या	आधे से अधिक वर्ग क्षेत्राकार घरों की संख्या	आधे से कम वर्ग क्षेत्राकार घरों की संख्या	कुल वर्गाकार घरों की संख्या	तालिका कागज के क्षुद्रतम वर्ग क्षेत्र के 1भुजा की लम्बाई 1 से०मी० अत: क्षेत्रफल 1 वर्ग से०मी० कुल क्षेत्रफल (प्राय:)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

2. मन ही मन हिसाब करें और लिखें

(i) जिस वर्गाकार चित्र की एक भुजा की लम्बाई 4 से०मी० हो तो परिसीमा कितनी होगी।

(ii) एक वर्गाकार जमीन की परिसीमा 20 मीटर है तो उसका क्षेत्रफल निकालें।

(iii) आयताकार क्षेत्र की लम्बाई 8 से०मी० और चौड़ाई 5 से०मी० है तो आयतक्षेत्र का क्षेत्रफल कितना होगा।

(iv) 1 वर्ग किमी० = ☐ वर्ग डेकामीटर

(v) 1 वर्ग मीटर = ☐ वर्ग हेक्टोमीटर

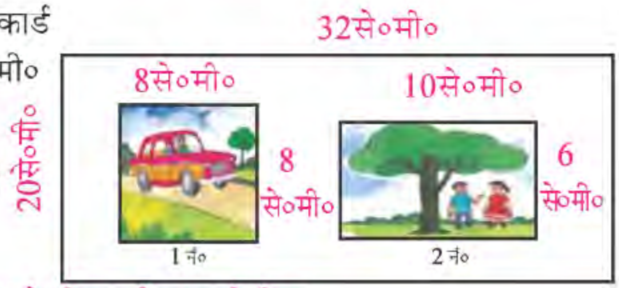
(vi) 5 वर्गमीटर और 5 मीटर वर्ग से क्या समझते हो।

(vii) एक वर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल 2 से०मी० वर्ग होने से। 1 भुजा की लम्बाई ☐ से०मी० है।
संकेत क्षेत्रफल = 2 से०मी० वर्ग = 2 से०मी० × 2 से०मी०

(viii) एक आयताकार क्षेत्र बनाओ जिसका क्षेत्रफल 30 वर्ग से०मी० है। हिसाब करके देखें कि यह आयताकार क्षेत्र की लम्बाई और चौड़ाई क्या-क्या ले सकते है। लेकिन 40 वर्ग से०मी० क्षेत्रफल वाला आयत क्षेत्र हो तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई क्या–क्या ले सकते है।

(ix) मिहिर ने एक पिचबोर्ड का वर्गाकार कार्ड बनाया है जिसके एक भुजा की लम्बाई 6 से०मी० है तो इस कार्ड का क्षेत्रफल कितना होगा।

(x) 5 मीटर वर्ग का क्षेत्रफल ☐ वर्ग मीटर [खाली घर में बैटाएँ]



3. मैंने एक सफेद आयताकार कागज से पास के चित्र की तरह दो चित्र बनाया है।

(a) 1नं० चित्र सफेद कागज के कितने जगह पर है हिसाब करें।

(b) 2 नं० चित्र सफेद कागज के कितने जगह पर है हिसाब करें।

(c) 1 नं० और 2 नं० चित्र बनाने के बाद मेरे सफेद कागज का कितना जगह बच गया हिसाब करके देखें।

4. मेरी कॉपी का एक पन्ना 15 से०मी० लम्बा और 12 से०मी० चौड़ा है उसके चारों तरफ 2 से०मी० चौड़ा मार्जिन छोड़कर बाकी हिस्से पर लिखा। छोटा एक चित्र बनाकर दिखायें। →

जिस अंश पर लिखा उसका क्षेत्रफल निकालें।

जिस अंश पर नहीं लिखा उसका क्षेत्रफल निकालें।

(5) राजेश के एक आयताकार जमीन की लम्बाई 36 मीटर और चौड़ाई 24 मीटर है। उसके आयताकार जमीन के बाहर चारो तरफ 2 मीटर चौड़ा रास्ता है। छोटा करके चित्र बनाकर हिसाब करके देखे।

(i) रास्ता सहित आयताकार जमीन की लम्बाई व चौड़ाई कितनी है।

(ii) रास्ता छोड़कर आयताकार जमीन का क्षेत्रफल कितना है।

(iii) रास्ते का क्षेत्रफल कितना है।

(6) मारिया के 20 मीटर लम्बे वर्गाकार जमीन के बाहर चारो तरफ 1 मीटर चौड़ा एक रास्ता है। हिसाब करके इस रास्ते का क्षेत्रफल लिखो।

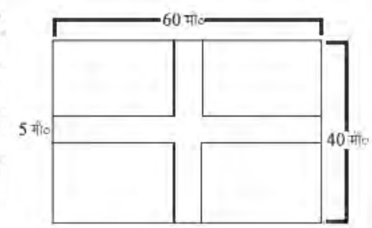
(7) एक वर्गाकार जमीन का क्षेत्रफल 6400 वर्ग मीटर है। प्रति मीटर 3.50 रुपये खर्च करके जमीन के चारो तरफ बेड़ा लगाने में कुल कितना खर्च आयेगा, निकाले।

(8) करीम चाचा के जमीन की लम्बाई चौड़ाई का दो गुणा और जमीन का क्षेत्रफल 578 वर्गमीटर है। करीम चाचा के जमीन की लम्बाई, चौड़ाई और परिसीमा बताओ।

(9) एक आयताकार अभिनय मंच की लम्बाई चौड़ाई के दो गुणा है। पूरे मंच को तिरपाल से ढकने में 6,048 रुपये खर्च हुआ। प्रति वर्ग मीटर तिरपाल का दाम 21 रुपये है। मंच की लम्बाई और चौड़ाई कितनी है हिसाब करें।

(10) नजरीन अपने 5.5 मीटर लम्बी और 1.25 मीटर चौड़ी साड़ी में लम्बाई के बराबर 2.5 से०मी० चौड़ा जड़ी का पाड़ बैठायेगी और चौड़ाई की ओर से 5 से०मी० चौड़ा जड़ी का पाड़ बैठायेगी। साड़ी के कितने क्षेत्रफल में जड़ी रहेगी। हिसाब करें। जड़ी को छोड़कर साड़ी का कितना क्षेत्रफल होगा निकाले।

(11) पास के चित्र की तरह 5 मीटर चौड़े दो रास्ते आयताकार बगीचे को चार बराबर खण्डों में बांटते है। इस आयताकार बगीचे की लम्बाई 60 मीटर तथा चौड़ाई 40 मीटर है। प्रति वर्ग मीटर 40 रुपये खर्च होगा हिसाब करें। जमीन के प्रत्येक खण्ड का क्षेत्रफल कितना होगा। निकाले।



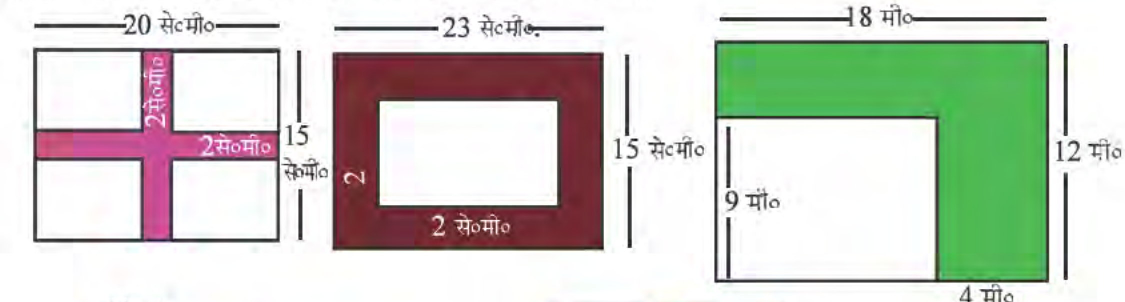
(12) हमारे घर के अंदर आने का रास्ता 2 मीटर चौड़ा है। रास्ता घर के सामने के बगीचे को पास के चित्र की तरह दो समान वर्गाकार खण्ड में बाँट दिया है। प्रति वर्ग मीटर 500 रुपये के हिसाब से रास्ता बनाने में 8000 रुपये खर्च हुआ है। बगीचे के एक-एक वर्गाकार खण्ड का क्षेत्रफल कितना होगा हिसाब करके लिखे। घर आयताकार जगह में बना है। आयताकार जगह की चौड़ाई 4 मीटर होने पर घर कितने वर्ग मीटर जगह लेकर बना है हिसाब करके लिखे।

(13) 30 मीटर लम्बे एक जमीन को जोतने में 150 रुपये खर्च हुआ है। जमीन की चौड़ाई यदि 5 मीटर कम होता तब खर्च 120 रुपये होता। जमीन की चौड़ाई बनाकर लिखो।

(14) एक आयताकार हॉल घर की लम्बाई 30 मीटर एवं चौड़ाई 18 मीटर है। घर के फर्श को ढ़कने के लिए 3 डेसी मी0 भुजावाले वर्गाकार टाइल्स की संख्या कितनी होगी।

(15) जाकिर का 18 मीटर × 14 मीटर एक आयताकार जमीन है। इस आयताकार जमीन में 3.4 मीटर लम्बाई का एक वर्गाकार फूल का बगीचा है, छोटा एक चित्र बनाकर तथा फूल के बगीचे को छोड़कर खाली जमीन का क्षेत्रफल निकालें। 2 डेसी मीटर लम्बे वर्गाकार टाली से उस खाली जमीन को ढ़कने में कितनी टालियाँ लगेगी।

(16) चित्र को देखो और रंगीन भाग का क्षेत्रफल निकालो।



स्वयं अपनी इच्छानुसार लम्बाई और चौड़ाई लिखकर रंगीन अंश का क्षेत्रफल निकालो।

(17) मेरे स्कूल के 1 घर की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 8 मीटर, 6 मीटर और 5 मीटर है।

(i) घर के फर्श को सीमेन्ट से पक्का करने में प्रति वर्ग मीटर 75 रुपये खर्च होता है, तो कितना खर्च होगा।

(ii) घर के सीलिंग को सफेद रंग करने में कितना खर्च होगा यदि प्रतिवर्ग मीटर 52 रुपये खर्च होता है।

(iii) घर में 1.5 मीटर चौड़ा एवं 1.8 मीटर ऊँचा दो दरवाजा एवं 1.2 मीटर चौड़ा और 1.4 मीटर ऊँची दो खिड़कियाँ है। 260 रुपये प्रति वर्ग मीटर के हिसाब से दरवाजे और खिड़कियों को रंग करने में कितना खर्च होगा।

(iv) दरवाजा और खिड़की को छोड़कर चार दीवारों को प्लास्टर एवं रंग करने में कितना खर्च होगा यदि प्लास्टर के लिए 95 रुपये प्रति वर्ग मीटर तथा रंग करने के लिए प्रति वर्ग मीटर 40 रुपये खर्च होता है।

(18) हमारे मुहल्ले के वर्गाकार क्लब घर के एक तरफ की लम्बाई 15 मीटर और ऊँचाई 15 मीटर है। उस क्लब घर में 1.5 मीटर चौड़े एवं 2 मीटर ऊँचे चार दरवाजे है। दरवाजा छोड़कर प्रति वर्ग मीटर 350 रुपये के दर से चार दीवारों को रंग करने में कितना खर्च होगा।

(19) चित्र बनाये और हिसाब करें–एक आयताकार क्षेत्र के बीचो–बीच एक वर्गाकार तालाब बनाओ। जिसके तीन तरफ 3 मीटर चौड़ा पाड़ बँधा रास्ता है एवं एक पाड़ में एक 18 मीटर चौड़ा बगीचा है। तो तालाब का क्षेत्रफल [ ] वर्ग मीटर एवं रास्ता का क्षेत्रफल [ ] वर्गमीटर है।

(20) मेरे आयतकार घर की लम्बाई [ ] मीटर, चौड़ाई [ ] मीटर एवं ऊँचाई [ ] मीटर है। खिड़की दरवाजा सहित मेरे आयताकार घर के चार दीवारों का क्षेत्रफल [ ] वर्ग मीटर है।

18. प्रतिसाम्य

आज मैं, मासूम और सुखदेव तीनों मिलकर एक मजेदार खेल, खेल रहे है। हम विभिन्न आकार के कागजों को कई भाँज मोड़कर तथा विभिन्न प्रकार से काटकर और मोड़ को खोलकर सुन्दर-सुन्दर कौन-कौन सा आकार पाते है देखें।

सबसे पहले एक आयताकार नीले कागज को नीचे के चित्र की तरह दो समान रूप से मोड़कर काट लिया तथा सफेद कागज में चिपका दिया।

देखते है कि सफेद भाग अर्थात् कागज काटकर जो चित्र पाये वह ☐ (रैखीय प्रतिसम/ रैखीय प्रतिसम नहीं)

मासूम चित्र बनाकर तथा काटकर पाया —

मासूम का चित्र ☐ (रैखिक प्रतिसम / रैखिक प्रतिसम नहीं)

इस चित्र के ऊपर प्रतिसम रेखा के बराबर आईना रखकर देखते है

∴ मासूम के चित्र का प्रतिसम रेखा ☐ है।

लेकिन सुखदेव के पास मेरी बहन एक लम्बा कपड़ा लाई और उसने गुड़िया के कुर्त्ते के लिए कपड़ा काट देने को कहीं।

सुखदेव काटा →

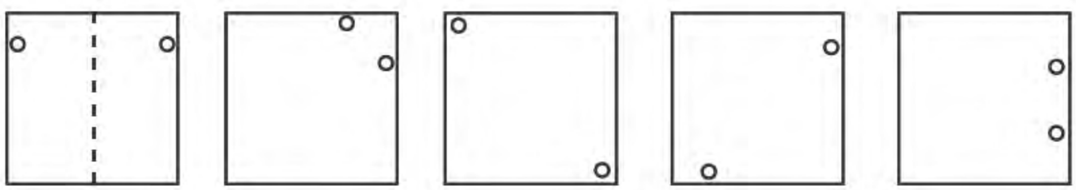
लेकिन सुखदेव ठीक से काट नहीं पाया। उसके बीच में बराबर कर के दो भाँज करने पर बाँये से दाँये पूरा नहीं मिल पायेगा।

बाद में सुखदेव ने इस प्रकार फ्रॉक काटा जिससे वह रेखीय प्रतिसम है →

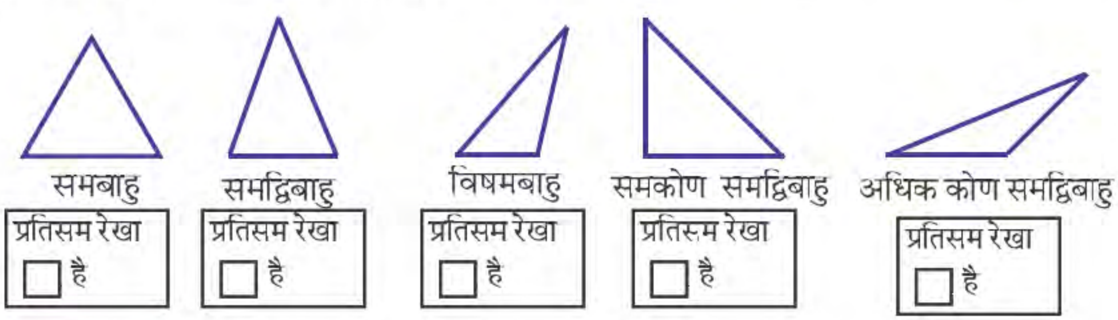
सुखदेव ने बहुत से चित्र बनाया। उनके रेखीय प्रतिसम रेखा ढूढ़ने की कोशिश करें।

देखते है, D का प्रतिसम रेखा अनुभूमिक है लेकिन घर का प्रतिसम रेखा लम्ब है।

मासूम ने कुछ वर्गाकार कागज को मोड़कर उसमें छेद किया तथा उसे खोल दिया। क्या इन छेदों को देखकर प्रतिसम रेखा कहेंगे।



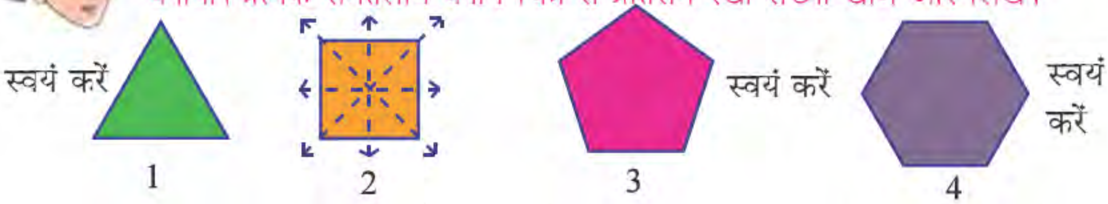
मैंने विभिन्न प्रकार का त्रिभुज बनाया एवं त्रिभुजाकार क्षेत्रों को काटकर तथा उन्हें मोड़कर देखें कि प्रत्येक त्रिभुज के कितने प्रतिसम रेखा पाते है।



स्वयं एक ही तरह के कागज काटकर देखे —

वर्ग क्षेत्र की प्रतिसम रेखा ☐, आयत क्षेत्र की प्रतिसम रेखा ☐, सरल रेखा की प्रतिसम रेखा ☐।

एक ही माप के सरल रेखा और प्रत्येक कोण के मान के बराबर मैंने कुछ समतुल्य चित्र बनाया। प्रत्येक समतलीय बनायें चित्र से प्रतिसम रेखा संख्या खोजें और लिखे।



देखते है कि उस त्रिभुज के तीनों भुजाएँ बराबर और तीनों कोण बराबर है। प्रतिसम रेखा ☐ है।

चतुर्भुज के चारों भुजाएँ बराबर और चारों कोण बराबर होने पर प्रतिसम रेखा ☐ है।

लेकिन (3) न० चित्र या (4) न० चित्र को क्या कहेंगे ?

(3) न० समतलीय चित्र की पाँच भुजायें हैं। अत: यह पंचभुज है तथा प्रत्येक कोण और भुजा का मान बराबर है। अत: (3) नम्बर समतलीय चित्र सुषम पंचभुज है।

अब समझे (4) न० समतलीय चित्र ☐ षटभुज है। (स्वयं करें)

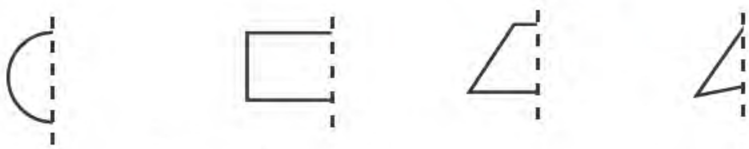
जिस बहुभुज के प्रत्येक भुजा की लम्बाई बराबर एवं प्रत्येक कोण का मान बराबर हो उसे सुषम बहुभुज कहते है।

अत: सुषम पंचभुज की प्रतिसम रेखा ☐ है।

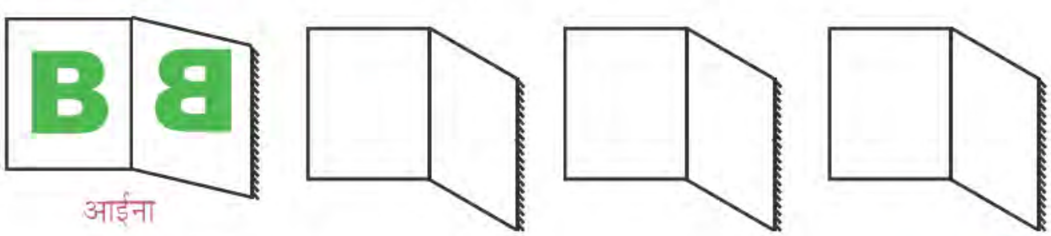
सुषम षटभुज की प्रतिसम रेखा ☐ है।

बनाकर देखें —18.1

(1) नीचे के प्रतिसम रेखाओं पर आईना लगाकर चित्रों को पूरा करने की कोशिश करें।

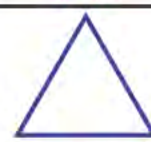


(2) A, B, C, D का आईना से प्रतिबिम्ब बनायें।



आईना

(3) नीचे के समतलीय चित्रों के किन-किन चित्रों में प्रतिसम रेखाएँ हैं एवं किन-किन चित्रों की प्रतिसम रेखा नहीं है। चित्र बनाकर तथा काटकर एवं मोड़कर देखें और लिखें।

समतलीय चित्र	प्रतिसम रेखा की संख्या	समतलीय चित्र	प्रतिसम रेखा की संख्या
समद्विबाहु त्रिभुज		समानान्तर	
		वर्ग क्षेत्र	
विषमबाहु त्रिभुज		राम्बस	
समद्विबाहु ट्रापीजियम		 समबाहु त्रिभुज	

(4) वृत्त के किसी भी ☐ बराबर लिया गया सरल रेखा वृत्त की प्रतिसम रेखा है (स्वयं लिखे)

(5) दो से अधिक प्रतिसम रेखा रहने से किसी भी ज्यामितीय चित्रों के प्रतिसम रेखाएँ सर्वदा ☐।
(स्वयं लिखे)

(6) **A** और **E** में रेखीय प्रतिसम रेखा खोजें।

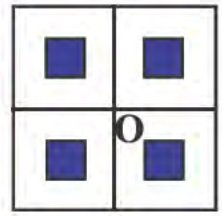
देखते है, A -का प्रतिसम रेखा ☐। (अनुभूमिक/ लम्ब)
E -का प्रतिसम रेखा ☐। (अनुभूमिक/ लम्ब)

नीचे के वर्णों के कोणों के प्रतिसम रेखा अनुभूमिक, कोणों का लम्ब और कोणों का अनुभूमिक एवं लम्ब दोनों ही हैं लिखे।

E, H, M, O, X

ठीक से एक के बाद एक सजायें

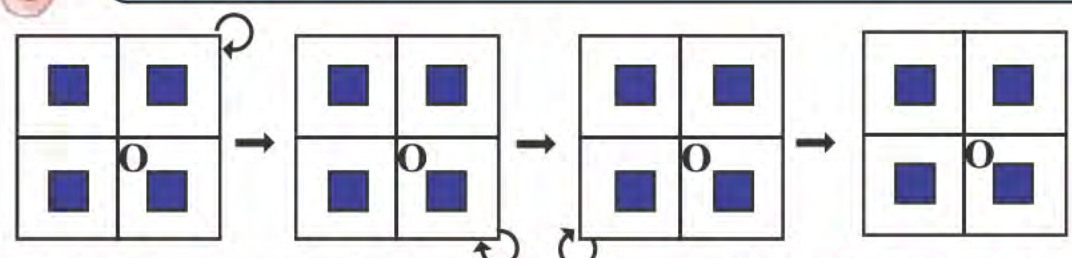
हमलोगों ने चार वर्गाकार रंगीन चित्र को एक वर्गाकार सफेद पिचबोर्ड को दीवार पर टांग दिया।



वर्ग क्षेत्र के मध्य बिन्दु O को केन्द्र करके कितने डिग्री घुमाने पर चित्र फिर सम्पूर्ण रूप से एक तरह का होगा देखें।

पिचबोर्ड के सूते को दिवार से खोल लिया। इसके बाद पिचबोर्ड के O बिन्दु पर एक पिन लगाकर उस बिन्दु को केन्द्र करके दो बार घड़ी के कांटे की ओर 90^0 कोण पर घुमाकर क्या पाते है देखे।

O बिन्दु को केन्द्र करके वर्गाकार पिचबोर्ड को घड़ी के कांटे की ओर 90° घुमाने पर पहले के स्थान पर आ जाते है।



इन बिन्दुओं को क्या कहेंगे ? इस O बिन्दु के सापेक्ष वर्गाकार पिचबोर्ड के घड़ी के काँटा की ओर या विपरीत ओर घूमाकर ठीक पहले की तरह दिखाने को क्या कहेंगे ?

O बिन्दु को घूर्णन केन्द्र कहेंगे। घूर्णन केन्द्र के सापेक्ष निर्दिष्ट कोण पर घुमाकर ठीक पहले की तरह दिखने को घूर्णन प्रतिसाम्य कहा जाता है। सबसे कम जितने डिग्री के कोण में घूर्णन के फलस्वरूप चित्र (वस्तु) अपने साथ मिल जाती है उस कोण के परिमाप को घूर्णन प्रतिसाम्य कोण कहा जाता है। पूर्ण रूप से एकबार घूमकर आने में अर्थात् 360^0 कोण घुमने में प्रथम अवस्था के साथ पूर्ण रूप से मिल जाता है उसे घूर्णन प्रतिसाम्य मात्रा कहते है।

अब समझे कि उस वर्ग क्षेत्र प्रतिसाम्य के घूर्णन केन्द्र O एवं घूर्णन मात्रा 4, जब घूर्णन प्रतिसाम्य का कोण 90^0 है।

लेकिन किसी भी चित्र को (वस्तु को) घूर्णन प्रतिसाम्य के बिन्दु को केन्द्र करके 360^0 या सम्पूर्ण एक बार घुमाने से फिर पहले के चित्र को (वस्तु को) फिर पायेंगे। किसी भी चित्र या वस्तु के घूर्णन प्रतिसाम्य के कोण को 360^0 कह सकते है।

हम घूर्णन के प्रतिसाम्य कोण से 360^0 से कम लेकिन 0^0 से अधिक।

मैंने मेला से कागज का एक खिलौना खरीदा। यह हवा देने से घुमता रहता हैं।

अब इस खिलौने को घूर्णन प्रतिसाम्य की मात्रा खोजने की चेष्टा करें।

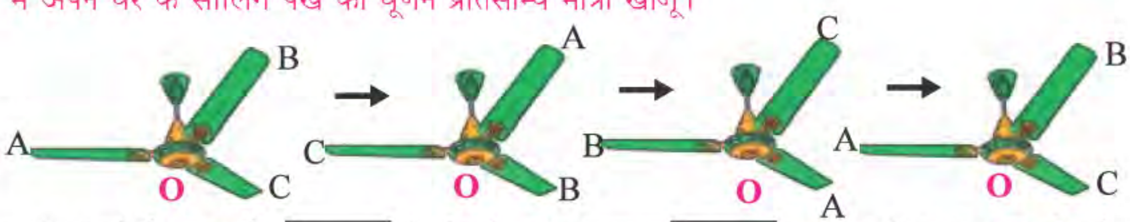
देखते है कि O बिन्दु को केन्द्र करके 90^0 के कोण पर घड़ी के काँटे की ओर या विपरीत तरफ घुमने के पश्चात् प्राथमिक अवस्था में घुम आता है। अर्थात् इस प्रकार दिखता है।

घूर्णन प्रतिसाम्य का केन्द्र = ☐ बिन्दु।

घूर्णन प्रतिसाम्य का कोण = ☐ डिग्री। [$\frac{360^o}{4}$ = ☐ डिग्री]

घूर्णन प्रतिसाम्य की मात्रा = ☐ (स्वयं करें)

मैं अपने घर के सीलिंग पंखे का घूर्णन प्रतिसाम्य मात्रा खोजूँ।



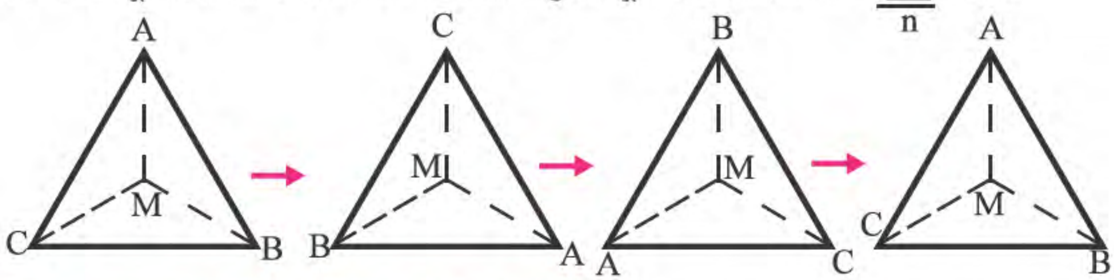
0 बिन्दु को केन्द्र करके ☐ डिग्री कोण पर घुमकर ☐ बार प्राथमिक अवस्था में लौट आता है अर्थात् इस प्रकार दिखता हैं।

घूर्णन प्रतिसाम्य का केन्द्र = ☐ बिन्दु।

घूर्णन प्रतिसाम्य का कोण = ☐ डिग्री। [$\frac{360^o}{3}$ = ☐ डिग्री]

घूर्णन प्रतिसाम्य की मात्रा = ☐ (स्वयं करें)

कोई चित्र या वस्तु किसी बिन्दु को केन्द्र करके घूर्णन के कारण प्रतिसम होता है, एवं चित्र (या वस्तु) यदि n मात्रा के घूर्णन प्रतिसाम्य रहे तब उस चित्र या वस्तु का घूर्णन प्रतिसाम्य कोण = $\frac{\square}{n}$ डिग्री।



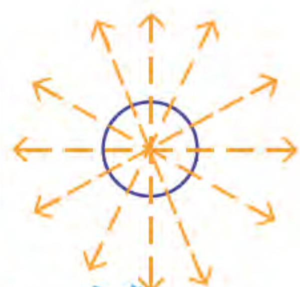
ऊपर के समबाहु त्रिभुजो के घूर्णन को देखे और लिखे।

समबाहु त्रिभुज का घूर्णन प्रतिसाम्य का केन्द्र = ☐

समबाहु त्रिभुज के घूर्णन प्रतिसाम्य का कोण = ☐

समबाहु त्रिभुज के घूर्णन प्रतिसाम्य की मात्रा = ☐

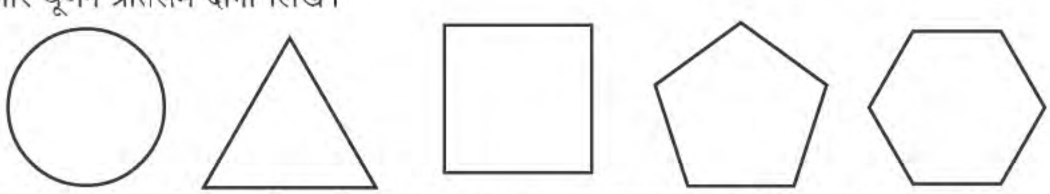
वृत्त के घूर्णन प्रतिसाम्य का केन्द्र, मात्रा और कोण खोजें। देखें कोई कोण वृत्त के घूर्णन प्रतिसाम्य मिलेगा या नहीं।



नीचे के चित्रों का घूर्णन प्रतिसाम्य केन्द्र, प्रतिसाम्य कोण और प्रतिसाम्य मात्रा लिखें।

(i) (ii) (iii) (iv)

नीचे के समतलीय चित्रों के कोणों के रेखीय प्रतिसम और कोणों के घूर्णन फिर कोणों के रेखीय प्रतिसम और घूर्णन प्रतिसम दोनों लिखे।



(i) वृत्त रेखीय प्रतिसम और घूर्णन प्रतिसम (ii) समबाहु त्रिभुज ☐ प्रतिसम और ☐ प्रतिसम

(iii) वर्ग क्षेत्र, सुषम पंचभुज और सुषम षड्भुज ☐ और ☐ प्रतिसम।

कागज पर समतलीय चित्र बनाकर तथा काटकर देखें कि घूर्णन प्रतिसाम्य है या नहीं ? नीचे के खाली घरों में लिखकर जांच करें।

समतलीय चित्र	छोटा चित्र बनाये	घूर्णन केन्द्र	घूर्णन प्रतिसाम्य का चित्र	घूर्णन प्रतिसाम्य की मात्रा
समबाहु त्रिभुज				
वर्ग क्षेत्र		दोनों कर्ण का कटान बिन्दु या विपरीत भुजाओं का दोनों मध्य बिन्दु के संयोजक सरल रेखाओ का कटान बिन्दु		
आयत क्षेत्र				
ट्रापीजियम				
समानान्तर चतुर्भुज		दोनों कर्ण का कटान बिन्दु	180^0	2
राम्बस		दोनों कर्ण का कटान बिन्दु	180^0	
सुषम पंचभुज		शीर्ष बिन्दु से विपरीत भुजाओं के मध्य बिन्दु के संयोजक सरल रेखा का कटान बिन्दु	$\frac{360^0}{5} = 72^0$	5
सुषम षड्भुज				

बनाकर देखें —18.2

1. i) ☐ त्रिभुज केवल रैखिक प्रतिसम।

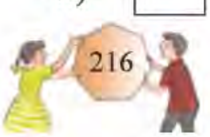
   ii) ☐ त्रिभुज रेखीय प्रतिसम और घूर्णन का प्रतिसाम्य भी।

   iii) वर्ग क्षेत्र के घूर्णन प्रतिसाम्य मात्रा ☐ ।

   iv) आयत क्षेत्र का घूर्णन प्रतिसाम्य मात्रा ☐ ।

   v) वर्ग क्षेत्र के प्रतिसम रेखा ☐ बिन्दु आयत क्षेत्र के प्रतिसम रेखा ☐ ।

   vi) ☐ [ट्रापीजियम / समानान्तर चतुर्भुज] केवल घूर्णन प्रतिसाम्य।



vii) किसी चित्र के घूर्णन प्रतिसाम्य का कोण 180^0 हो तो चित्र के घूर्णन प्रतिसाम्य की मात्रा ☐ ।

viii) ☐ (सुषम पंचभूज / पंचभूज) रेखीय प्रतिसम और घूर्णन प्रतिसाम्य।

ix) सुषम षटभूज के घूर्णन प्रतिसाम्य ☐ डिग्री और मात्रा ☐ ।

x) केवलमात्र ☐ ट्रापीजियम रेखीक प्रतिसम है लेकिन घूर्णन प्रतिसम नहीं है।

xi) आयत क्षेत्र के घूर्णन प्रतिसाम्य केन्द्र ☐ कटान बिन्दु।

xii) समानान्तर चतुर्भुज के घूर्णन प्रतिसाम्य कोण ☐ डिग्री।

xiii) समबाहु त्रिभुज के घूर्णन प्रतिसाम्य कोण ☐ डिग्री।

xiv) वर्ग क्षेत्र के घूर्णन प्रतिसाम्य कोण ☐ डिग्री।

xv) ☐ रेखीय प्रतिसम नहीं लेकिन दो मात्रा का घूर्णन प्रतिसाम्य नहीं है।

2) नीचे के कौन सा ज्यामितीय चित्र रेखीय प्रतिसम है लेकिन घूर्णन प्रतिसम नहीं है।

(a) i) समबाहु त्रिभुज ii) समानान्तर चतुर्भुज iii) समद्विबाहु त्रिभुज iv) वृत्त

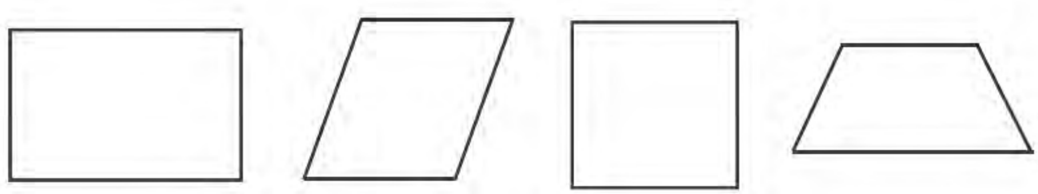
(b) नीचे के कौन सा ज्यामितीय चित्र का घूर्णन प्रतिसम मात्रा २ लेकिन चित्र रेखीय प्रतिसम नहीं है।

i) आयत क्षेत्र ii) समानान्तर चतुर्भुज iii) समद्विबाहु त्रिभुज iv) वृत्त

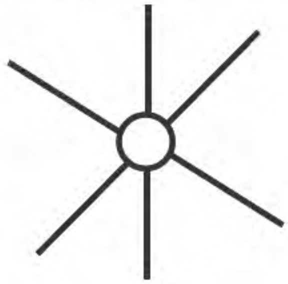
(c) जिस सुषम बहुभुज का घूर्णन प्रतिसाम्य कोण 60^0 है उसकी भुजाओं की संख्या

i) 2 ii) 4 iii) 6 iv) 7

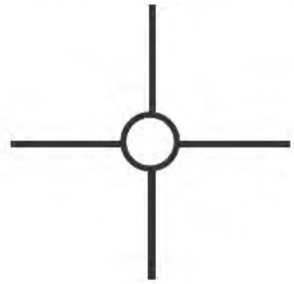
(d) एक चतुर्भुज के घूर्णन साम्य कोण 180° एवं प्रतिसम रेखा 2 हो तो कौन-कौन चतुर्भुज हो सकता है।



3) नीचे के चित्रों को देखे और नीचे के तालिका को पूरा करें।

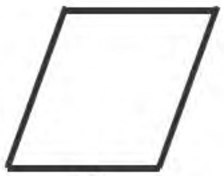


(1)

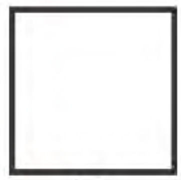


(2)

(3)



(4)



(5)

(6)

(7)

(8)

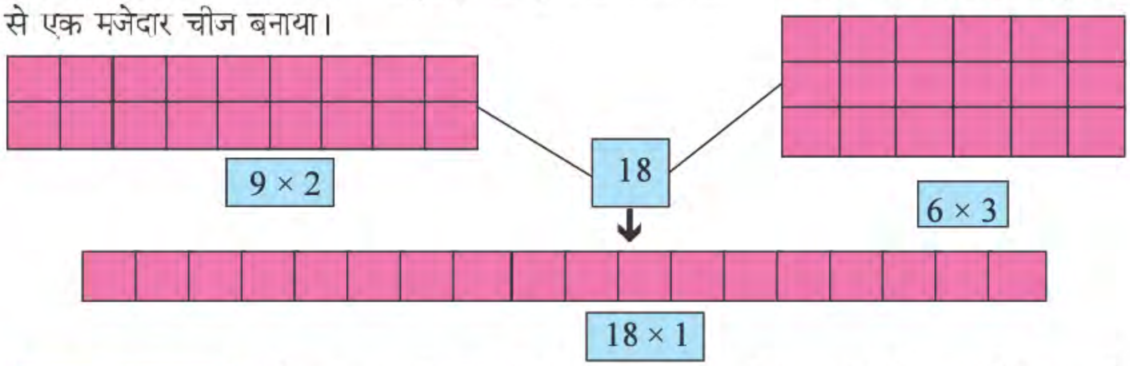
(9)

नम्बर	घूर्णन प्रतिसाम्य का केन्द्र	घूर्णन प्रतिसाम्य का कोण	घूर्णन प्रतिसाम्य की मात्रा
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

19. उत्पादको का विश्लेषण

आज मैं, शाहिना, काशिम और सुजय सभी स्कूल की छुट्टी के बाद मिली के घर जाकर देखते है कि मिली बहुत से विभिन्न रंग के वर्गाकार कागज के टुकड़ों को बनाया है,

मापकर देखते है, प्रत्येक वर्ग क्षेत्र के टुकड़ों की भुजाओं की लम्बाई 1 से०मी० है। काशिम ने इन टुकड़ों से एक मजेदार चीज बनाया।

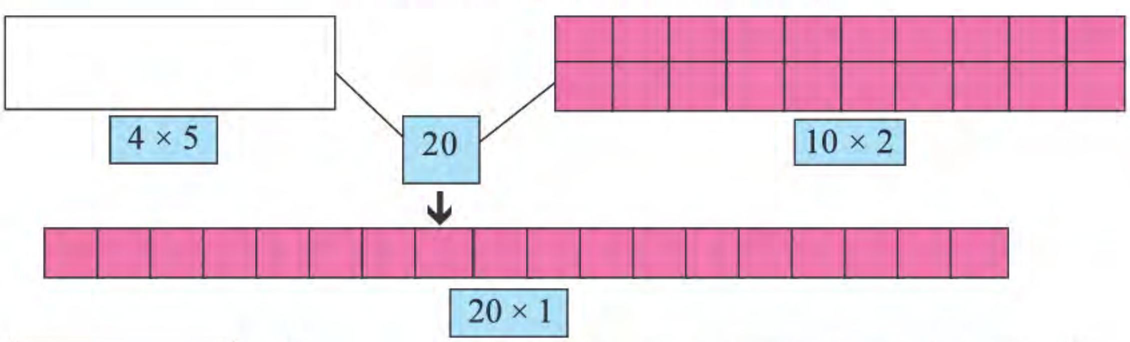


$\therefore 18 = 9 \times 2$
$18 = 6 \times 3$
$18 = 18 \times 1$

18 के उत्पादक ☐, ☐, ☐, ☐, ☐ और ☐; लेकिन इनमें से मौलिक उत्पादक है ☐ और ☐

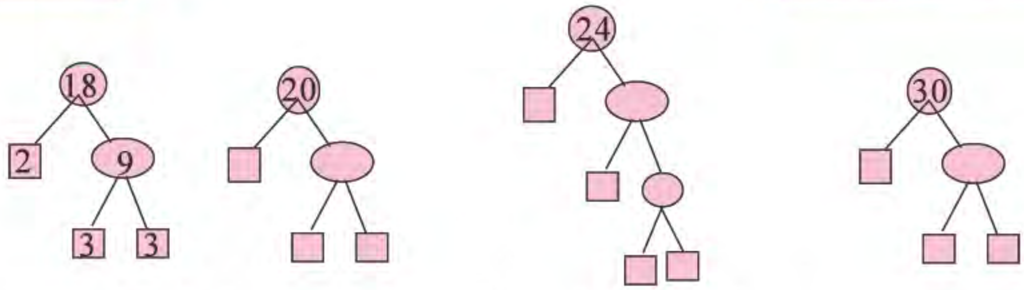
एवं $18 = 2 \times 3 \times 3$

मैं 20 वर्गाकार टुकड़ों को सजाकर पाता हूँ



$\therefore 20 = 4 \times 5$
$20 = 10 \times 2$
$20 = 20 \times 1$

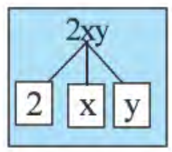
20 के उत्पादक ☐, ☐, ☐, ☐, ☐ और ☐; लेकिन मौलिक इनमें से उत्पादक है ☐ और ☐ एवं $20 = 2 \times 2 \times 5$



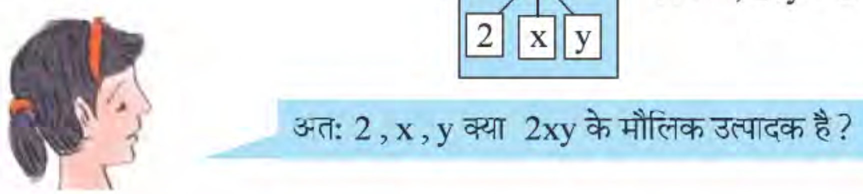
$\therefore\ 24 = \square \times \square \times \square \times \square$ एवं $30 = \square \times \square \times \square$

18, 20, 24 और 30 के मौलिक उत्पादक के गुणनफल के रुप में प्रस्तुत किया या उत्पादक विश्लेषण किया।

अब बीजगणितीय संख्या माला 2xy को किस तरह उत्पादक में विश्लेषण किया जाय देखें।



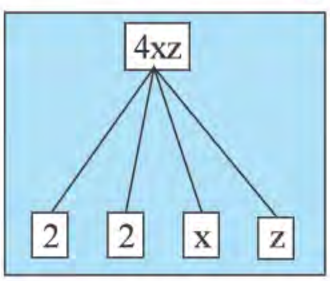
$\therefore$ पाया, $2xy = 2 \times x \times y$



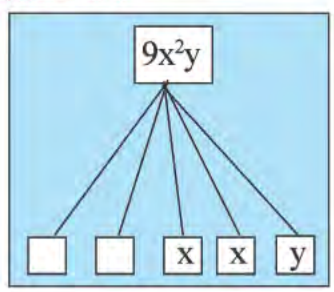
x , y उत्पादकों को 2xy के मौलिक उत्पादक या अलघुकरण योग्य (irreducible) उत्पादक कहते हैं। अर्थात् उनका और उत्पादक विश्लेषण नहीं किया जा सकता है।

यदि $2xy = 2 \times (xy)$ लिखें तब उत्पादक में विश्लेषण अलघुकरण योग्य (irreducible) नहीं हुआ। क्योंकि xy का और उत्पादक विश्लेषण नहीं किया जा सकता है।

मैं 4xz और $9x^2y$ का उत्पादक विश्लेषण करूँ



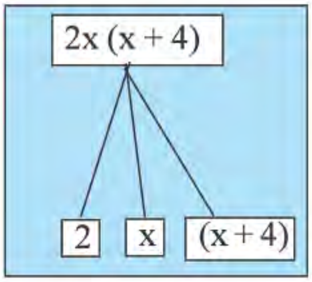
$4xz = 2 \times 2 \times x \times z$

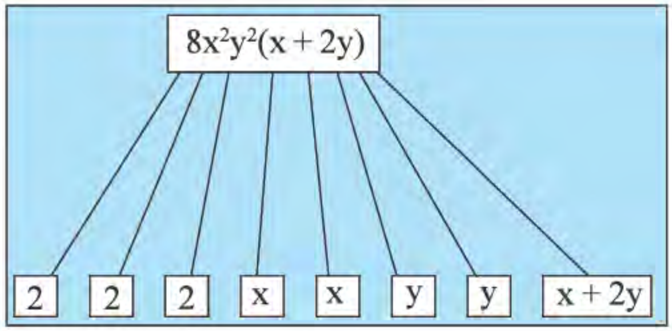


$\therefore 9x^2y = \square \times \square \times \square \times \square \times \square$

स्वयं करें—19.1 उत्पादक विश्लेषण करें — 1) 25xy 2) $18xy^2$ 3) $15q^2r^2$ 4) 10xyz 5) 12xyz

लेकिन $2x\,(x + 4)$ और $8x^2y^2\,(x + 2y)$ इस बीजगणितीय राशियों का यदि उत्पादक में विश्लेषण करना चाहे तो किस प्रकार करेंगे देखें।





$\therefore 2x\,(x+4)$

$= 2 \times x \times (x + 4)$

$\therefore 8\,x^2y^2\,(x+2y)$

$= \square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square \times (x+2y)$

स्वयं करें—19.1 उत्पादक विश्लेषण करें —

1) $12x^2y\,(x + 2)$ 2) $18yz^2\,(2y + 3z)$ 3) $16\,xyz\,(x + y)$ 4) $15pq^2\,(p + 3q)$

5) $14\,mn^2\,(2m - n) = \square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square$

$(6 + 2x)$ इस बीजगणितीय राशियों को उत्पादक में विश्लेषण करने की कोशिश करें।

पहले 6 का उत्पादक विश्लेषण करें, $6 = 2 \times 3$

एवं $2x = 2 \times x$

देखते है 6 और 2x का उत्पादक बिश्लेषण में संख्या का साधारण उत्पादक।

$\therefore 6 + 2x = 2 \times 3 + 2 \times x$

$= 2\times(3+x)$ [विच्छेद नियम से पाते है]

$= 2(3 + x)$

$\therefore 6 + 2x = 2\,(3 + x)$

$(15x - 12y)$ इस बीजगणितीय राशियों का उत्पादक विश्लेषण करने की चेष्टा करें।

$15x = \square \times \square \times \square$ एवं $12y = \square \times \square \times \square \times \square$

$\therefore$ 15x और 12y का उत्पादक विश्लेषण से देखते हैं $\square$ साधारण उत्पादक।

$\therefore 15x - 12y = 3 \times 5 \times x - 3 \times 2 \times 2 \times y$

$= 3\times(5 \times x - 2 \times 2 \times y)$ [विच्छेद नियम से पाते हैं]

$= 3(5x - 4y)$

$3x^2 + 6x$ बीजगणितीय राशियों का उत्पादक निकालने की कोशिश करें।

$3x^2 = \square \times \square \times \square$

$6x = \square \times \square \times \square$

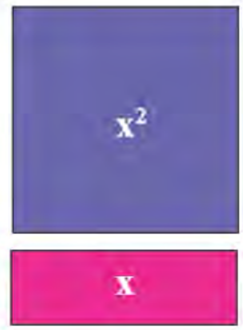
$3x^2$ और $6x$ का उत्पादक विश्लेषण से $\square \times \square$ साधारण उत्पादक।

$\therefore 3x^2 + 6x = 3 \times x \times x + 3 \times 2 \times x = 3 \times x\,(x + 2) = 3x\,(x + 2)$

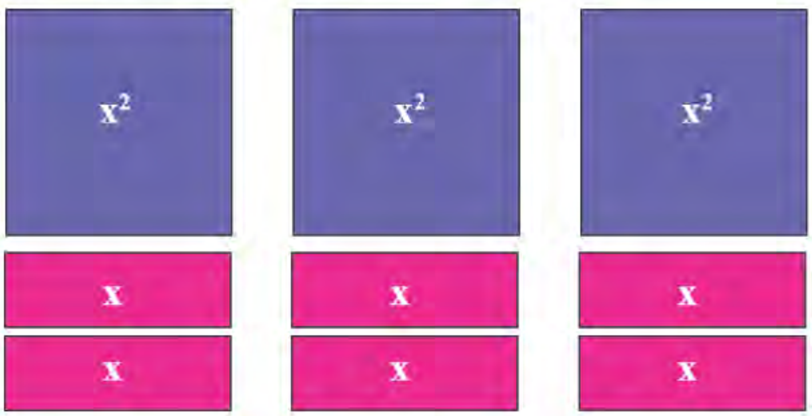
स्वयं करें $3x^2 + 6x$ का उत्पादक विश्लेषण करें।

1) नीले रंग के 3 से०मी० × 3 से०मी० वर्गाकार अनेको कार्ड बनाओं। इनमें से प्रत्येक को x^2 मानें।

बहुत से लाल रंग के 3 से०मी० × 1 से०मी० आयताकार कार्ड बनाया प्रत्येक लाल कार्ड को x मानें।



2) अब, $3x^2$ और $6x$ के लिए लिया—

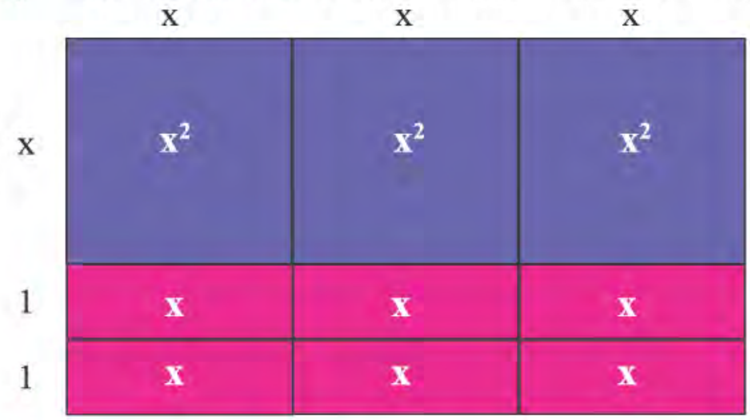


3) नीले वर्गाकार कार्ड और लाल आयताकार कार्ड नीचे की तरह सजाया। क्या पाया देखें—

इस सजावट की लम्बाई = $(3x + 6)$ इकाई एवं चौड़ाई = x इकाई

$\therefore$ क्षेत्रफल = $x\,(3x + 6)$ वर्ग इकाई।

4) नीला वर्गाकार कार्ड और लाल आयताकार कार्ड नीचे की तरह सजाया। क्या पाये देखें—

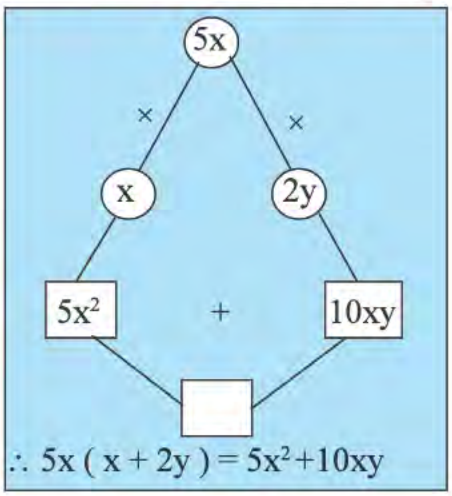


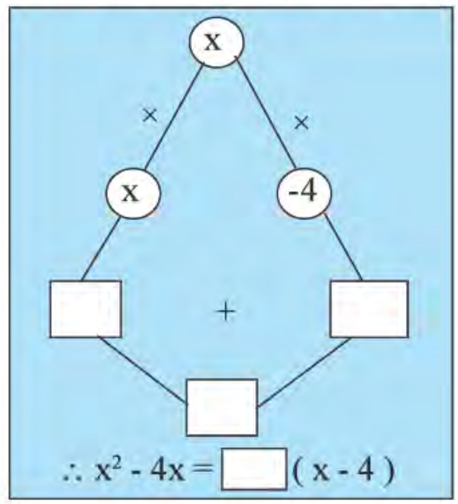
∴ क्षेत्रफल

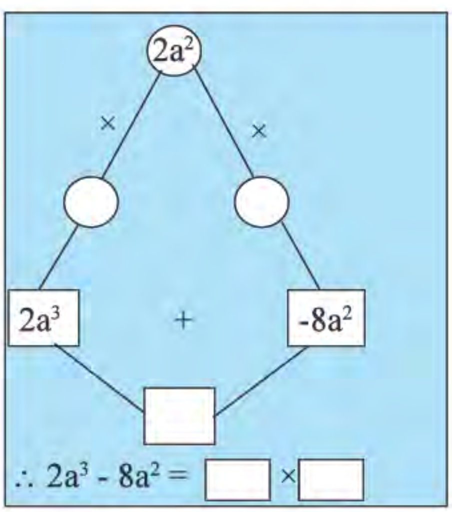
$= 3x(x + 2)$ वर्ग इकाई

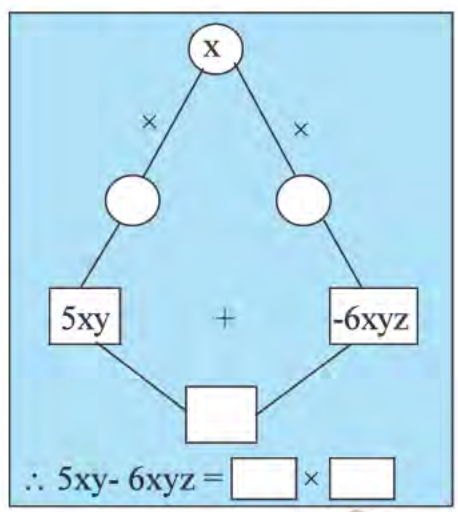
$\therefore 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

नीचे के गोलाकार घरों की संख्याओं को गुणा करें और चौकोर घरों की संख्याओं का योग करें। क्या पाते हैं देखें।









स्वयं करें—19.2

1) उत्पादक निकालो।

i) $2 + 14x$ ii) $5x - 20y$ iii) $6x - 3y$ iv) $3a^2 - 12a$

2) नीचे के बीजगणितीय राशियों का साधारण उत्पादक निकालें।

i) $6a , 2a^2$ ii) $5x , 6xy$ iii) $4xyz , 12yz$ iv) $7a^2b , 14abc$

$(x^2 + xy + 7x + 7y)$ इस बीजगणितीय राशियों का उत्पादक विश्लेषण कैसे करेंगे ? चेष्टा करें।

पहले $x^2 + xy + 7x + 7y$ को सजाकर दो दलों में बांट लेना होगा।

$(x^2 + 7y + xy + 7x)$ को कैसे सजाया जायेगा।

अब $(x^2 + xy)$ व $(7x + 7y)$ दो दलों में बांट कर उत्पादक करना होगा।

$\therefore x^2 + xy + 7x + 7y = x \times x + x \times y + 7 \times x + 7 \times y$

$= x \times (x + y) + 7 \times (x + y)$

$= (x + y)(x + 7)$ [विच्छेद नियम से]

$15pq + 15 + pq + 25p$ का उत्पादन विश्लेषण करें।

$(15pq + 15 + 9q + 25p)$ को दो दलों में बाँटे।

$(15pq + 25p) + (9q + 15)$

$= (5 \times 3 \times p \times q + 5 \times 5 \times p) + (3 \times 3 \times q + 3 \times 5)$

$= 5 \times p(3 \times q + 5) + 3(3 \times q + 5)$

$= (3 \times q + 5)(5 \times p + 3)$

$= (3q + 5)(5p + 3)$

स्वयं करें— 19.3

उत्पादक निकालो।

i) $xy + y + 3x + 3$ ii) $pq - q + 2p - 2$

iii) $6xy + 3y + 4x + 2$ iv) $10xy + 2y + 5x + 1$

बनाकर लिखें —19.1

1) नीचे के बीजगणितीय संख्याओं का उत्पादक निकाले।

(i) $7xy$ (ii) $9x^2y$ (iii) $16\ ab^2c$ (iv) $-25lmn$ (v) $12x\ (2 + x)$ (vi) $-5\ pq\ (p^2 + 8)$
(vii) $21\ xy^2 (3x - 2)$ (viii) $121\ mn\ (m^2 - n)$

2) नीचे के बीजगणितीय संख्याओं का साधारण उत्पादक निकालें।

(i) $22\ xy$, $33\ xz$ (ii) $14\ ab^2$, $21ab$ (iii) $- 16\ mnl$, $- 39\ nl^2$
(iv) $12a^2b$, $18ab^2$, $24abc$ (v) $2\ xy$, $4yz$, $6\ xz$ (vi) $18x^2$, $27x^3$, $- 45x$
(vii) $5\ mn$, $6n^2 l^2$, $7l^3m^2$

3) दो बीजगणितीय संख्याओं को लिखो जिनका साधारण उत्पादक निकलें।

i) x^2 ii) $2xy$ iii) $4a^2$ iv) $(mn + 2)$ iv) $x\ (y + 2)$

4) उत्पादक विश्लेषण करें।

i) $5 + 10x$ ii) $2x - 6$ iii) $7m - 14n$ iv) $18xy + 21xz$ v) $4xy + 6yz$
vi) $7xyz - 6xy$ vii) $7a^2 + 14a$ viii) $- 15m + 20$ ix) $6a^2b + 8ab^2$
x) $3a^2 - ab^2$ xi) $abc - bcd$ xii) $60xy^3 + 4xy - 8$
xiii) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$ xiv) $a^3 - a^2 + a$ xv) $x^2 y^2 z^2 + x^2y^2 + x^2 y^2 q^2$

5) नीचे के बीजगणितीय संख्याओं का उत्पादक निकालें।

i) $xy + 2x + y + 2$ ii) $ab - 5b + a - 5$ iii) $6xy - 9y + 4x - 6$
iv) $15m + 9 - 35mn - 21n$ v) $ax + bx - ay - by$ vi) $c -9 + 9ab - abc$

बीजगणितीय संख्याओं का उत्पादक निकालें।

प्रथम परिचित अभेदों को लिखने की कोशिश करें ।

$a^2+2ab+b^2 = \square$ —————— (I)

$a^2-2ab+b^2 = \square$ —————— (II)

$a^2-b^2 = (a+b) \times \square$ —————— (III)

i) $4x^2+4x+1$
$= (2x)^2+2.2x.1+(1)^2$
$= (2x+1)^2$ [I नं० से पाते हैं]
$= (2x+1)\times(2x+1)$

ii) $9x^2 - 6x + 1$
$= \square^2 - 2.\square.1+(1)^2$
$= (3x-1)^2$ [II नं० से पाते हैं]
$= (3x-1)\times(3x-1)$

iii) $x^2 - 4y^2$
$= x^2 - (2y)^2$
$= (x+2y)(x - 2y)$ [III नं० से पाते हैं]

iv) $16x^2 - 25y^2$
$= \square^2 - \square^2$
$= (4x+5y)(4x - 5y)$ [III नं० से पाते हैं]

v) $x^2 + 10x + 25$
$= x^2 + 2\times x \times \square + \square^2$
$= (x+5)^2 = (x+5)\times(x+5)$

vi) $25x^2 - 20x + 4$
$= \square - \square\ \square\ \square + 2^2$
$= (5x - 2)^2$

vii) $49\, m^4 - 100$
$= (7m^2)^2 - \square^2$
$= (7m^2 + 10)(7m^2 - 10)$

viii) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$
$= (a^2 - 2ab + b^2) - c^2$
$= (a - b)^2 - c^2$
$= (a - b + c)(a-b-c)$

ix) $16(3x + 2y)^2 - 9(x - 2y)^2$
$= 4^2 \times (3x + 2y)^2 - 32 \times (x - 2y)^2$
$= \{4(3x+2y)\}^2 - \{3(x-2y)\}^2$
$= A^2 - B^2$ **$4(3x + 2y) = A, 3(x - 2y) = B$ मानकर**
$= (A+B)(A-B)$
$= \{4(3x+2y) + 3(x-2y)\}\{4(3x+2y) - 3(x-2y)\}$
$= (12x+8y+3x-6y)(12x+8y-3x+6y)$
$= (12x+3x+8y-6y)(12x-3x+8y+6y)$
$= (15x+2y)(9x+14y)$

x) $(2a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2a^2+c^2)^2$
$= A^2 - B^2$ **$2a^2 + b^2 - c^2 = A$ एवं $2a^2 + c^2 = B$ मानकर**
$= (\square + \square)(\square - \square)$
$= \{(2a^2+b^2-c^2)+(2a^2+c^2)\}\{(2a^2+b^2-c^2)-(2a^2+c^2)\}$
$= \{\square\} \times \{\square\}$
$= (4a^2 + b^2) \times (b^2 - 2c^2)$
$= (4a^2 + b^2)(b^2 - 2c^2)$

उत्पादक विश्लेषण—

(i) $x^4 + 64y^4$, (ii) $a^4 + a^2b^2 + b^4$, (iii) $x^4 - 3x^2b^2 + 95^4$

(i) $x^4 + 64y^4$

$= x^4 + 64y^4 = (x^2)^2 + (8y^2)^2$

$= (x^2)^2 + (8y^2)^2 + 2.x^2.8y^2 - 2.x^2.8y^2$

$= (x^2+8y^2)^2 - 16x^2y^2$

$= (x^2+8y^2)^2 - (4xy)^2$

$= (x^2+8y^2+4xy)(x^2+8y^2-4xy)$

(ii) $a^4+a^2b^2+b^4$

$= (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2$

$= (a^2+b^2)^2 - (ab)^2$

$= (\square + \square)(\square - \square)$

दूसरे तरीके से $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ अभेद व्यवहार करके उत्पादक में विश्लेषण करने की कोशिश करें।

(i) x^4+64y^4

$= (x^2)^2 + (8y^2)^2$

$= (x^2+8y^2)^2 - 2.x^2.8y^2$

$= (x^2+8y^2)^2 - 16x^2y^2$

$= (x^2+8y^2+4xy)(x^2+8y^2-4xy)$

(ii) $a^4+a^2b^2+b^4$

$= a^4+b^4+a^2b^2$

$= (a^2)^2 + (b^2)^2 + a^2b^2$

$= (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 + a^2b^2$

$= (a^2+b^2)^2 - a^2b^2$

$= (a^2+b^2)^2 - (ab)^2$

$= (a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

(iii) $x^4 - 3x^2y^2 + 9y^4$

$= x^4 + 9y^4 - 3x^2y^2$

$= \square^2 + \square^2 - 3x^2y^2$

$= (x^2+3y^2)^2 - 2.x^2 3y^2 - 3x^2y^2$

$= (x^2+3y^2)^2 - 9x^2y^2$

$= (x^2+3y^2)^2 - (3xy)^2$

$= (\square + \square)(\square - \square)$

यदि इस प्रकार से करें

$x^4 - 3x^2y^2 + 9y^4$

$= (x^2)^2 + 2.x^2.3y^2 + (3y^2)^2 - 6x^2y^2 - 3x^2y^2$

$= (x^2+3y^2)^2 - 9x^2y^2$

$= (x^2-3y^2)^2 - (3xy)^2$

$= (\square + \square)(\square - \square)$

बनाकर लिखें — 19.2

1) उत्पादकों का विश्लेषण करें—

(i) $x^2 + 14x + 49$ (ii) $4m^2 - 36m + 81$ (iii) $25x^2+30x+9$

(iv) $121b^2 - 88bc + 16$ (v) $(x^2y)^2-4x^2y^2$ (vi) $a^4+4a^2b^2+4b^4$

(vii) $4x^2 - 16$ (viii) $121 - 36x^2$ (ix) $x^2y^2 - p^2q^2$

(x) $80m^2 - 125$ (xi) $ax^2 - ay^2$ (xii) $1 - (m + n)^2$

(xiii) $(2a - b - c)^2 - (a - 2b - c)^2$ (xiv) $x^2 - 2xy - 3y^2$

(xv) $x^2 + 9y^2 + 6xy - z^2$ (xvi) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

(xvii) $a^2 (b - c)^2 - b^2 (c - a)^2$ (xviii) $x^2 - y^2 - 6yz - 9z^2$

(xix) $x^2-y^2+4x - 4y$ (xx) $a^2-b^2+c^2-d^2-2(ac-bd)$

(xxi) $2ab-a^2-b^2+c^2$ (xxii) $36x^2-16a^2-24ab-9b^2$

(xxiii) $a^2-1+2b-b^2$ (xxiv) a^2-2a-b^2+2b

(xxv) $(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd$ (xxvi) $a^2-b^2-4ac+4bc$

(xxvii) $(a^2-b^2-c^2+d^2)^2-4(ad-bc)^2$ (xxviii) $3x^2-y^2+z^2- 2xy - 4xz$

2) उत्पादकों का विश्लेषण करें—

(i) $81x^4+4y^4$ (ii) $p^4-13p^2q^2+4q^4$ (iii) x^8-16y^8

(iv) $x^4+x^2y^2+y^4$ (v) $3x^4+2x^2y^2-y^4$ (vi) x^4+x^2+1

(vii) $x^4+6x^2y^2+8y^4$ (viii) $3x^2-y^2+z^2-2xy-4xz$

(ix) $3x^4- 4x^2y^2+y^4$ (x) $p^4-2p^2q^2-15q^4$ (xi) $x^8+x^4y^4+y^8$

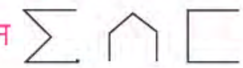
20. चतुर्भुज का वर्ग विभाजन

आज मैं, शांतनू, रफीक और श्रावणी सबने मिलकर अपने-अपने कॉपी में विभिन्न प्रकार के ज्यामीतिय चित्र बनाने का प्रयास किया। हमारे द्वारा बनाये गए चित्र समूहबद्ध चित्र होंगे। उन कागजों के चिन्ह के बराबर काटकर पिचबोर्ड में अटकाकर विभिन्न प्रकार के मॉडल बनाकर प्रदर्शनी में देंगे।

शांतनू ने बनाया —

शांतनू कई बन्द समतलीय चित्र बनाया है। इनको क्या कहेंगे जानने की कोशिश करें।

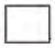
इनको बहुभूज कहते है।

लेकिन  ये बहुभुज नहीं है।

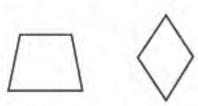
त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षटभुज इत्यादि बहुभुज है।

अर्थात् सरलरेखांश से बने जो बन्द समतलीय चित्र तीन या तीन से अधिक सरलरेखांश है, उन्हें बहुभुज कहते है।

लेकिन रफीक ने बनाया —

रफीक के चित्र में से प्रत्येक  भुजा द्वारा सीमाबद्ध समतलीय चित्र। अर्थात् रफीक विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज बनाया है।

मैं भी रफीक की तरह विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज बनाने की कोशिश करुँ।

मैंने बनाया — 

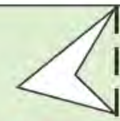
लेकिन श्रावणी दूसरे तरह का बहुभुज बनायी।

श्रावणी बनायी —

जिन रेखाओं से बने बहुभुज के सरल रेखाओं को बहुभुज की भुजा कहते है। दो भुजाओं के कटान बिन्दु को बहुभुज के शीर्षबिन्दु या कोणिक बिन्दु कहते है।

श्रावणी द्वारा बनाये गए बहुभुज हमारे बनाये बहुभुज से अलग क्यों हैं, इनकों क्या कहा जाता है ?

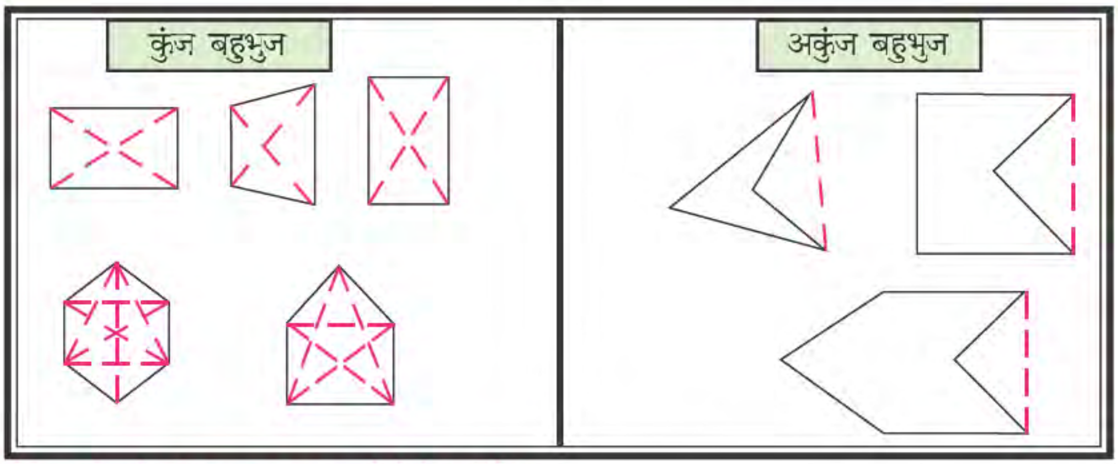
श्रावणी द्वारा बनाये गए बहुभुजों के सभी कर्ण बहुभुज क्षेत्र के भीतर नहीं है।
इस प्रकार के बहुभुज कुंज बहुभुज नहीं है। इनको अकुंज बहुभुज कहा जाता है।
अकुंज बहुभुजों का अन्त: कोण कैसे होते है देखें।



अकुंज बहुभुज

जिस बहुभुज के सभी कर्ण उस बहुभुज की आकृति के भीतर रहते है उन्हें कुंज बहुभुज कहा जाता है, कुंज बहुभुजों के अन्त:कोण कैसे होते है देखें।

कुंज बहुभुज



लेकिन किसी भी बहुभुज का कर्ण कैसे पायेंगे ?

जो कोई बहुभुज एक के बाद एक स्थित नहीं होता है उस प्रकार के दो शीर्षबिन्दु को जोड़कर कर्ण पाते है। चतुर्भुज के ☐ कर्ण। पंचभुज के ☐ कर्ण। लेकिन त्रिभुज का कोई कर्ण नहीं होता है।

त्रिभुज के भुजाओं की संख्या 3 है। कर्ण की संख्या = $\frac{3\,(3-3)}{2} = \square$

चतुर्भुज के भुजाओं की संख्या 4 है। कर्ण की संख्या = $\frac{4\,(4-3)}{2} = \square$

पंचभुज के भुजाओं की संख्या 5 है। कर्ण की संख्या = $\frac{5(5-3)}{2} = \square$

षटभुज के भुजाओं की संख्या 6 है। कर्ण की संख्या = $\frac{6(6-3)}{2} = \square$

बहुभुज के भुजाओं की संख्या n है। कर्ण की संख्या = $\frac{\square(\square-\square)}{\square}$

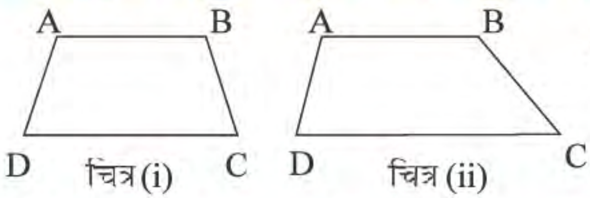
आज हमलोग अपने बनाये गए कुंज बहुभुज को लेकर जांच करेंगे।

हमलोगों ने अपने बनाये सभी चतुर्भुजों को कैंची से काटकर अलग कर लिया। देखते है कि चतुर्भुज के शीर्षबिन्दु ☐, भुजा ☐ और कोण ☐।

इन चतुर्भुज आकार के क्षेत्रों में से जिनकी एक जोड़ा भुजा विपरीत भुजा परस्पर समानान्तर है उनको एक पिचबोर्ड पर चिपका दिया।

लेकिन इस प्रकार के चतुर्भुजों को क्या कहा जाता है?

जिन चतुर्भुजों की एक जोड़ी विपरीत भुजायें परस्पर समानान्तर है। तो उसे ट्रापिजियम कहा जाता है।



ये सब ट्रापिजियम है।

इनकी AB || DC

अर्थात् AB और DC समानान्तर है।

जिन ट्रापिजियमों का एकजोड़ा विपरीत भुजा समानान्तर लेकिन दूसरी विपरीत भुजायें यदि समानान्तर न हो तो उन दो भुजाओं को क्या कहेंगे?

ऊपर के दो चित्र में ABCD ट्रापिजियम AB || DC एवं AD और BC समानान्तर नहीं है। इन असमानान्तर भुजाओं को तिर्यक भुजा कहा जाता है।

जिन ट्रापिजियमों की तिर्यक भुजाओं की लम्बाई समान होता है उस ट्रापिजियम को समद्विबाहु ट्रापिजियम कहा जाता है।

अब समझे हैं ऊपर के (ii) नम्बर चित्र में ABCD ट्रापिजियम AB || DC एवं AD और BC भुजा समानान्तर नहीं है। लेकिन (i) नम्बर चित्र के AD = BC अत: ABCD एक ☐ ट्रापिजियम होगी।

चांद और स्केल की सहायता से मापकर देखते है चित्र (i) में ∠ADC = ☐ डिग्री, ∠DCB = ☐ डिग्री, ∠ABC = ☐ डिग्री, ∠BAD = ☐ डिग्री। कर्ण BD = ☐ से०मी० और कर्ण AC = ☐ से०मी०।

∠ADC + ∠DCB = ☐ डिग्री, ∠ADB + ∠DAB = ☐ डिग्री।

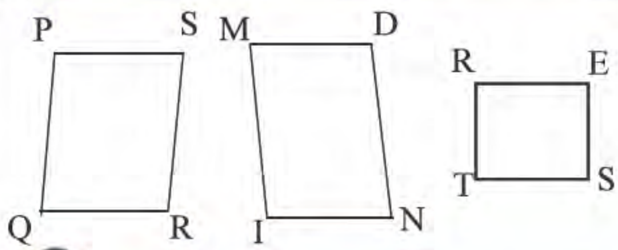
देखते है DC भुजा के दो संलग्न कोणों का योगफल दो समकोण से ☐ (कम / अधिक)।

AD भुजा के संलग्न दो कोणों के परिमाप का योगफल दो समकोण से ☐। (कम / अधिक)।

चतुर्भुज के किसी भुजा से संलग्न दो कोणों का योगफल दो समकोण हो तो अन्य दो विपरीत भुजाये परस्पर समानान्तर होगी। यह भी देखा कि ट्रापीजियम के तिर्यक दो भुजाओ की लम्बाई बराबर हो तो उनकी कोई भी समानान्तर भुजा संलग्न कोणों का परिमाप ☐ (समान / असमान) होगा एवं ट्रापिजियम के दोनों कर्ण का परिमाप ☐ (समान / असमान) होगा।

यदि ट्रापीजियम के दोनों तिर्यक परस्पर समानान्तर हो जाय, तब ट्रापिजियम को क्या कहेंगे?

यदि ट्रापीजियम के दोनों तिर्यक भुजाये परस्पर समानान्तर हो तब उसे समानान्तर चतुर्भुज कहेंगे। अर्थात् जिस चतुर्भुज की विपरीत भुजाए परस्पर समानान्तर हो उसे समानान्तर चतुर्भुज कहा जाता है। अत: समानान्तर चतुर्भुज एक ☐ (ट्रापीजियम / ट्रापीजियम नहीं)।

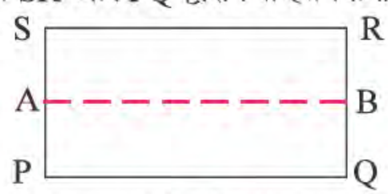


चित्र में PQRS , MIND एवं REST तीनों समानान्तर चतुर्भुज हैं क्योंकि PQ || RS एवं PS || QR
MI ☐ DN एवं MD ☐ IN ,
RE ☐ TS एवं RT ☐ ES

मैंने अपने आयताकार कॉपी के पन्ने को मोड़कर समानान्तर चतुर्भुज बनाने की कोशिश की।

1) मैं नीचे के चित्रों की तरह कॉपी के एक पन्ना को लेकर एक समानान्तर चतुर्भुज चित्र (ii) की तरह बीच में समान रूप से मोड़कर पन्ने के दोनों किनारे को SR और PQ द्वारा चिन्हित किया।

चित्र (i)



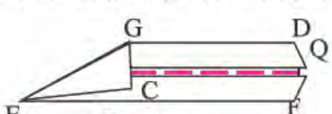
चित्र (ii)

2) अब मैं चित्र (iii) की तरह CD और EF सरलरेखा के बराबर ऐसे मोड़ा कि SR और PQ किनारे AB सरलरेखा के साथ मिल जाय एवं चित्र (iv) की तरह देखने में लगे।

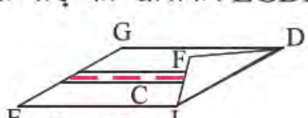
चित्र (iii)

चित्र (iv)

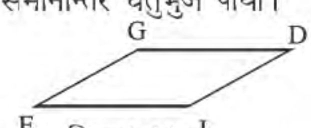
3) इसके बाद C और F कोई दो चित्र (v) व (vi) की तरह ऐसा मोड़ा जिससे CG और FL दोनों किनारे ठीक पास पास बैठे जाये। पन्ने के मोड़ को खोलकर EGDL समानान्तर चतुर्भुज पाया।



चित्र (v)



चित्र (vi)

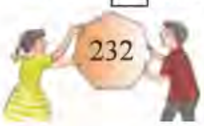


चित्र (vii)

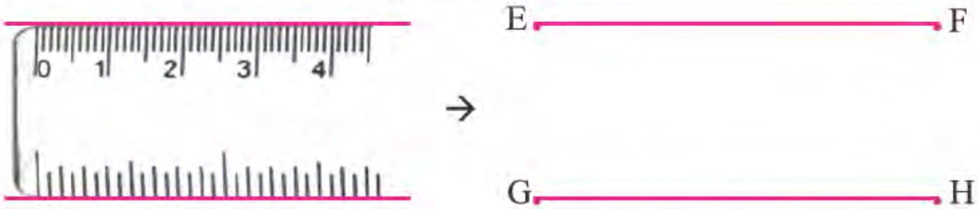
इस अवस्था में EG || LD, GD || EL ∴ EGDL एक समानान्तर चतुर्भुज है।

माप कर देखें, EL = ☐ से०मी०, LD = ☐ से०मी०, GD = ☐ से०मी०, EG = ☐ से०मी०।

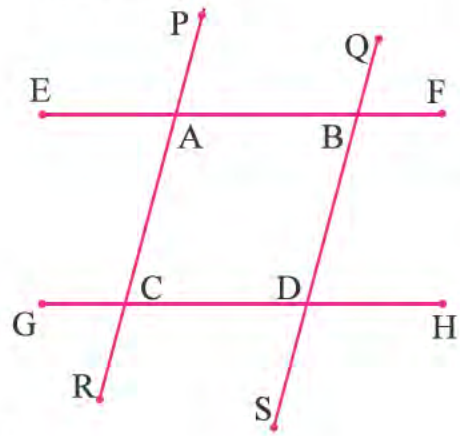
∴ EG ☐ LD [= अथवा ≠ बैठाएँ] एवं EL ☐ GD [= अथवा ≠ बैठाएँ]



मैं अपने स्केल की सहायता से समानान्तर चतुर्भुज बनाया। अनुभूमिक रूप से स्केल को बैटाकर दोनों किनारे पर दो समानान्तर सरल रेखा खींचा।



अब तिर्यक रूप से स्केल बैठाकर अन्य दो समानान्तर सरल रेखा बनाया।



ABCD समानान्तर चतुर्भुज के AB की विपरीत भुजा। ☐

AB के सन्निहित भुजा ☐ और ☐

स्केल की सहायता से मापकर देखते हैं, AB ☐ DC [= अथवा ≠ बैठाये]

स्केल की सहायता से मापकर देखरे है, AD ☐ BC [= अथवा ≠ बैठाये]

चांद की सहायता से मापकर देखते है,

$\angle$DAB = ☐ डिग्री, $\angle$ABC = ☐ डिग्री, $\angle$DCB = ☐ डिग्री और $\angle$ADC = ☐ डिग्री।

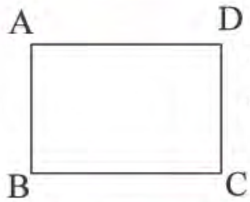
$\angle$DAB + $\angle$ADC = ☐ डिग्री। $\angle$ADC + $\angle$DCB = ☐ डिग्री

फिर, $\angle$BAD ☐ $\angle$BCD, $\angle$ABC ☐ $\angle$ADC [= अथवा ≠ बैठाये]

देखते है कि समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजाओं की लम्बाई बराबर एवं विपरीत कोण का मान भी बराबर है, लेकिन समानान्तर चतुर्भुज के एक कोण का परिमाप 90° हो तो क्या मिलेगा।

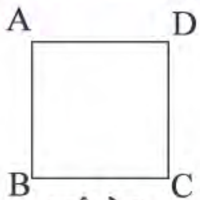
समानान्तर चतुर्भुज के एक कोण का परिमाप 90° हो तो आयत क्षेत्र मिलेगा।

अर्थात् जो समानान्तर चतुर्भुज के एक कोण का परिमाप 90° हो तो उसे आयत क्षेत्र कहते है।



ABCD एक आयतक्षेत्र का ∠ ABC = 90°
लेकिन देखते है ∠ BCD = ∠ CDA = ∠ DAB = □ डिग्री [स्वयं मापकर देखें]
फिर, AB □ DC [= अथवा ≠ बैठाये]
AD □ BC [= अथवा ≠ बैठाये]

मैं एक आयत क्षेत्र बनाया जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर है। इसका नाम क्या वर्ग क्षेत्र है। भुजा और कोणों को मापकर देखें क्या पाते हैं।

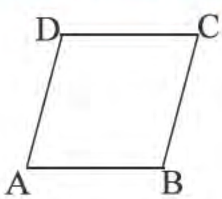


वर्ग क्षेत्र

कागज ABCD वर्ग क्षेत्र के AB = DC = DC = AD = □ से०मी०।
∠ ABC = ∠BCD = ∠CDA = ∠DAB = □ डिग्री [स्वंय करें]
∠ BAD + ∠ ABC = □ डिग्री। ∠ ABC + ∠ BCD = □ डिग्री

मैंने एक समानान्तर चतुर्भुज बनाया जिसका एक जोड़ा सन्निहित भुजा की लम्बाई बराबर है। इस प्रकार के समानान्तर चतुर्भुज को क्या कहेंगे ?

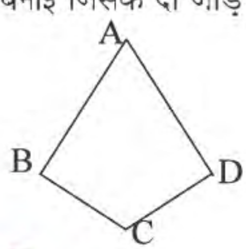
जिस समानान्तर चतुर्भुज की सन्निहित भुजाओं की लम्बाई बराबर होती है, उसे राम्बस कहा जाता हैं। अर्थात् राम्बस के प्रत्येक भुजा की लम्बाई बराबर होती है।



स्केल की सहायता से मापकर देखते है AB = BC = CD = AD = □ से०मी०
ABCD वर्ग क्षेत्र
∠ BAC = □ डिग्री, ∠BCD = □ डिग्री, ∠ADC = □ डिग्री और
∠ABC = □ डिग्री
∠ BAD □ ∠ BCD और ∠ ADC □ ∠ ABC [= अथवा ≠ बैठाये]

वर्ग क्षेत्र के प्रति भुजाओं की लम्बाई बराबर होती है। वर्ग क्षेत्र भी एक प्रकार का राम्बस है। (स्वयं करें)
फिर वर्ग क्षेत्र एक समानान्तर चतुर्भुज है। जिसके एक कोण का माप 90° और एक जोड़े संलग्न भुजाओ की लम्बाई बराबर है।
∴ वर्ग क्षेत्र क्या एक प्रकार का आयत क्षेत्र है ? (सोचकर देखें)

रफीक की बहन अनवरा हमारे साथ कागज काटकर एक चतुर्भुज और वृत बनाई है। वह कुछ नए तरह की चतुर्भुज बनाई जिसके दो जोड़े संलग्न भुजाओं की लम्बाई बराबर है।

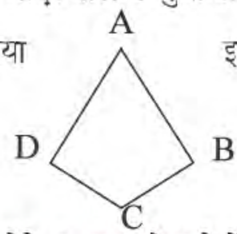


ABCD चतुर्भुज की संलग्न भुजा AB = AD और BC = DC

इस प्रकार के चतुर्भुज को क्या कहेंगे ?

जिस चतुर्भुज की दो जोड़ी संलग्न भुजाओं की लम्बाई बराबर हो, उसको क्या कहेंगे ?

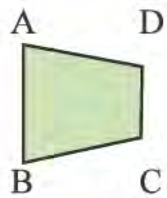
कागज काटकर लगाया



इस चित्र में AB = AD और BC = DC

लेकिन AB = BC होने पर क्या होता देखें [स्वयं करें]

मैं विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के कोणों को चांद की सहायता से मापेंगे और इनमें सम्पर्क खोजेंगे।



मैं कागज पर चतुर्भुज बनाकर काट लिया।

→ चांद की सहायता से मापे।

$\angle$BAD = □ डिग्री, $\angle$ABC = □ डिग्री,

$\angle$BCD = □ डिग्री, $\angle$ADC = □ डिग्री

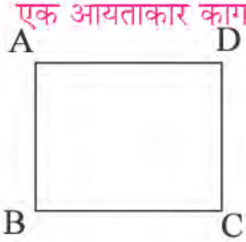
$\angle$BAD + $\angle$ABC + $\angle$BCD + $\angle$ADC = □ डिग्री + □ डिग्री + □ डिग्री + □ डिग्री = □ डिग्री।

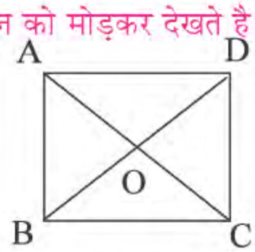
स्वयं करें — 20.1

स्केल को बैठाकर एक समानान्तर चतुर्भुज बनायें और समानान्तर चतुर्भुज के विपरीत भुजा और विपरीत कोण मापकर उनके बीच सम्पर्क खोजें। चार कोणों का योग कितना होगा देखें।

शांतनू और रफीक कुछ चतुर्भुज की आकृति को कागज से काट लिए है। वे कागज के विपरीत कोणिक बिन्दु के बराबर मोड़कर कर्ण खोज रहे है और उनमें सम्पर्क स्थापित कर रहे है।

एक आयताकार कागज को मोड़कर देखते है —





ABCD आयतक्षेत्र के कर्ण AC = □ से०मी० और कर्ण BD = □ से०मी०।

AC का मध्य बिन्दु O पाया [मोड़कर]

BD का मध्य बिन्दु पाया □ बिन्दु।

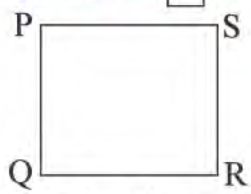
चांद की सहायता से मापकर देखते हैं $\angle$AOD = □ डिग्री = $\angle$BOC

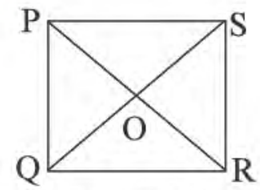
$\angle$AOB = □ डिग्री = □ [$\angle$AOD / $\angle$DOC]

देखते हैं, आयत क्षेत्र के दोनों कर्ण की लम्बाई □ [समान / असमान] एवं O बिन्दु पर दोनों कर्ण समद्विभाजित होते है।

हम PQRS वर्गाकार कागज के कर्ण को बराबर मोड़कर क्या पाते हैं, देखें।

PQRS वर्गक्षेत्र का कर्ण PR = □ से॰मी॰





कर्ण PR को बराबर करके मोड़ें। फिर कर्ण QS को बराबर करके मोड़ें।

कागज को मोड़कर PR कर्ण का मध्य बिन्दु O पाया एवं QS कर्ण का मध्य बिन्दु □ है।

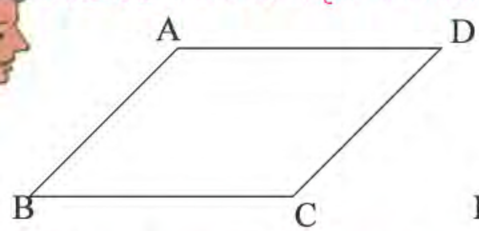
फिर PO = OS = OR = □

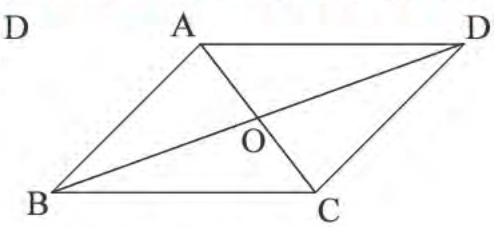
चांद की सहायता से मापकर देखें ∠ POQ = □ डिग्री

∴ ∠ POQ = ∠ QOR = ∠ ROS = ∠ SOP = 90 डिग्री

∴ वर्ग क्षेत्र के दोनों कर्ण की लम्बाई □ [बराबर / बराबर नहीं] एवं दोनों कर्ण O बिन्दु पर समकोण में समद्विभाजित हुए है।

मैं ABCD समानान्तर आकृति के कागज के कर्ण को बराबर करके मोड़ा एवं मापकर देखा —





देखते हैं कि ABCD समानान्तर चतुर्भुज का AO = OC एवं DO = BO

∴ समानान्तर चतुर्भुज के दोनों कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

मैं PQRS राम्बस के आकार में कागज को मोड़कर देखा कि दोनों कर्ण की लम्बाई □ [समान / असमान]

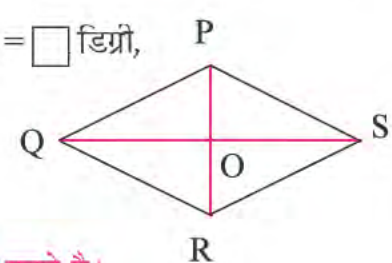
(स्वंय करें)

लेकिन PO = RO एवं QO = SO

चांद की सहायता से मापकर देखे, ∠ POS = □ डिग्री, ∠ POQ = □ डिग्री,

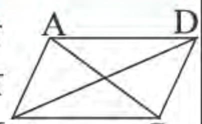
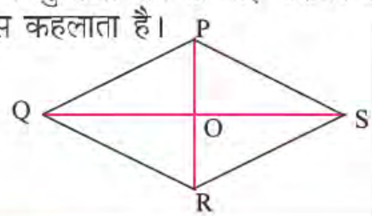
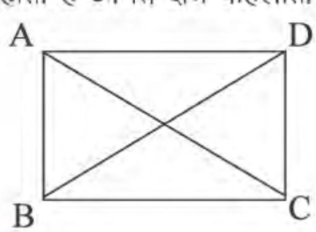
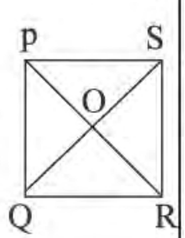
∠ QOR = □ डिग्री, ∠ ROS = □ डिग्री

∴ ∠ POS= ∠ POQ = ∠ QOR = ∠ ROS = □ डिग्री

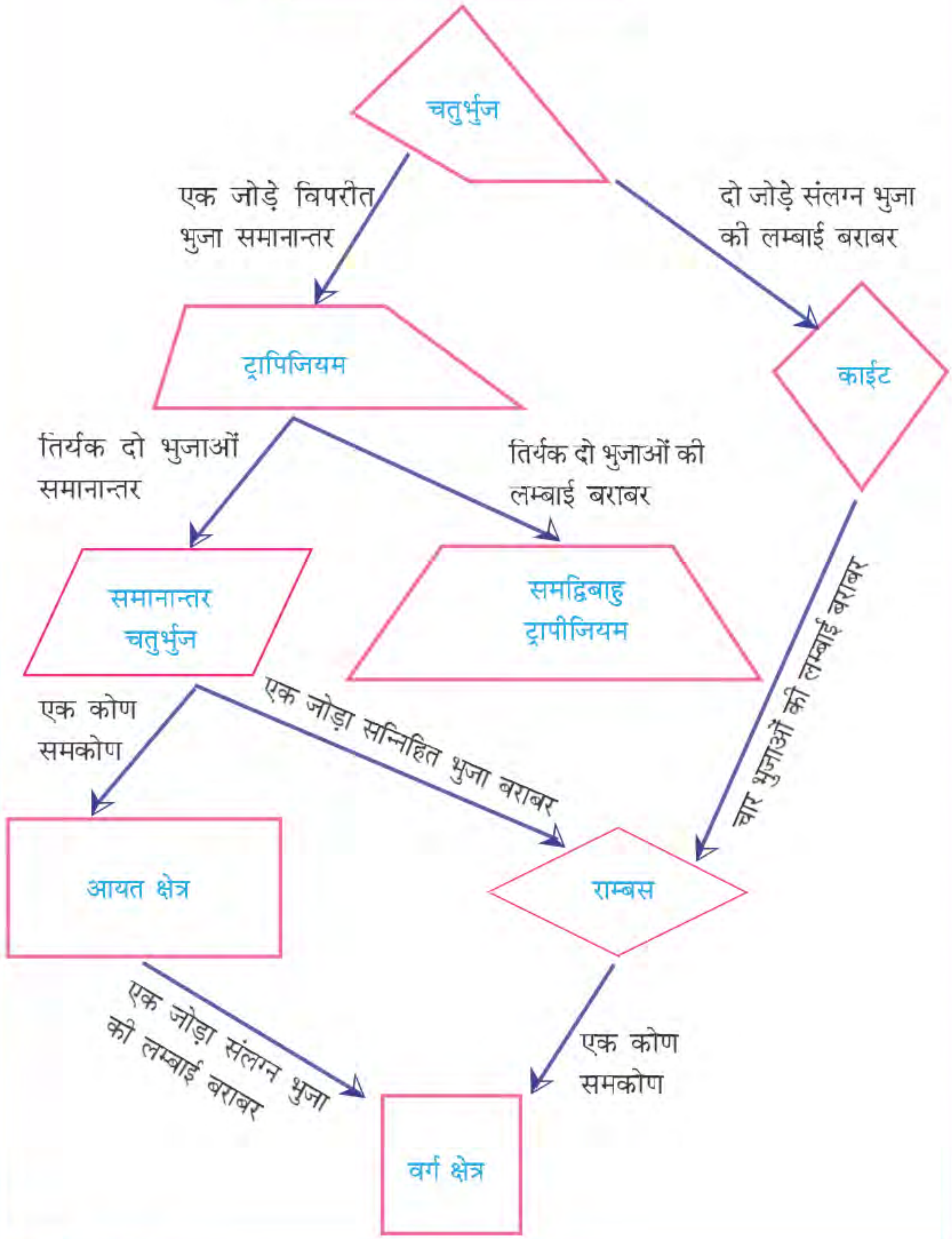


राम्बस के दोनों कर्ण परस्पर एक दूसरे को समकोण में विभाजित करते है।

हमलोग जो पाये उसे नीचे के घरों में लिखने की कोशिश करें।

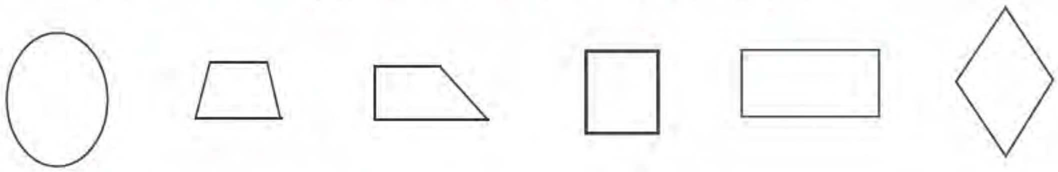
<table>
<tr><th>चतुर्भुज</th><th>स्वयं मिला</th></tr>
<tr><td>समानान्तर चतुर्भुज :
जिस चतुर्भुज की विपरीत भुजायें परस्पर समानान्तर होती है वह समानान्तर चतुर्भुज होता है।

</td><td>1) विपरीत भुजाओं की लम्बाई बराबर।
2) विपरीत कोणों का माप बराबर।
3) दोनों कर्ण की लम्बाई ☐ (समान / असमान)
4) दोनों कर्ण परस्पर को समद्विभाजित करते है।</td></tr>
<tr><td>रम्बस :
जिस समानान्तर चतुर्भुज का एक जोड़ा संलग्न भुजाओं की लम्बाई बराबर हो रम्बस कहलाता है।

</td><td>1) सभी भुजाओं की लम्बाई बराबर।
2) विपरीत कोणों का परिमाप बराबर।
3) दोनों कर्ण की लम्बाई ☐ (बराबर / बराबर नहीं)
4) दोनों कर्ण परस्पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।</td></tr>
<tr><td>आयत क्षेत्र :
जिस समानान्तर चतुर्भुज का एक कोण 90° होता है आयत क्षेत्र कहलाता है।

</td><td>1) विपरीत भुजाओं की लम्बाई ☐ (बराबर/बराबर नहीं)।
2) प्रत्येक कोण का परिमाप ☐ डिग्री।
3) दोनों कर्ण की लम्बाई ☐ (बराबर / बराबर नहीं)
4) दोनों कर्ण परस्पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।</td></tr>
<tr><td>वर्गक्षेत्र :
जिस आयत क्षेत्र का एक जोड़ा संलग्न भुजा की लम्बाई बराबर हो उसे वर्गक्षेत्र कहते हैं।

</td><td>1) विपरीत भुजा की लम्बाई ☐ (बराबर/बराबर नहीं)।
2) प्रत्येक कोण का परिमाप ☐ डिग्री।
3) दोनों कर्ण ☐ (बराबर / बराबर नहीं)
4) दोनों कर्ण एक दूसरे को परस्पर समकोण में समद्विभाजित करते है।</td></tr>
</table>

चतुर्भुज का वर्ग विभाग



बनाकर देखें — 20

1. नीचे के चित्रों में से चतुर्भुज को अलग करें तथा वे कौन से चतुर्भुज है लिखें —



2. खाली स्थानों की पूर्ति करें —

   i) समद्विबाहु ट्रापिजियम के तिर्यक दोनों भुजाओं की लम्बाई □ (बराबर / बराबर नहीं)।

   ii) ट्रापिजियम के दो जोड़े विपरीत भुजा समानान्तर हो तो □ होगा।

   iii) समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजाएँ परस्पर □ (समानान्तर / असमानान्तर) होती है।

   iv) समानान्तर चतुर्भुज के एक कोण का परिमाप 90° हो तो □ (आयत क्षेत्र / रम्बस) होता है।

   v) चतुर्भुज के □ कर्ण होते है।

   vi) रम्बस के दो कर्ण परस्पर को □ समद्विभाजित करती है।

   vii) आयत क्षेत्र के विपरीत भुजाओं की लम्बाई परस्पर □ (समान / असमान) होती है।

   viii) राम्बस एक विशेष प्रकार का □ (वर्गक्षेत्र / समानान्तर चतुर्भुज) है।

   ix) समानान्तर चतुर्भुज के दोनों कर्ण परस्पर को □ करते है।

3. कागज काटकर स्वयं से जांच करे—

   i) वर्ग क्षेत्र के दोनों कर्ण परस्पर एक दूसरे को समकोण में समद्विभाजित करते है।

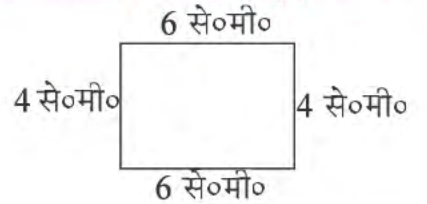
   ii) आयत क्षेत्र के दोनों कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

21. चतुर्भुज बनाना

हमलोग विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों को काटकर पिचबोर्ड पर चिपका रहे है। जिन चतुर्भुजों को पाये है उन्हें लिख रहे है।

आज विभिन्न लम्बाई की काठियों को सूता से बाँधकर विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज बनायें।

कौशिक ने 4 से०मी० और 6 से०मी० लम्बाई की काठियों से आयत क्षेत्र बनाया।



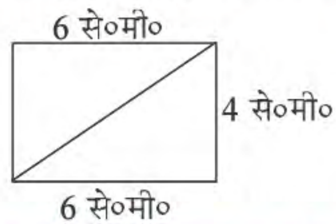
रमा ने भी कौशिक की तरह 4 से०मी० और 6 से०मी० लम्बी काठियों से आयत क्षेत्र बनाने की कोशिश किया। लेकिन अच्छी तरह से न बांध पाने के कारण वह थोड़ा टेढ़ा हो गया। जिससे समानान्तर चतुर्भुज पाया।

मैं भी एक ही माप की काठी से बनाया, लेकिन मैं दूसरे प्रकार का समानान्तर चतुर्भुज पाया।

अतः हम देखते है कि एक ही माप की काठियों से विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज बनाया गया। त्रिभुज का तीन भुजायों की लम्बाई यदि मालूम हो तो उससे निर्दिष्ट चतुर्भुज बनाया जा सकता है। लेकिन चतुर्भुज के चारों भुजाओं का माप मालूम रहने पर भी कोई निर्दिष्ट चतुर्भुज नहीं बनाया जा सकता है। अतः चतुर्भुज बनाने के लिए किन–किन शर्तों का प्रयोजन पड़ता है।

जयिता ने एक और काठी तिरछा–तिरछी लगाकर एक निर्दिष्ट चतुर्भुज बनाने की कोशिश की।

जयिता ने किया →



अब एक निर्दिष्ट चतुर्भुज पायें,

∴ निर्दिष्ट चतुर्भुज पाने के लिए केवल चार भुजाओं की लम्बाई आवश्यक नहीं है, बल्कि उसके एक कर्ण की लम्बाई भी आवश्यक है।

पहले मैं एक निर्दिष्ट त्रिभुज बनाने के लिए जो जानकारी पाया हूँ उनको लिखें।

1) तीन भुजाओं की लम्बाई

2) [ ]

3) [ ]

4) समकोण त्रिभुज के लिए एक अतिभुज और समकोण के किसी एक भुजा की लम्बाई।

अब जानकारी शर्तों के अनुसार चतुर्भुज को बनायेंगे।

i) चार भुजाओं की लम्बाई और एक कर्ण की लम्बाई रहने पर।

ii) चार भुजाओं की लम्बाई और एक कोण का माप मालूम रहने पर।

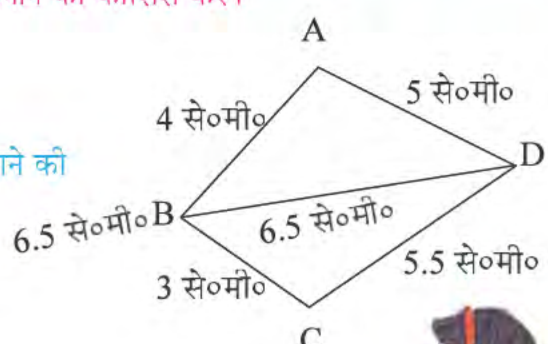
iii) तीन भुजाओं की लम्बाई और दो अन्तर्भुक्त कोणों का माप मालूम रहने पर।

iv) दो सन्निहित भुजाओं और तीन कोणों का माप मालूम रहने पर।

v) जब किसी विशेष परिस्थिति के विषय में जानकारी होने पर। [जैसे–वर्ग क्षेत्र का कर्ण मालूम रहने पर]

हमलोगों ने तय किया है कि कौशिक विभिन्न भुजाओं और कोणों का माप ब्लैकबोर्ड पर लिखेगा। रमा उसी के अनुसार अपने कॉपी पर चित्र को अंकित करेगी। मैं और जयिता उसी माप के अनुसार कॉपी पर पेंसिल कम्पास और स्केल की सहायता से चतुर्भुज बनाने की कोशिश करेंगें।

1 कौशिक ने लिखा — AB = 4 से०मी०, BC = 3 से०मी०, CD = 5.5 से०मी०, DA = 5 से०मी०, व BD = 6.5 से०मी० हो तो ABCD चतुर्भुज बनाने की कोशिश करें।



रमा ने एक चित्र बनाया :

मैं स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से बनाने की कोशिश किया।

A ——— 4 से०मी० ——— B

B ——— 3 से०मी० ——— C

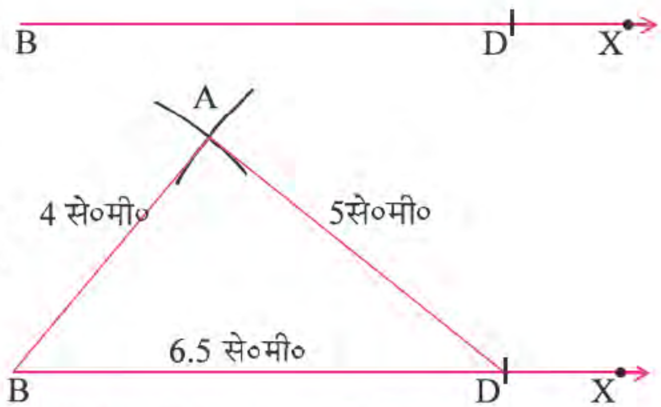
C ——— 5.5 से०मी० ——— D

D ——— 5से०मी० ——— A

B ——— 6.5 से०मी० ——— D

1) सर्वप्रथम स्केल की सहायता से BX एक किरण बनाकर पैंसिल कम्पास की सहायता से 6.5 से॰मी॰ लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर BD सरल रेखा काट लिया।

2) उसके बाद रमा द्वारा बनाया गये चित्र देखकर त्रिभुज के भुजा - भुजा - भुजा पद्धति से त्रिभुज ABD बनाया।



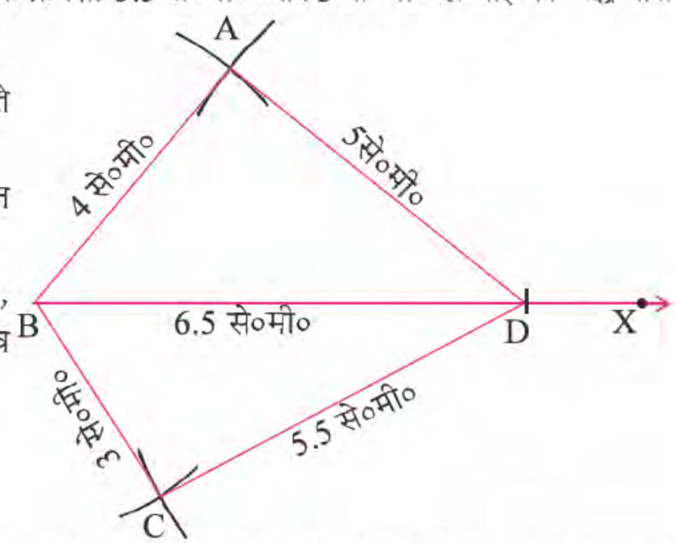
3) BD सरलरेखा के जिस तरफ A बिन्दु है C बिन्दु उसके विपरीत तरफ है।

अत: D बिन्दु एवं B बिन्दु को केन्द्र करके क्रमश: 5.5 से॰मी॰ और 3 से॰मी॰ लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर दो वृत का चाप बनाया।

वृतचाप एक दूसरे को C बिन्दु पर काटते है।

B,C एवं D,C को मिलाकर चतुर्भुज ABCD पाया।

जहाँ AB = 4 से॰मी॰, BC = 3 से॰मी॰, CD = 5.5 से॰मी॰, DA = 5 से॰मी॰ व BD = 6.5 से॰मी॰।



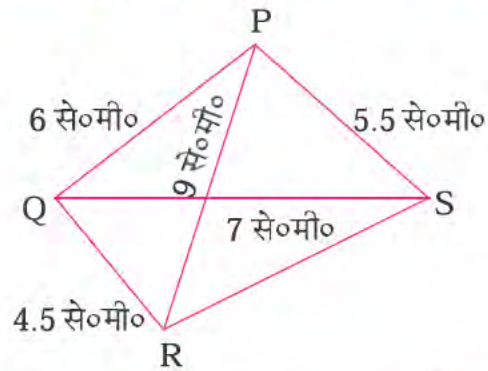
स्वंय करें — 21.1

1) मैंने एक चतुर्भुज REST बनाया। जिसकी भुजा RE = 6 से॰मी॰, ES = 4.5 से॰मी॰, ST = 5 से॰मी॰, TR = 5.5 से॰मी॰, और ET = 7.5 से॰मी॰।
2) मैं एक समानान्तर चतुर्भुज बनाया जिसकी सन्निहित भुजाओं की लम्बाई 5 से॰मी॰ और 8 से॰मी॰ एवं कर्ण की लम्बाई 10 से॰मी॰ है। (संकेत : समानान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजाएँ बराबर है, अत: चार भुजाओं की लम्बाई क्रमश: 5 से॰मी॰, 8 से॰मी॰, 5 से॰मी॰, और 8 से॰मी॰ है)।
3) मैं एक चतुर्भुज का चित्र बनाकर देखा कि LAND चतुर्भुज बनाया जा सकता है या नहीं, जहाँ LA = 4 से॰मी॰, AN = 5 से॰मी॰, ND = 4 से॰मी॰, DL = 6.5 से॰मी॰ और AD = 10 से॰मी॰।
4) मैं एक राम्बस बनाकर देखा कि उसके एक भुजा की लम्बाई 3 से॰मी॰ और कर्ण की लम्बाई 10 से॰मी॰ है। (संकेत — राम्बस के प्रत्येक भुजा की लम्बाई बराबर होती है)।

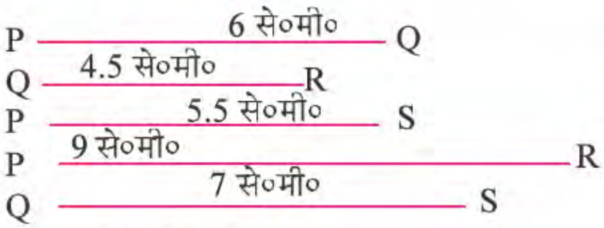
2 किसी चतुर्भुज के दो कर्णों की लम्बाई तथा किसी तीन भुजाओं की लम्बाई ज्ञात रहने पर निर्दिष्ट चतुर्भुज बनाने की चेष्टा करे।

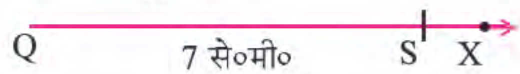
कौशिक ने लिखा — PQRS चतुर्भुज के PQ = 6 से०मी०, QR =4.5 से०मी०, PS = 5.5 से०मी० PR = 9 से०मी०, QS = 7 से०मी०।

रमा एक चित्र बनाई

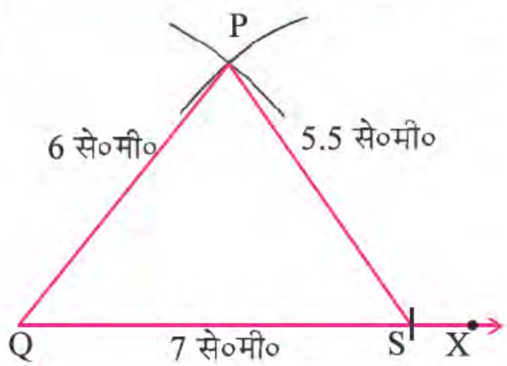


मैं स्केल व पेंसिल कम्पास की सहायता से बनाने की कोशिश की।



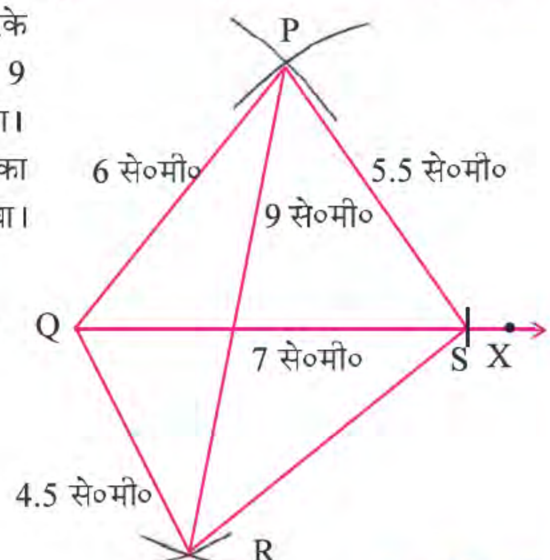


(i) सबसे पहले स्केल की सहायता से QX एक किरण बनाकर QX किरण से पेंसिल कम्पास की सहायता से 7 से०मी० लम्बाई का QS सरलरेखा काट लिया।



(ii) इसके पश्चात PQS एक त्रिभुज बनाया (भुजा - भुजा -भुजा विधि से)।

(iii) अब R बिन्दु पाने के लिए P बिन्दु को केन्द्र करके QS के जिस तरफ P बिन्दु है उसके विपरीत तरफ 9 से०मी० लम्बे अर्द्धव्यास को लेकर एक चाप बनाया। फिर Q बिन्दु को केन्द्र करके 4.5 से०मी० लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर एक ही तरफ और एक वृत चाप खींचा। चाप दोनों को परस्पर R बिन्दु पर काटती है।



QR और SR को मिलाकर PQRS चतुर्भुज पाया।

जहाँ PQ = ☐ से०मी०

QR = ☐ से०मी०, PS = ☐ से०मी०

कर्ण PR = ☐ से०मी०

कर्ण QS = ☐ से०मी०

स्वंय करें — 21.2

1) एक चतुर्भुज GOLD बनाये जिसके दो कर्ण GL = 8 से०मी० और DO = 10 से०मी० एवं अन्य तीन भुजायें GO = 6 से०मी०, OL = 5 से०मी० और DL = 5.6 से०मी० है। GD की लम्बाई स्केल से मापकर लिखें।

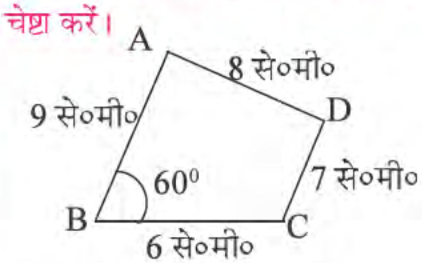
2) एक राम्बस REST बनायें जिसके दो कर्ण RS = 6.8 से०मी० और ET = 7.2 से०मी० है।

[संकेत : राम्बस के दोनों कर्ण एक दूसरे को ☐ कोण पर समद्विभाजित करते है। पहले ज्यामितीय उपाय से ET कर्ण को लम्ब का समद्विभाजक बनायेंगे। बाद में ET कर्ण के मध्यबिन्दु को केन्द्र करके ET कर्ण के लम्ब को समद्विभाजक से RS कर्ण के आधे लम्बी लम्ब समद्विभाजक के दोनों तरफ काटकर राम्बस पायेंगे]

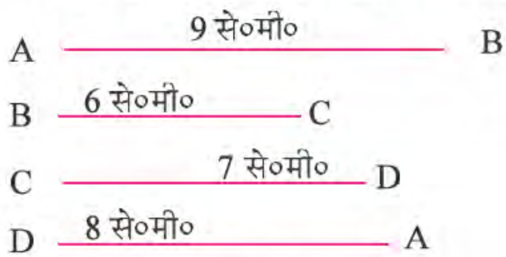
3 चतुर्भुज के चार भुजा की लम्बाई और निर्दिष्ट दो भुजा के बीच एक कोण का माप मालूम है। निर्दिष्ट चतुर्भुज बना पाते है या नहीं देखें।

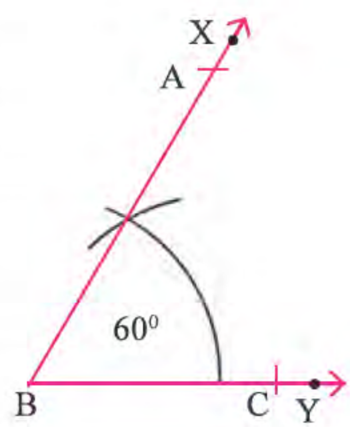
ABCD चतुर्भुज की भुजा AB = 9 से०मी०, BC = 6 से०मी०, CD = 7 से०मी०, DA = 8 से०मी० एवं ∠ABC = 60°, ABCD चतुर्भुज बनाने की चेष्टा करें।

रमा एक चतुर्भुज बनायी



i) जयिता स्केल और पेंसिल की सहायता से 9 से०मी०, 6 से०मी०, 7 से०मी० और 8 से०मी० लम्बाई की 4 सरल रेखा बनाई।





ii) इसके बाद स्केल और पेंसिल की सहायता से BY एक किरण खींचा। B बिन्दु पर कम्पास की सहायता से 60° का कोण ∠XBY बनाया।

iii) BX और BY किरण के ऊपर A और C बिन्दु है। अतः B बिन्दु को केन्द्र मानकर BX और BY के ऊपर क्रमशः 9 से०मी० और 6 से०मी० लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर दो वृत का चाप खींचा एवं A और C बिन्दु पाया।

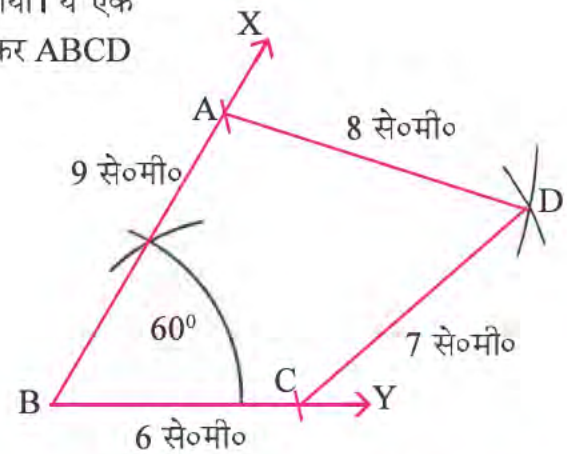
iv) A और C बिन्दु को केन्द्र करके क्रमशः 8 से०मी० और 7 से०मी० लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर दो वृतचाप बनाया। ये एक दूसरे को D बिन्दु पर काटते है। AD और CD जोड़कर ABCD चतुर्भुज पाया। जिसका AB = ☐ से०मी०।

BC = ☐ से०मी०

DC= ☐ से०मी०

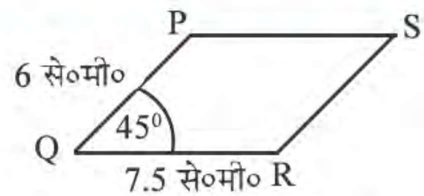
DA = ☐ से०मी०

∠ABC = ☐ डिग्री



4 एक समानान्तर चतुर्भुज PQRS बनाये जिसकी संलग्न दो भुजा PQ = 6 से०मी० और QR = 7.5 से०मी० एवं ∠PQR = 45°

रमा एक चित्र बनाई

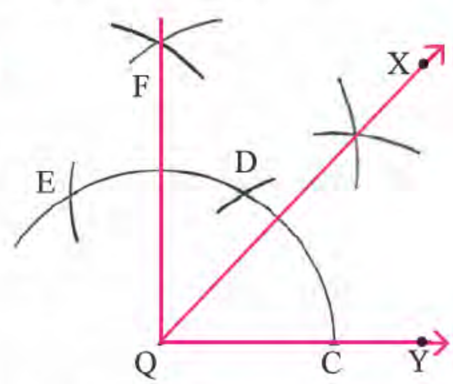


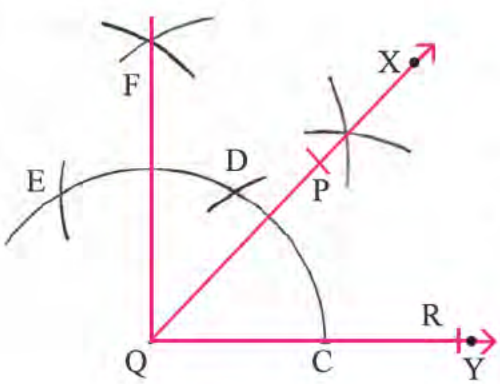
i) जयिता स्केल और पेंसिल की सहायता से 6 से०मी० और 7.5 से०मी० लम्बी दो सरल रेखा खींची।

6 से०मी०

7.5 से०मी०

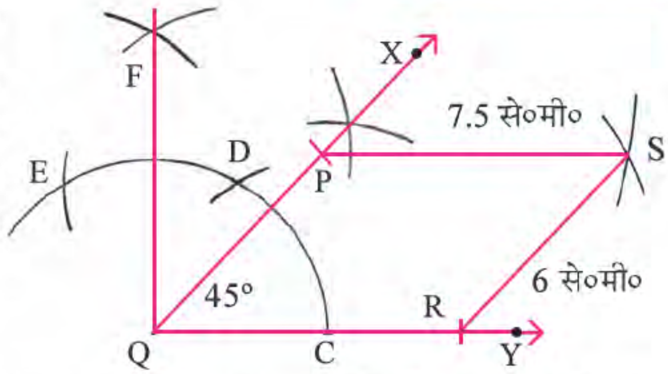
ii) अब स्केल की सहायता से QY एक किरण खींचा एवं Q बिन्दु पर पेंसिल कम्पास की सहायता से 45° का कोण ∠YQX बनाया।





iii) QX और QY किरण के ऊपर क्रमशः ☐ और ☐ बिन्दु है। अत: QX और QY किरण से 6 से०मी० और 7.5 से०मी० लम्बाई को मापकर क्रमंशः QP और QR दो सरल रेखा काट लिया।

iv) P और R बिन्दु को केन्द्र करके ∠XQY के भीतर क्रमश: 7.5 से०मी० और 6 से०मी० लम्बाई के अर्द्धव्यास को लेकर दो वृत्तचाप खींचा जो एक दूसरे को ☐ बिन्दु पर काटते है। PS व RS मिला दिया तो PQRS समानान्तर चतुर्भुज पाया।



स्वयं करें — 21.3

1) एक चतुर्भुज LAND बनाये जिसके LA = 6.5 से०मी०, AN = 5.4 से०मी०, ND = 4 से०मी०, DL = 3.5 से०मी०, ∠LAN = 45° है।

2) एक समानान्तर चतुर्भुज GATE बनायें जिसके संलग्न दो भुजायें GA = 7 से०मी० और AT = 5 से०मी० एवं ∠GAT = 45° है।

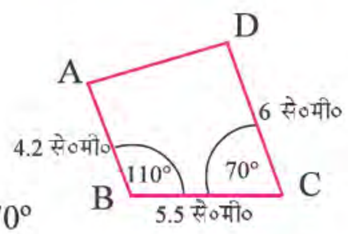
3) मैं एक आयत क्षेत्र RICH बनाया जिसकी भुजा RI = 4 से०मी० एवं CI = 7.5 से०मी० है। [संकेत – आयत क्षेत्र के विपरीत भुजायें बराबर एवं प्रत्येक कोण ☐ डिग्री]

4) एक राम्बस बनाओं जिसका एक कोण 60° एवं प्रत्येक भुजा की लम्बाई 6.5 से०मी० है।

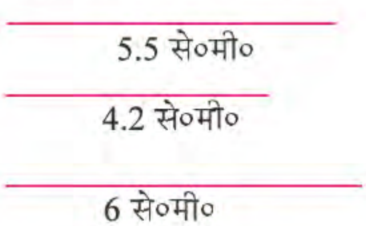
5) एक वर्गक्षेत्र PATH बनाओं जिसके प्रत्येक भुजा की लम्बाई 8 से०मी० है।

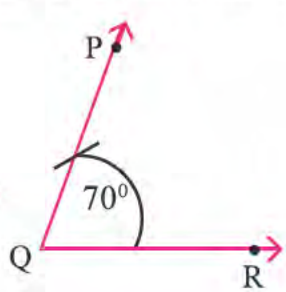
5 एक चतुर्भुज बनाओं जिसकी भुजा AB = 4.2 से०मी०, BC = 5.5 से०मी०, CD = 6 से०मी० एवं ∠ABC = 110° एवं ∠BCA = 70° ।

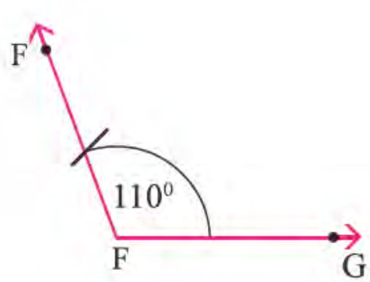
रमा ने एक चतुर्भुज बनाया



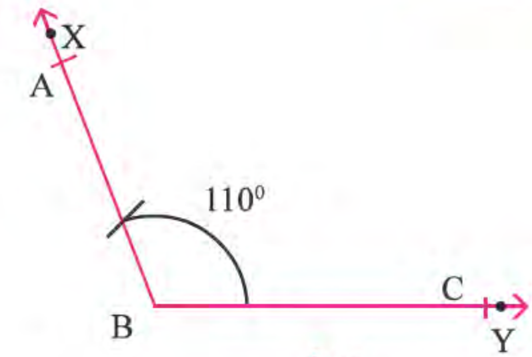
1) सर्वप्रथम चांद की सहायता से ∠EFG = 110° और ∠PQR = 70° बनाया। इसके पश्चात् स्केल की सहायता से 4.2 से०मी०, 5.5 से०मी० और 6 से०मी० लम्बाई की तीन सरल रेखा बनाया।



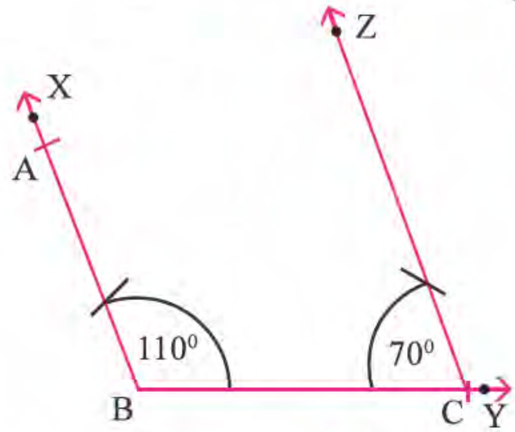




(ii) ∠EFG = 110° के बराबर ∠XBY बनाया। BX और BY किरण के ऊपर क्रमश: □ और □ बिन्दु है। BX और BY किरण से क्रमश: 4.2 से०मी० और 5.5 से०मी० लम्बी दो सरल रेखा BA और BC काट लिया।



(iii) अब ∠PQR = 70° के बराबर C बिन्दु पर ∠BCZ बनाया।



(iii) CZ किरण 6 से०मी० लम्बी सरल रेखा CD काट लिया। A और D को मिलाकर ABCD चतुर्भुज पाया।

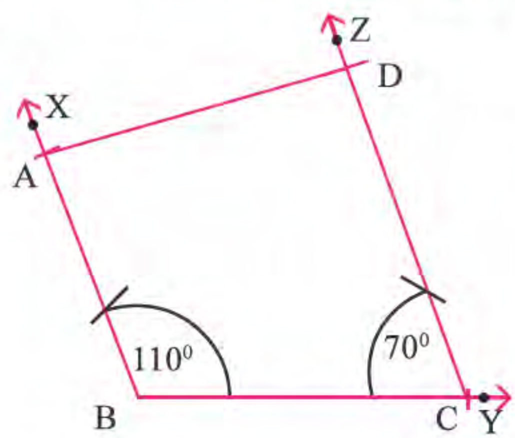
AB = □ से०मी०

BC= □ से०मी०

CD = □ से०मी०

∠ABC = □ डिग्री

∠BCD = □ डिग्री



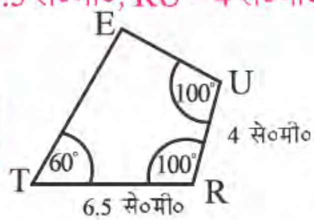
स्वयं करें — 21.4

1) एक चतुर्भुज PLAN बनाओ जिसकी PL = 4.6 से०मी०, LA = 5.5 से०मी०, AN = 5 से०मी० एवं ∠PLA = 60° और ∠LAN = 90° है।

6 एक चतुर्भुज बनाओं जिसके दो भुजा की लम्बाई और तीन कोणों का माप मालूम है।

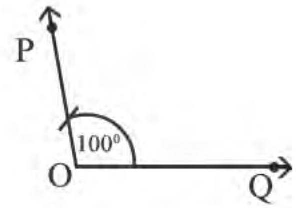
एक चतुर्भुज TRUE बनाओ जिसका TR = 6.5 से०मी०, RU = 4 से०मी०, ∠RTE = 60°, ∠TRE = 100° और ∠RUP = 100° हो।

रमा ने चतुर्भुज बनाया

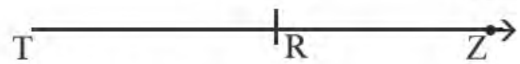


6.5 से०मी०

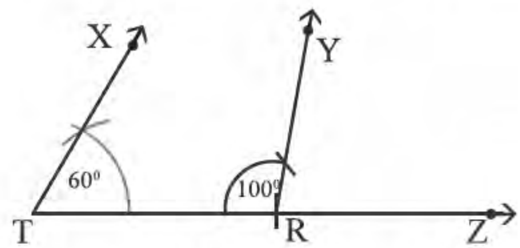
4 से०मी०



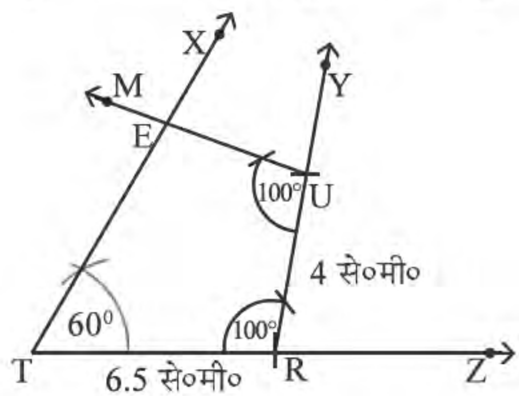
i) पहले एक सरल रेखा TZ से 6.5 से०मी० लम्बी भुजा TR काट लिया।



ii) अब पेंसिल कम्पास की सहायता से TR सरलरेखा के T बिन्दु पर 60° का कोण ∠XTZ एवं R बिन्दु पर 100° कोण ∠TRY बनाया।



iii) RY रेखा के ऊपर U बिन्दु स्थित है। RY रेखा से 4 से०मी० लम्बा RU सरल रेखा काट लिया एवं U बिन्दु पर 100° कोण ∠RUM बनाया। UM रेखा RX रेखा को E बिन्दु पर काटती है।



∴ TRUE चतुर्भुज पाया जिसका TR = 6.5 से०मी० RU = 4 से०मी० ∠ETR = 60° ∠TRU = 100°, ∠RUE = 100° है।

स्वयं करें — 21.5

एक चतुर्भुज HEAR बनाओं जिसमें HE = 5 से०मी०, RH = 6.8 से०मी० ∠EHR = 90°, ∠HEA = 120° और ∠HRA = 70°

बनाकर देखें — 21

1. मन ही मन में सोचकर लिखें :

   a) एक चतुर्भुज के चार भुजाओं की लम्बाई मालूम रहने पर चतुर्भुज बना सकते है या नहीं, यदि नहीं बना सकते तो और कौन सा तथ्य पाने पर उस चतुर्भुज को बना सकते हैं।

   b) एक निर्दिष्ट समानान्तर चतुर्भुज बनाने के लिए कौन-कौन से तथ्य की जरुरत पड़ती है।

   c) एक निर्दिष्ट वर्गक्षेत्र बनाने के लिए कौन-कौन से शर्त आवश्यक है।

   d) एक निर्दिष्ट आयत क्षेत्र बनाने के लिए किन-किन तथ्यों की जरुरत पड़ती है।

   e) एक राम्बस के दोनों कर्ण मालूम हो तो राम्बस बन सकता है या नहीं।

2. a) एक चतुर्भुज ABCD बनाओ जिसकी भुजा AB = 5.2 से०मी०, BC = 6 से०मी०, CD = 4.4 से०मी०, AD = 7 से०मी० एवं AC = 10 से०मी० है।
   यदि ABCD चतुर्भुज में AC = 12 से०मी० हो तो चतुर्भुज बनाना संभव है या नहीं।

   b) एक समानान्तर चतुर्भुज JUMP बनाओं जिसकी भुजा JU = 5.2 से०मी०, UM = 4.8 से०मी० एवं JM = 7 से०मी० है।

   c) एक राम्बस PQRS बनाओं जिसकी भुजा PQ = 5.4 से०मी० एवं PR = 8 से०मी० है।

   d) एक चतुर्भुज PQRS बनाओ जिसकी भुजा PQ = 7 से०मी०, QR = 6.5 से०मी०, RS = 5.2 से०मी०, SP = 4.4 से०मी०, $\angle PQR = 60^\circ$ है।

   e) एक राम्बस BEST बनाओं जिसकी भुजा BS = 6.8 से०मी० और ET = 5.8 से०मी० है।

   f) एक वर्ग क्षेत्र DEAR बनाओं जिसकी भुजा DE = 5.2 से०मी० है।

   g) एक आयत क्षेत्र READ बनाओ जिसकी भुजा RE = 6 से०मी० और EA = 5 से०मी० है।

   h) एक चतुर्भुज SAND बनाओ जिसकी भुजा SA = 5.6 से०मी०, AN = 4.5 से०मी०, $\angle ASD = 45^\circ$, $\angle SAN = 75^\circ$, $\angle AND = 110^\circ$ है।

3. i) एक समानान्तर चतुर्भुज LAND बनाओं जिसकी भुजा LA = 6.6 से०मी०, AN = 5.4 से०मी० और $\angle LAN = 45^\circ$ है।

   ii) एक राम्बस HOME बनाओ जिसका $\angle HOM = 60^\circ$ एवं HO = 6 से०मी० है।

   iii) एक राम्बस ROAD बनाओं जिसकी भुजा RA = 8 से०मी० और OD = 6 से०मी० है।

   iv) एक वर्ग क्षेत्र TRAM बनाओं जिसकी भुजा TA = 6 से०मी० है।

   v) एक आयत क्षेत्र ABCD बनाओं जिसकी भुजा AC = 5 से०मी० एवं $\angle BAC = 30^\circ$ है।

22. समीकरणों का गठन और समाधान

आज बहुत सी दियासलाई की काठी लेकर हम चारों मित्र मिलकर नया खेल खेलेंगे।

जावेद ने मुझे कुछ दियासलाई की काठी दिया था। हमलोग उससे कुछ नक्शा बनाने की चेष्टा करेंगे।

आसमीन और अमल ने कई नक्शा बनाया है, कितना नक्शा उनलोगों ने बनाया है हिसाब करके बताने की चेष्टा करें। जावेद मुझे 20 दियासलाई की काठी दिया।

मैनें बनाया . . . .

20 काठियों से कितने वर्ग बनेगें देखें

माना वर्गाकार घरों की संख्या x है

1वर्गाकार घर में काठियों की संख्या 4है।

x वर्गाकार घरों की कुल काठियाँ $4x$।

लेकिन मेरे पास 20 काठियाँ है।

अत: $4x$ और 20 बराबर होगें।

$\therefore 4x = 20$

$4x = 20$ इसको क्या कहेंगें।

चल एवं ध्रुवक और बराबर चिन्ह का उपयोग करके समस्या को गणित की भाषा में प्रकाशित करेंगे। इस प्रक्रिया को समीकरण बनाना कहते है, जो पाये है उसे समीकरण कहा जाता है। समीकरण बनाने में व्यवहृत चल का मान अज्ञात है। अत: उसे समीकरण का अज्ञात संख्या कहते है। अज्ञात संख्या के जिस निर्दिष्ट मान के लिए बराबर चिन्ह के दोनों तरफ का मान बराबर होता है। उसे समीकरण का बीज या समीकरण का समाधान कहते है। अज्ञात संख्या का मान निकालने की पद्धति को समाधान करना कहा जाता है।

1 $4x = 20$, इस समीकरण में x के किसी निर्दिष्ट मान के लिए सिद्ध (बराबर चिन्ह के बाँये तरफ और दाहिने तरफ बराबर) करना होता है देखें।

$4x = 20$ समीकरण में x के विभिन्न मान को बैठाकर पाते हैं।

x का मान	बराबर चिन्ह के बाँये तरफ	बराबर चिन्ह के दाहिने तरफ	समीकरण को सिद्ध किया/नहीं किया।
1	4	20	सिद्ध नहीं होता है $[4 \neq 20]$
2	8	20	;;
3			;;
4	16		;;
5	20		सिद्ध होता है
6	24		सिद्ध नहीं होता है
7			;;

देखते है एकमात्र $x = 5$ हो तो $4x = 20$ होता है। अर्थात् समीकरण $x = 5$ से सिद्ध होता है।

तसमीन और एक नया नक्शा बनायी। उसका मुझसे अधिक दियासलाई काठी लगा।

तसमीन के नक्शे में कितना अधिक काठी लगा देखें।

माना तशमीन के नक्शे में मुझसे x काठी अधिक लगा।

$\therefore$ तशमीन का लगा $x + 20$ काठी।

लेकिन गिनकर देखा कि तशमीन के नक्शे में 28 दियासलाई की काठी है।

अत: $x + 20$ और 28 बराबर है

बीजगणित की भाषा में $x + 20 = 28$

2 x के किसी मान के लिए $x + 20 = 28$ होता है, देखें।

x का मान	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
बराबर चिन्ह के दाहिने या (x + 20) का मान	21	22	23	24				28		
x का मान समीकरण को सिद्ध किया है (हाँ) / (नहीं)	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं				हाँ		

देखते हैं $x = \square$ के लिए $x + 20 = 28$ समीकरण सिद्ध होता है।

3 अब देखें $x - 5 = 12$, यह समीकरण x के किस मान से सिद्ध होता है।

x का मान	बराबर चिन्ह के बॉयी तरफ या (x - 5)का मान	x - 5 = 12 समीकरण सिद्ध होता है। नहीं होता है
5	0	नहीं होता है
6	1	नहीं होता है
7	☐	☐
9	☐	☐
10	☐	☐
12	☐	☐
15	☐	☐
17	☐	☐
19	☐	☐

$\therefore x =$ ☐ के मान के लिए $x - 5 = 12$ समीकरण सिद्ध (अर्थात् समता के दोनों तरफ समान होता है।) होता है।

x का जो मान समीकरण को सिद्ध करता है उस मान को उस समीकरण का क्या कहेंगे।

समीकरण का समाधान या बीज कहा जाता है।

$x - 5 = 12$ का समाधान / बीज $x = 17$

$x + 20 = 28$ का समाधान / बीज $x =$ ☐

$4x = 20$ का समाधान / बीज $x =$ ☐

देखते है, ऊपर के समीकरणों के प्रत्येक अज्ञात संख्या का (चल) एक एवं अज्ञात संख्या का घात एक एवं बीज एक है।

इस प्रकार के समीकरण को क्या कहेंगे।

इस प्रकार के समीकरण को एक चल विशिष्ट एक घात समीकरण कहा जाता है।

स्वयं करें — 22.1

1) $x + 4 = 9$ 2) $x - 2 = 4$ 3) $7x = 42$ 4) $\frac{x}{3} = 2$

— ये समीकरण x के किस मान से सिद्ध होते है बनाकर देखें और लिखें।

बनाकर देखें— 22.1

1. नीचे कौन-कौन समीकरण है लिखे एवं समीकरणों की चल संख्याओं को लिखो।

(a) $x + 5 = 13$ (b) $x - 4 = 7$ (c) $3t = 21$

(d) $\frac{t}{3} = 2$ (e) $2x + 1 = 11$ (f) $9 + 4 = 13$

(g) $10 - 3 = 7$ (h) $20 = 4y$ (i) $7 - x = 0$

2. समीकरण बनाओं —

(i) → 33 काठियों से x को सजाओ।

(ii) → 65 काठियों से y को सजाओ।

(iii) मेरे पास x रुपये हैं। पिताजी 2 रुपये देगें तो 18 रुपये हो जायेंगें।

(iv) मेरे पास x जामुन है, मैं $\frac{1}{4}$ भाग जामुन नीला को दे दिया। नीला को 5 जामुन मिलें।

3. नीचे के योजना (घरों) को भरो —

समीकरण	चल का मान	चल का मान समीकरण को सिद्ध करते हैं। नहीं करते हैं।
$x + 5 = 25$	$x = 5$	
$x + 5 = 25$	$x = 8$	
$x + 5 = 25$	$x = 10$	
$x + 5 = 25$	$x = 15$	
$x + 5 = 25$	$x = 20$	
$y - 1 = 11$	$y = 2$	
$y - 1 = 11$	$y =$	सिद्ध नहीं करता है
$y - 1 = 11$	$y =$	सिद्ध करता है
$4x = 24$	$x = 3$	
$4x = 24$	$x = 4$	
$4x = 24$	$x =$	सिद्ध करते है

4. नीचे के प्रयोग (घरों) को भरें एवं चल संख्या के किस मान के लिए बराबर चिन्ह के दोनों तरफ के मान बराबर होते है उसे ○ चिन्ह दो।

(i) $p + 12 = 20$

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p + 12										

(ii) $6m = 48$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6m										

(iii) $\frac{t}{5} = 2$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{t}{5}$										

(iv) $7 - x = 5$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7 - x										

5.

समीकरण	बीज को गोल करो
$2x + 3 = 5$	1, 2, 3, 4
$y + 9 = 15$	3, 4, 5, 6
$5x - 1 = 19$	2,4, 6, 8
$8t = 80$	5,10, 15, 20
$3m = 15$	4, 5, 6, 7
$6p = 36$	5, 6, 7, 8

मार्बलों का बंटबारा करें

आज अमीना, बूलू, रोहित और तीर्थ ने मार्बेल लेकर एक मजेदार खेल शुरू किया। मैं भी उनके साथ शमिल हो गया। एक बॉक्स मार्बल को उन्होंने चार भागों में बाँट लिया।

4 मैं हिसाब करके बताने की कोशिश करूँ, उनके पास कितने मार्बल है।

अमीना के पास बूलू से 12 मार्बेल अधिक है। माना बूलू के मार्बलों की संख्या x है।

∴ अमीना के मार्बलों की संख्या ☐ है

अमीना के मार्बलों की संख्या कौन-कौन हो सकती है लिखें।

बूलू के मार्बलों की संख्या x	1	4	6	8	10	12	15	17	18	19	20
अमीना के मार्बलों की संख्या $(x+12)$											

लेकिन रोहित के मार्बलों की संख्या बूलू के मार्बलों की संख्या का पाँच गुणा है। जब बूलू के मार्बलों की संख्या x है अत: रोहित के मार्बलों की संख्या = ☐

बूलू के मार्बलों की संख्या x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
रोहित के मार्बलों की संख्या 5x										

अब तीर्थ के मार्बल की संख्या बूलू के मार्बल का आधा है।

बूलू के मार्बल की संख्या x हो तो तीर्थ के मार्बलों की संख्या ☐ होगी।

तीर्थ के मार्बलों की संख्या कौन-कौन हो सकती है लिखो—

बूलू के मार्बलों की संख्या x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
तीर्थ के मार्बलों की संख्या $\frac{x}{2}$										

मैंने गिनकर देखा कि अमीना के मार्बलों कुल की संख्या 30 है।

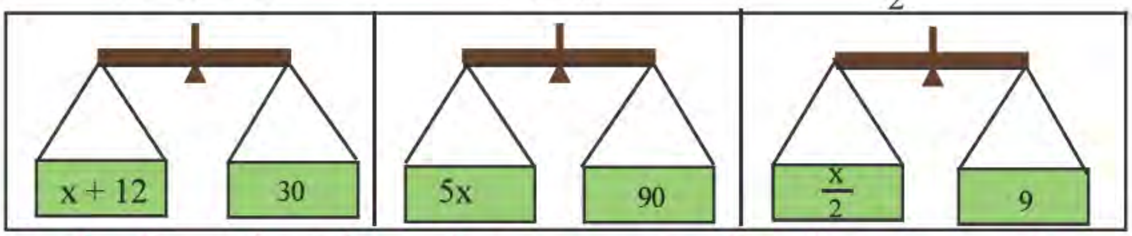
रोहित के कुल मार्बलों की संख्या 90 है।

तीर्थ के कुल मार्बलों की संख्या 9 है।

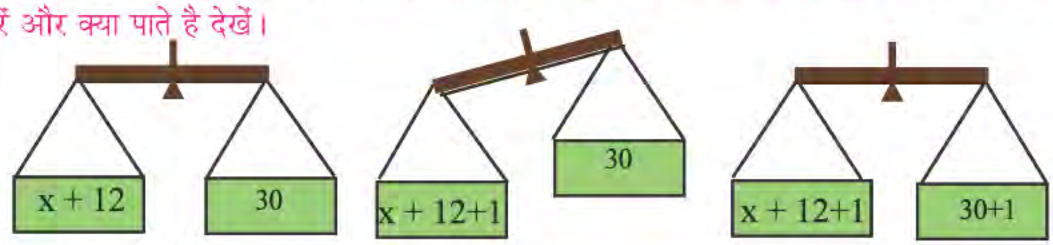
$x + 12 = 30$ $5x = 90$ $\frac{x}{2} = 9$

5 लेकिन किस प्रकार x का मान जानेंगे ? समीकरणों को तराजू पर बैठायें।

$x + 12 = 30$ $5x = 90$ $\frac{x}{2} = 9$

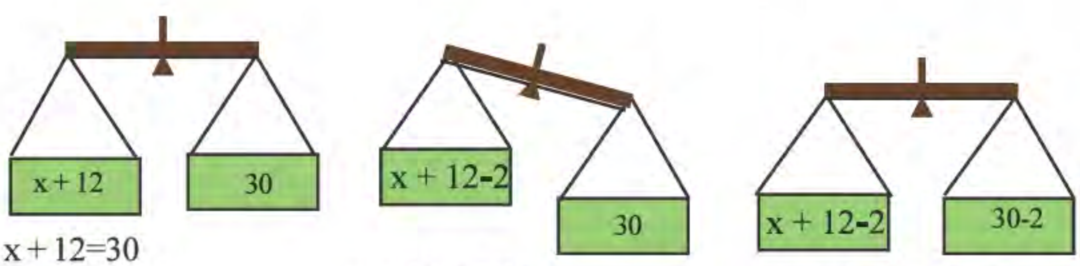


तराजू के बायें तरफ और दाहिने तरफ को बराबर रखकर संख्याओं का जोड़, घटाव, गुणा और भाग करें और क्या पाते है देखें।



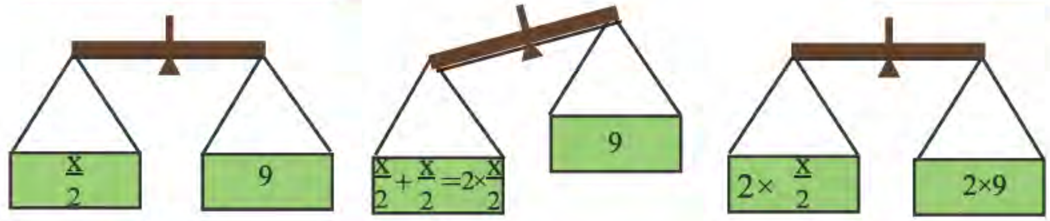
$x + 12 = 30$ $x + 12 + 1 > 30$ $x + 12 + 1 = 30 + 1$

यहाँ से समझ पाया कि किसी बराबर के दोनों तरफ एक ही संख्या जोड़ने पर समानता बनी रहती है।



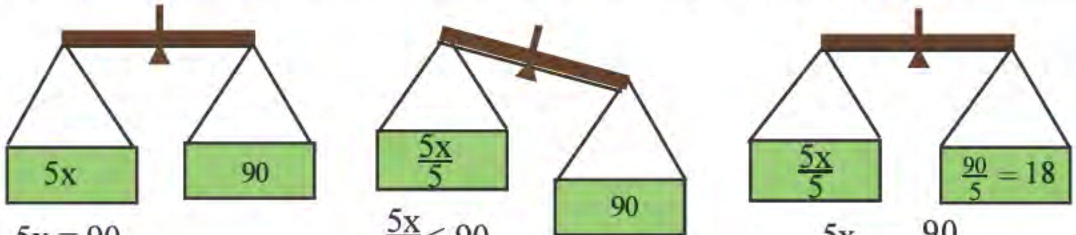
$x + 12 = 30$ $x + 12 - 2 < 30$ $x + 12 - 2 = 30 - 2$

यहाँ से समझा कि किसी बराबर के दोनों तरफ एक ही संख्या घटाने पर समानता बनी रहती है।



$\frac{x}{2} = 9$ $\quad$ $2\times\frac{x}{2} > 9$ $\quad$ $2\times\frac{x}{2} = 2\times 9$

अब समझा कि किसी बराबर के दोनों तरफ एक ही संख्या से गुणा करने पर समता बनी रहती है।



$5x = 90$ $\quad$ $\frac{5x}{5} < 90$ $\quad$ $\frac{5x}{5} = \frac{90}{5}$

यहाँ से समझा कि बराबर के दोनों तरफ एक ही संख्या से गुणा करने पर समता बनी रहती है।

समता से चल संख्या रहने पर हम समीकरण पाते हैं

जब प्रत्येक समीकरण की चल संख्या से कोई अज्ञात संख्या मालूम होती है, अतः समता के इन 4 नियमों (बराबर चिन्हों के दोनों तरफ एक ही संख्या का जोड़, घटाव, गुणा और भाग) का समीकरण में जरूरत पड़ती है।

6 इस नियम की सहायता से $x + 12 = 30$ इस समीकरण के बायें तरफ केवल चल (x) रखने की कोशिश करें

$x + 12 = 30$

या, $x+12+12 = 30 - 12$ [दोनों तरफ 12 घटाने पर पाते हैं]

$\therefore\ x = 18$

7 अब $5x = 90$ इस समीकरण के बायें तरफ केवल चल रखने की कोशिश करें।

$5x = 90$ समीकरण के बायें तरफ केवल x रखने के लिए दोनों तरफ ☐ से भाग करें।

$$\frac{5x}{5} = \frac{90}{5}$$

$$\therefore\ x = 18$$

$\frac{x}{2} = 9$ इस समीकरण के बाँयें तरफ केवल चल x रखने की कोशिश करें।

$\frac{x}{2} = 9$ इस समीकरण के बाँयें तरफ केवल x रखने के लिए दोनों तरफ □ से गुणा करें।

$$\frac{x}{2} \times 2 = 9 \times 2$$

$$\therefore\ x = 18$$

8 नीचे के समीकरणों का समाधान करें अर्थात् समीकरणों का मान निर्णय करें।

i) $p + 1 = 2$ ii) $x - 1 = -1$ iii) $7x = 21$ iv) $-2y = 10$ v) $\frac{x}{3} = -2$

vi) $20x = -10$ vii) $2x - 3 = 23$ viii) $\frac{x}{3} = \frac{5}{4}$ ix) $\frac{x}{2} = 9$ x) $5x = 0$

xi) $3x + 12 = 24$

i) $p + 1 = 2$

या $p + 1 - 1 = 2 - 1$ [दोनों तरफ 1 घटाने पर]

$\therefore\ p = 1$

निर्णित समाधान $p = 1$

अत: समीकरण का बीज 1 है।

ii) $x - 1 = -1$

श्र= $x - 1 + □ = -1 + □$

$\therefore\ x = 0$ [दोनों तरफ □ योग करने पर पाते है]

निर्णित समाधान $x = 0$

अत: समीकरण का बीज 0 है।

iii) $7x = 21$

या $\frac{7x}{7} = \frac{21}{7}$ [दोनों तरफ □ से □ करने पर पाते हैं]

$\therefore\ x = 3$

निर्णित समाधान $x = 3$

iv) $-2y = 10$

या $\frac{-2y}{-2} = \frac{10}{-2}$ [दोनों तरफ -2 से भाग करने पर पाते हैं]

$\therefore\ y = -5$

निर्णित समाधान $y = -5$

v) $\frac{x}{3} = -2$

या $\frac{x}{3} \times 3 = -2 \times 3$ [दोनों तरफ □ से गुणा करने पर पाते हैं]

$\therefore\ x = -6$

निर्णित समाधान $x = -6$

vi) $20x = -10$

या $\frac{20x}{20} = \frac{-10}{20}$ [दोनों तरफ □ से भाग देने पर □ पाते हैं]

$\therefore\ x = □$

निर्णित समाधान $x = □$

स्वयं करें — 22.2

1) $x + 3 = 15$ **2)** $y - 3 = 10$ **3)** $5x = 25$ **4)** $\frac{y}{3} = \frac{2}{9}$ **5)** $5x + 7 = 17$

बनाकर देखें — 22.2

1. नीचे की बातों को पढ़कर समीकरण गठित करें —

(a) मेरे मार्बल के 7 गुणा मार्बल प्रतिमा के पास है। प्रतिमा के पास 42 मार्बल है।

(b) मिलन बाबू की उम्र उनके लड़के की उम्र से 4 गुणा है। वर्ष 5 वर्ष पश्चात् मिलन बाबू की उम्र लड़के की उम्र का 3 गुणा होगी।

(c) 187 रुपये को मैं, दूलाल और जहिर ने इस प्रकार बांटा कि दूलाल मुझसे 5 रुपये कम पाया लेकिन जहिर मुझसे दुगना पाया।

(d) हमारे गाँव में 3895 लोगों में से जितने लोग साक्षर है उससे निरक्षर लोगों की संख्या 1871 कम है।

(e) किसी संख्या को 12 से गुणा करके उसमें से 48 घटाने पर वियोगफल मूल संख्या के $2\frac{2}{5}$ भाग होगा।

(f) सीतारा बेगम के फल की दुकान में कुल फलों का $\frac{1}{3}$ भाग सेव, $\frac{2}{7}$ भाग कमला नींबू है तथा शेष 160 नाशपति है।

(g) मैनें एक संख्या लिखी जिसकी इकाई का अंक x तथा दहाई के अंक का स्थानीय मान 5है। वह संख्या इकाई के स्थानीय अंक का 11 गुणा है।

(h) दीप्तार्क ने तीन अंकों की एक संख्या लिखा। संख्या के सैकड़ा का स्थानीय अंक y, दहाई का स्थानीय अंक 7 और इकाई का स्थानीय अंक 0 है। संख्या सैकड़ा के स्थानीय अंक का 114 गुणा है।

2. समीकरणों को देखों और भाषा में लिखो—

a) $2x = 50$ → ☐

b) $3y + 10 = 160$ → ☐

c) $\frac{x}{2} - \frac{5}{6} = 1\frac{2}{3}$ → ☐

d) $\frac{3}{20}x + 2 = x$ → ☐

9 हम पाँच मित्र अपना-अपना उम्र लिखेंगे और कौन-कितना बड़ा है जानेंगे।

बूलू तीर्थ से 7 वर्ष बड़ा है। लेकिन अमीना की उम्र तीर्थ के उम्र के दोगुने से 3 कम है। रोहित की उम्र तीर्थ की उम्र का $1\frac{1}{2}$ गुणा है।

मैं भी प्रत्येक के उम्र का हिसाब करके बोलने की कोशिश करूँ।

माना, तीर्थ की x वर्ष है। तब बूलू की उम्र $(x + 7)$ वर्ष होगी।

अमीना तीर्थ के उम्र के दोगुणे से 3 कम है।

$\therefore$ अमीना की उम्र = $(2x - 3)$ वर्ष।

लेकिन रोहित की उम्र तीर्थ की उम्र का $1\frac{1}{2}$ गुणा = $\frac{3}{2}$ गुणा।

$\therefore$ रोहित की उम्र = $\frac{3x}{2}$ वर्ष।

तो जान पाया कि अमीना की उम्र 13 वर्ष है।

$\therefore \ 2x - 3 = 13$

दोनों तरफ 3 जोड़ने पर पाते हैं,

$2x - 3 + 3 = 13 + 3$

या, $2x = 16$

दोनों तरफ से 2 से भाग करने पर पाते हैं,

$x = 8$

दूसरे तरह से करे तो क्या पाते हैं देखें

$2x - 3 = 13$

समीकरण में = चिन्ह के तरफ से दूसरे तरफ संख्या को ले जाने को पक्षान्तर कहते है, इस पक्षान्तर के समय चिन्ह बदल जाता है। अर्थात् (+) चिन्ह बदलकर (-) तथा (-) चिन्ह बदलकर (+) होता है। इसी तरह भाग रहने पर गुणा तथा गुणा रहने पर भाग होता है।

अत: $2x - 3 = 13$

या, $2x = 13 + 3$ [पक्षान्तर से पाते हैं।]

या, $2x = 16$

या, $x = \frac{16}{2}$ [दोनों तरफ से 2 से भाग करने पर पाते हैं,]

$\therefore x = 8$

अर्थात् तीर्थ की उम्र 8 वर्ष है

चूँकि तीर्थ की उम्र 8 वर्ष है।

अतः रोहित की उम्र $\frac{3x}{2}$ वर्ष = $\frac{3\times\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}}$ वर्ष = 12 वर्ष।

फिर बूलू की उम्र (x+7) वर्ष

अर्थात् बूलू की उम्र (8+7) वर्ष = 15 वर्ष।

तीर्थ की उम्र 8 वर्ष। तीर्थ, बूलू, अमीना और रोहित के उम्र में सबसे छोटा ☐ एवं सबसे बड़ा ☐ है।

10 नीचे के समीकरणों का समाधान करें

(i) 5x +2 =22

या, 5x = 22-2 [पक्षान्तर करके पाते है।]

या, 5x = 20

या, $\frac{5x}{5} = \frac{20}{5}$ [दोनों तरफ 5 से भाग देने पर पाते हैं]

$\therefore$ x = 4

निर्णित समाधान x =4

(ii) 13y-5 = 47

या, 13y = 47 + 5 [पक्षान्तर करने पर।]

या, 13y = 52

या, y = $\frac{\cancel{52}^{4}}{\cancel{13}}$ दोनों तरफ 13 से भाग देकर पाते है।

$\therefore$ y = 4

निर्णित समाधान y = 4

11 3 (x +9)=81 समीकरण का समाधान करें।

3 (x +9)=81

या, x +9 = $\frac{81}{3}$ [पक्षान्तर करके पाते है।]

या, x+ 9 = 27

या, x= 27 -9 [पक्षान्तर करके पाते है।]

$\therefore$ x=18

निर्णित समाधान x=18

12 नीचे के समीकरणों का समाधान करें —

(i) $3(6 - 2x) + 20x = 0$

या, $18 - 6x + 20x = 0$

या, $- 6x + 20x = -18$ [पक्षान्तर करने पर]

या, $14x = -18$

या, $x = \frac{\cancel{18}\ 9}{\cancel{14}\ 7}$

या, $x = -\frac{9}{7}$

$\therefore x = -1\frac{2}{7}$

निर्णित समाधान $x = -1\frac{2}{7}$

(ii) $\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{4}(x+3) = 16$

या, $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{3}{4} = 16$

या, $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 16 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$ [पक्षान्तर से पाते हैं]

या, $\frac{6x + 4x + 3x}{12} = \frac{192 - 6 - 8 - 9}{12}$

या, $\frac{13x}{12} = \frac{192 - 23}{12}$

या, $13x = \frac{169 \times \cancel{12}}{\cancel{12}}$ [पक्षान्तर करने पर पाते हैं]

या, $x = \frac{\cancel{169}\ 13}{\cancel{13}}$ [पक्षान्तर करने पर पाते है]

$\therefore x = 13$

निर्णित समाधान $x = 13$

(iii) $\frac{x}{a} + b = \frac{x}{b} + a$

या, $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = a - b$ [पक्षान्तर से पाते है]

या, $\frac{bx - ax}{ab} = a - b$ [पक्षान्तर करने से पाते हैं]

या, $\frac{x(b - a)}{ab} = a - b$

या, $\frac{x(b-a)}{ab} = -(b - a)$

या, $x(b - a) = -ab\,(b - a)$ [पक्षान्तर से पाते हैं]

या, $x = \frac{-ab\,\cancel{(b - a)}}{\cancel{b - a}}$ [दोनों तरफ (b – a) से भाग करने पर पाते हैं] $b \neq a \neq 0$

$\therefore x = -ab$

निर्णित समाधान $x = -ab$

बनाकर देखें— 22.3

1. नीचें के समीकरणों का समाधान करें —

i) $6x = 7$ ii) $\frac{x}{3} = 0$ iii) $3x = 9$ iv) $\frac{x}{3} = 2$

v) $5x - 2 = 8$ vi) $7y + 5 = 40$ vii) $12x + 8 = 7x + 28$

viii) $6(7 - 3x) + 12x = 0$

ix) $5(x + 3) + 4(2x + 6) = 0$

x) $3(6 - 2x) = 4(1 - 5x)$

xi) $\frac{x}{2} - \frac{2}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$

xii) $3 + 2x = 1 - x$

xiii) $5(2x - 3) - 3(3x - 7) = 5$

xiv) $\frac{2x}{3} = \frac{3x}{8} + \frac{7}{12}$

xv) $\frac{3x + 1}{16} + \frac{2x - 3}{7} = \frac{x + 3}{8} - \frac{1 - 3x}{10}$

xvi) $2t - 3 = \frac{3}{10}(5t-2)$

xvii) $\frac{ax + b}{3} = \frac{cx + d}{2}$

xviii) $2x+0.6x-6.6 = 0.4x$

xix) $0.5x+ \frac{x}{3} = 0.25+7$

xx) $0.18(5x-4) = 0.5x+0.8$

2. समाधान देखकर समीकरण बनायें और शब्दों में लिखें —

(i) $x = 6$ ii) $t = 7$ iii) $m = \frac{5}{6}$ iv) $y = 12$

(i) $x = 6$ →

(ii) $t = 7$ →

(iii) $m = \frac{5}{6}$ →

(iv) $y = 12$ →

13 शिवनाथ और सोमनाथ के उम्र का अनुपात 3 : 4 है। यदि दोनों की कुल उम्र 21 वर्ष हो, तो समीकरण गठित करके शिवनाथ और सोमनाथ की उम्र निकालें।

माना, अनुपात के दोनों पदों का साधारण गुणक x , है जहाँ $x \neq 0$

अत: शिवनाथ की उम्र 3x वर्ष।

एवं सोमनाथ की उम्र 4x वर्ष।

$\therefore$ दोनों की उम्र की योगफल $(3x + 4x)$ वर्ष

शर्तानुसार, $3x + 4x = 21$

या $7x = \square$

या $x = \square$

अत: शिवनाथ की उम्र = 3x वर्ष

$= 3 \times 3$ वर्ष

= 9 वर्ष एवं सोमनाथ की उम्र = 4x वर्ष

$= 4 \times \square$ वर्ष

= 12 वर्ष

14 नीचे की समस्याओं का समीकरण बनाकर समाधान करें।

i) किस संख्या के 6 गुणा के साथ 6 जोड़ने पर वह संख्या 8 गुणा होगी,

ii) किस संख्या के $\frac{1}{4}$ भाग से $\frac{1}{5}$ भाग घटाने पर वियोगफल 2 होगा।

iii) दो संख्याएँ है एक संख्या दूसरी की 3 गुणा है, छोटी संख्या के साथ 10 जोड़ने पर योगफल दूसरी संख्या का $\frac{3}{4}$ गुणा हो जाती है हिसाब करके संख्या को लिखो। (स्वंय करें)

समाधान

i) माना, संख्या x है

$\therefore$ x के 6 गुणा के साथ 6 जोड़कर पाते है $6x + 6$)

x का 8 गुणा = $\square$

शर्तानुसार, $6x + 6 = 8x$

या, $8x = 6x + 6$

या, $8x - 6x = 6$ [पक्षान्तर करने पर पाते हैं]

या, $2x = 6$

या, $x = \frac{6}{2}$ [दोनों तरफ 2 से भाग करने पर पाते हैं]

$\therefore x = 3$ निर्णित संख्या = 3

ii) माना संख्या y है

$\therefore$ y का $\frac{1}{4}$ भाग = ☐ एवं y का $\frac{1}{5}$ भाग = ☐

शर्तानुसार, $\frac{y}{4} - \frac{y}{5} = 2$

या, $\frac{5y - 4y}{\square} = 2$ या $\frac{y}{20} = 2$

$\therefore$ y = 40 [दोनों तरफ 20 से गुणा करके पाते हैं]

निर्णित संख्या = 40

बनाकर देखें — 22.4

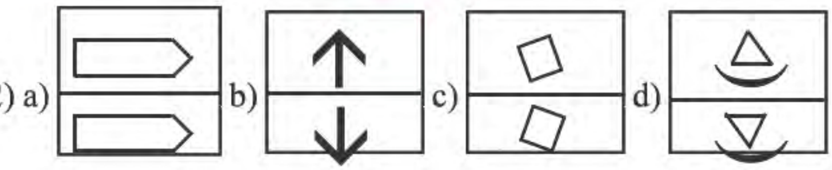
पढ़कर समीकरण बनाओ और समाधान करों—

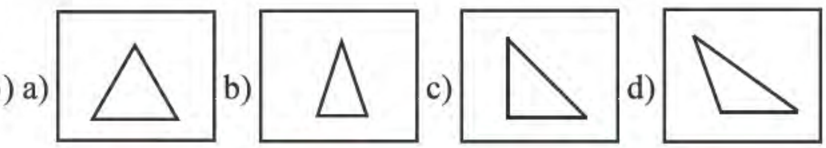
1. बारुईपाड़ा के साफिता ने अपने जमीन को दो भागों में बाँटकर केला और पान की खेती किया। कुल 2830 रुपये आय हुआ। पान की खेती करके उसने केला से 630 रुपये अधिक आय किया। केला की खेती करके उसने कितने रुपये कमाया था। बताओं।
2. कुमार के आयताकार जमीन की लम्बाई चौड़ाई $1\frac{1}{2}$ गुणा है। जमीन की परिसीमा 400 मीटर है। तो जमीन की लम्बाई और चौड़ाई निकालें।
3. मंजू, कना और अमल के बीच 170 रुपये इस प्रकार भाग करना है कि मंजू जितना रुपये पायेगी, कना उसके दुगने की अपेक्षा 30 रुपये कम पायेगी। अमल कना के आधे की अपेक्षा 15 रुपये अधिक पायेगी। हिसाब करके देखे कौन कितना पाया।
4. मेरे पास कुछ सेव है। मैं अपने सेव का $\frac{2}{3}$ भाग भाई को दूँगा एवं भाई को देने के पश्चात् मेरे पास 6 सेव बच गया। हिसाब करके देखें कि भाई को कितना सेव दिया।
5. किसी आयत क्षेत्र की लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात 3:2 एवं परिसीमा 160 मीटर है। आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।
6. मेरे बैग में 5 रुपये और 10 रुपये के कुल 20 सिक्के है, अगर बैग में कुल 145 रुपये हो, तो कौन सिक्का कितना है।
7. एक त्रिभुज के तीन कोणों का मान x^0,$2x^0$ और $3x^0$ है, वृहत्तम कोण का मान निकालें।
8. चंचल के पिताजी ने घर बनाते समय कुछ रुपये कर्ज लिए थे। उन्होंनें अपने कर्ज $\frac{1}{3}$ की अपेक्षा 2000 अधिक चुकाया। लेकिन अभी भी जो कर्ज चुकाया है उसकी अपेक्षा 21000 रुपयें अधिक बाकी रह गया। अत: उन्होंनें कितने रुपये कर्ज लिया बताओं।
9. एक साईकिल रिक्शा से ऑटो रिक्शा का वेग प्रतिघंटा 8 कि०मी० अधिक है। रीता अपने घर से 2 घंटा साईकिल रिक्शा से एवं 30 मिनट ऑटो रिक्शा से 19 कि०मी० दूर स्थित स्टेशन पर गयी। ऑटो रिक्शा का वेग कितना था बताओं।
10. चांदू की वर्तमान उम्र उसके छोटे भाई की उम्र से 8 वर्ष अधिक है, 4 वर्ष बाद चांदू की उम्र उसके भाई की उम्र का दुगना हो जाएगा, अत: उनकी वर्तमान उम्र ज्ञात करें।

23. मजेदार अंक

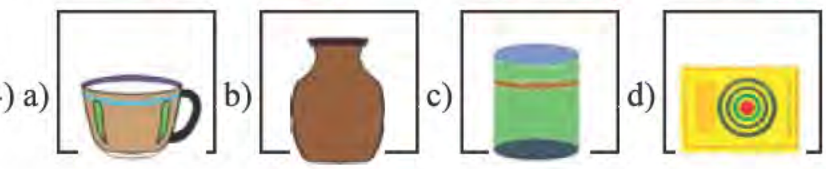
A नीचे के चित्रों के दल को देखो और उनमें कौन चित्र रैखिक प्रतिसाम्य नहीं है खोजकर गोल दाग दो।

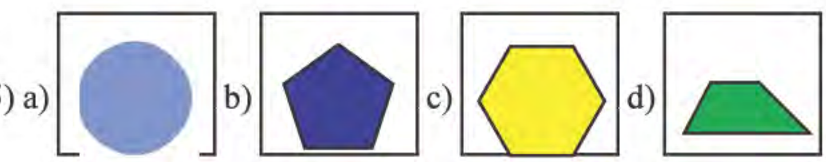
1) a) H b) U c) Z d) E

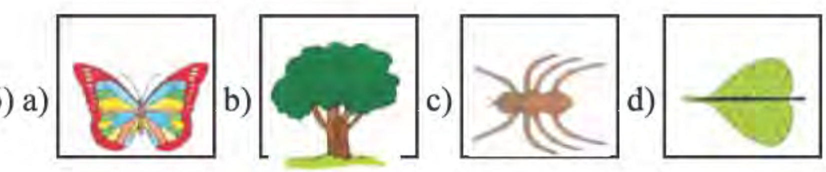
2) 

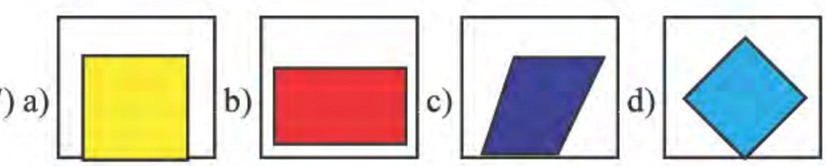
3) 

समबाहु समद्विबाहु समकोण समद्विबाहु विषम बाहु

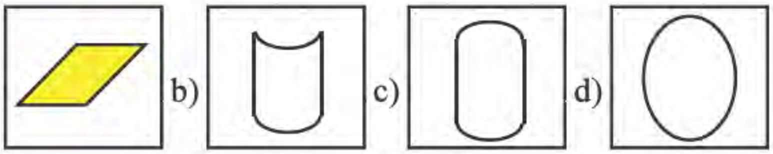
4) 

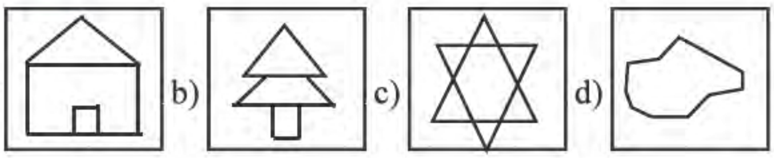
5) 

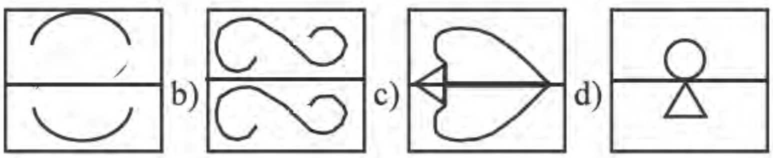
6) 

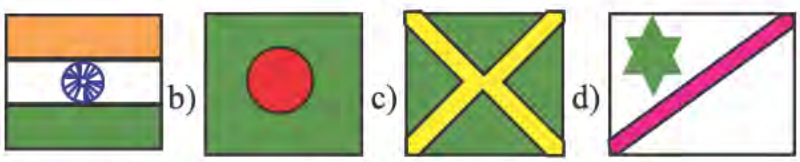
7) 

8) a) F b) V c) X d) I

9)


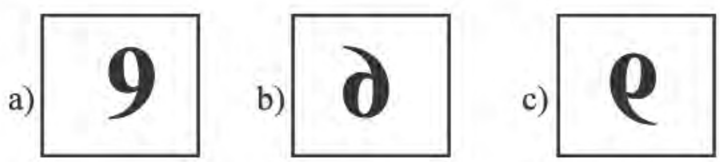
10)


11)


12)


B कौन सा चित्र आइना का प्रतिबिंब होगा खोजकर लिखों।

1) MW ➡

2) 6 ➡


3) PAINT ➡

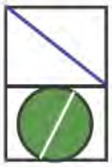
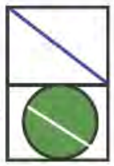
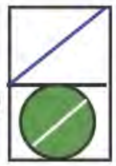
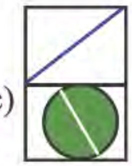
4)

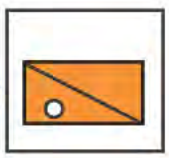
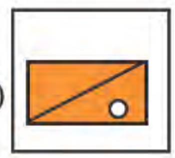
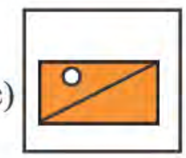
a)
b)

c)

5)

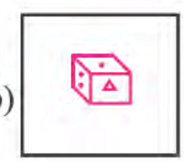
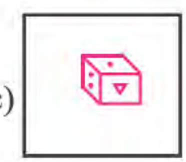
a)
b)
c)

6) 
a) 
b) 
c) 

7)
a) 
b) 
c) 

8)
a)
b)
c)

9)
a)
b)
c)

10)
a)
b) 
c) 

C हम अपने स्वंय के सामानों का आइना के प्रतिबिम्ब लिखे —

मेरी उम्र → ☐ वर्ष | ☐

मेरी क्रमिक संख्या → ☐ | ☐

मेरा स्कूल शुरू →

स्वयं कांटा बनायें

मेरा स्कूल से छुट्टी →

स्वयं कांटा बनायें

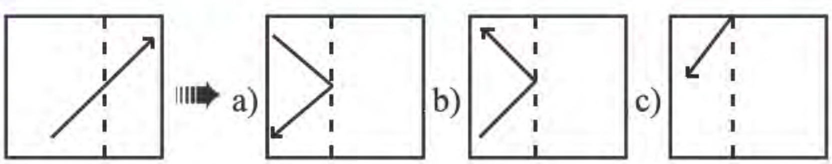
मेरी कक्षा → ☐ | ☐

मेरा विभाग → ☐ | ☐

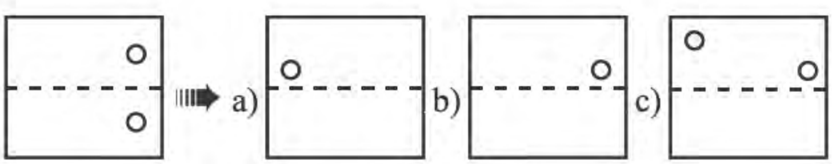
मेरा जिला → ☐ | ☐

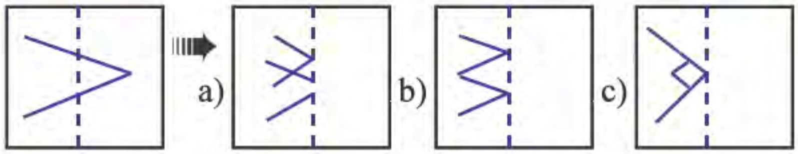
D नीचे के स्वच्छ कागज पर (ट्रेसिंग पेपर) सरल रेखा बराबर में मोड़कर क्या पायेगें सोचें और गोल चिन्ह दें।

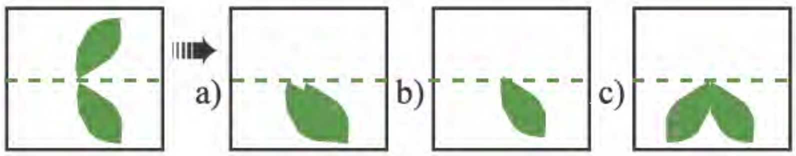
1)

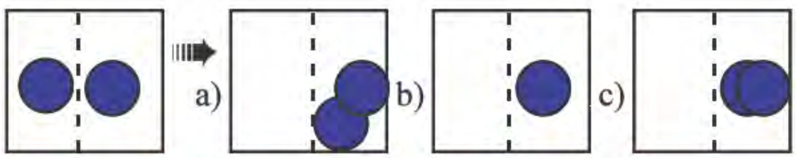


2)

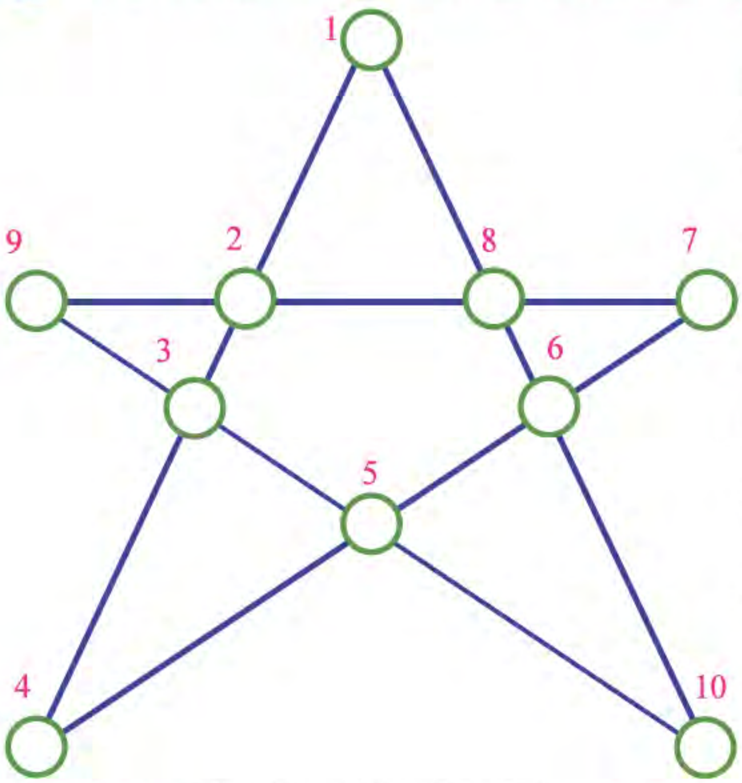


3) 

6) 

7) 

E नीचे के सभी कोणों का समाधान करें और बीज को निर्दिष्ट घरों में लिखे और क्या पाते हैं देखें —



1) $5x - 8 = 2x + 10$

2) $7x - 7 = 6x - 2$

3) $\frac{x}{15} = \frac{1}{5}$

4) $7(3x - 30) = 0$

5) $4(7-x) = 42$

6) $14x - (-22) = 18 + 4x$

7) $40 = -x + 49$

8) $\frac{4x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2x}{3} + \frac{2}{3}$

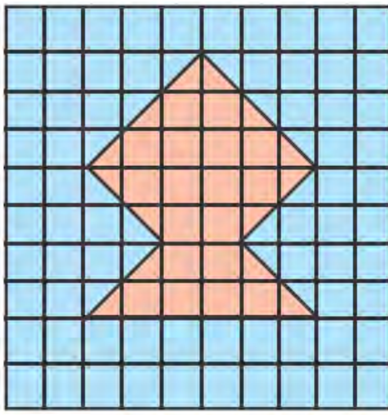
9) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 6$

10) $5(x-2) = 2(2x+1)$

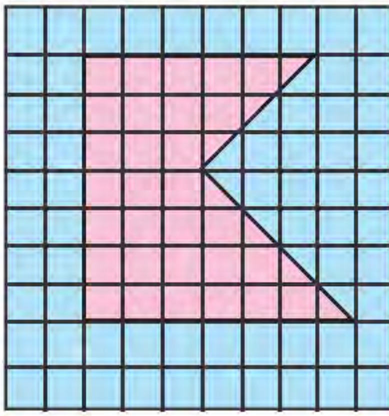
1+2+3+4 = ○ + ○ + ○ + ○ = □, 4+5+6+7= ○ + ○ + ○ + ○= □

1+8+6+10 = ○ + ○ + ○ + ○ = □, 9+2+8+7 = ○ + ○ + ○ + ○= □

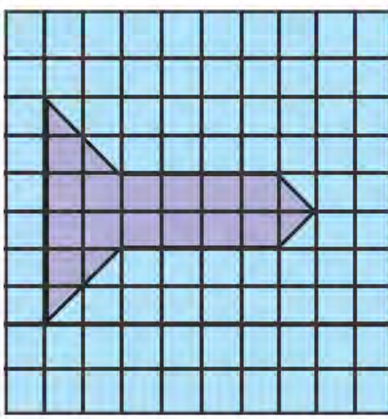
F नीचे के चित्रों की तरह कितने भाग के कितने घर जुड़े हुए है देखें और खाली घरों को भरने की कोशिश करें।



अनुपात	भिन्न	दशमलव भिन्न	प्रतिशत
25 : 100 = 1 : 4	$\frac{25}{100}$	0.25	25%



अनुपात	भिन्न	दशमलव भिन्न	प्रतिशत



अनुपात	भिन्न	दशमलव भिन्न	प्रतिशत

G योजना कागज के निर्दिष्ट जगहों को जोड़कर अपना चित्र बनाएँ एवं बराबर कितने भाग के कितने भाग घर जुड़े हुए हैं देखकर खाली घर को भरें।

	अनुपात	भिन्न	दशमलव भिन्न	प्रतिशत

	अनुपात	भिन्न	दशमलव भिन्न	प्रतिशत

	अनुपात	भिन्न	दशमलव भिन्न	प्रतिशत

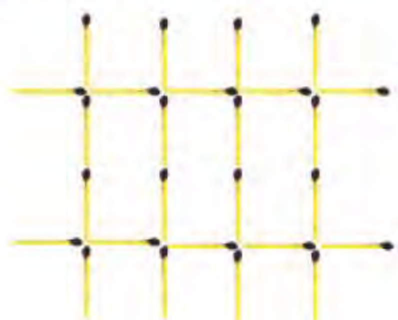
दियासलाई काठी का मजेदार खेल

मैं तीन दियासलाई की काठियों से समबाहु त्रिभुज बनाया।

अब दियालसाई के 12 काठियों से 6 समबाहु त्रिभुज बनाया।

यहाँ से मात्र 4 दियासलाई के काठियों को हटाकर तथा 12 काठियों लेकर 3 समबाहु त्रिभुज बनायें जहाँ समबाहु त्रिभुजों का माप बराबर नहीं हैं। [स्वंय करें]

मैं नीचे के 26 दियासलाई काठियों की सजावट देखूँगा। वहाँ से 14 दियासलाई काठियों को हटाकर 3 वर्गक्षेत्र बनाने की कोशिश करूँगा।

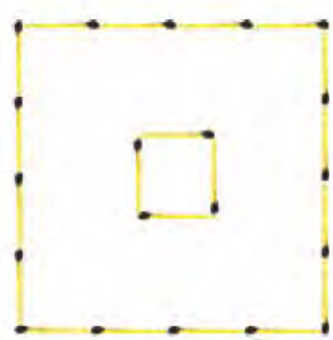


1) पास के 16 दियासलाई की काठियों की सजावट को देखें।

a) 8 काठियों को हटाकर 8 समान त्रिभुज बनायें।

b) 7 दियासलाई काठियों को हटाकर 5 समान चतुर्भुज बनाएँ।

2) मेरे पास 20 काठियाँ है। मैं 4 काठियों से 1 वर्गाकार घर बनाया हूँ। 16 काठियों से घर के चारों तरफ बेड़ा देकर पास के वर्गाकार क्षेत्र की तरह घेरा हूँ और 10 काठियों से इस बगीचे के बराबर आकार और माप को चार बराबर भागों में बाँटने की कोशिश करें।



कुछ मजेदार संख्यायें खोजें

142857 आवृत संख्या [Revolving number]

142857 × 1 =		142857 × 2 =	285714
142857 × 3 =	428571	142857 × 4 =	571428
142857 × 5 =		142857 × 6 =	

1) एक ही अंक की संख्या का तीन बार व्यवहार करके **24** बनायें।

$8 + 8 + 8 = \square$

8 के बदले में अन्य कोई एक अंक की संख्या को तीन बार व्यवहार करके 24 बनायें।

[अंतत: 2 तरह से स्वंय करें]

2) एक ही अंक की संख्या का तीन बार व्यवहार करके **30** बनायें।

$5 \times 5 + 5 = \square$

5 के बदले में अन्य कोई एक अंक की संख्या को तीन बार व्यवहार करके 30 बनायें।

[अंतत: 2 तरह से स्वंय करें]

3) नीचे के गोलमाल अंकों को सठिक रूप से लिखने की कोशिश करें।

```
  ONE
 +TWO
 ----
 FOUR
```

प्रत्येक अंग्रेजी वर्ण के बदले में निर्दिष्ट संख्या लिखें।
लेकिन निर्दिष्ट वर्ण के लिए निर्दिष्ट संख्या लिखें।
दो अलग वर्ण के लिए एक ही संख्या नहीं लिखेंगे।

4) पास के स्कूल के वृत्तों में 1से 19 तक की संख्या को इस प्रकार बैठाएँ जिससे प्रति रेखा का वृत्त की तीन संख्याओं का योगफल 30 है।

5) मारिया के पिताजी पुस्तक खरीदने के लिए एक लिफाफा में कुछ रूपये भरकर घर के टेबुल पर रखकर आफिस चले गए। मारिया ने देखा कि लिफाफा पर 98 लिखा हुआ है। अत: वह पुस्तक की दुकान पर जाकर 92 रुपये की एक पुस्तक खरीदी। लेकिन मूल्य चुकाते वक्त देखती है कि लिफाफा में 92 रुपये भी कम रुपये हैं।

"ऐसा किस तरह से हुआ"? — स्वयं सोचे और लिखे।

6) 8 कागज के टुकड़े लिया और 1, 2, 3, 4, 5, 7,8 और 9 लिख कर नीचे की तरह सजाकर रखी।

1	3
2	4
7	5
9	8
19	10

2 टुकड़े को हटाकर दो स्तंभों का योगफल बराबर करने की कोशिश करें। [स्वयं करें]

24. उत्तरमाला

स्वयं करें — 1.1 (पृ० - 2)

1) 50 **2)** 3 **3)** 2, 50 **4)** 400 **5)** 2, 6 **6)** 45 **7)** $1\frac{4}{7}$**8)** $5\frac{3}{5}$**9)** $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$**10)** $\frac{5}{2}\times\frac{7}{3}$

बनाकर देखें — 1.1 (पृ० - 4)

1. 45 **2.** मुझे **3.** $\frac{5}{6}, \frac{1}{6}$ **4.** 30 मीटर **5.** 97.50 रुपये, **6.** 1.92 किलोग्राम **7.** 360 रुपये **8.** $\frac{3}{16}$
9. (i) $\frac{39}{40}$ (ii) $5\frac{1}{2}$ (iii) $27\frac{7}{15}$ (iv) 0.0005 (v) 0.007 (vi) 0.000145
10. (i) $1\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{10}{153}$ (iii) $1\frac{1}{5}$ (iv) $2\frac{2}{11}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{24}{25}$ (vii) $\frac{8}{9}$ (viii) $1\frac{19}{29}$ (ix)1.26 (x) 70.8 (xi) 30 (11) (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{6}{7}$

स्वयं करें — 1.2 (पृ० - 7)

1) 70 बार 2) 52 दिन **3)** 5 जिस्ता **4)** 128 रुपये **5)** 25 दिन **6)** 1130 रुपये **7)** 6 सप्ताह **8)** 5 दिन **9)** 46 दिन **10)** 24 बीघा।

बनाकर देखें — 1.2 (पृ० - 10)

1) i) 25 पै० ii) 252 ग्रा० iii) 2 रुपये iv) $1\frac{1}{10}$ % v) 25% vi) 1.6 % **2)** 80 **3)** 42 आदमी
4) यूरिया 72 कि०ग्रा० एवं पोटाश 48 कि०ग्रा० **5)** 20 **6)** 50 7) 20 **8)** $38\frac{7}{9}$; $27\frac{7}{13}$

बनाकर देखें — 1.3 (पृ० - 14)

i) 9 **ii)** 9 **iii)** 0 **iv)** 0 **v)** -3 **vi)** 9 **vii)** 15 **viii)** -9 **ix)** -11

बनाकर देखें — 1.4 (पृ० - 15)

2.(a)50 वर्गसे०मी० (b) 48 वर्ग से०मी० (c)48 वर्ग से०मी०(d) 42 वर्ग से०मी० (e) 51वर्ग से०मी० (f)30वर्ग से०मी०(प्राय:) **4.**(a) 25 वर्गसे०मी० (b) 64 वर्गसे०मी० (c) 121 वर्गसे०मी० (d) 81 वर्गसे०मी० **5.** (a) 40 (b) 65 (c) 103 (d) 329 (e) 432 **6.** (a) 3025 (b) 2916 **7.** 136 **8.** 134 **9.** 42 **10.** 35 **11.** प्रथम संख्या = 4 द्वितीय संख्या = 6 और तृतीय संख्या = 8 **12.** 321आदमी, **13.** 33 **14.** 15 आदमी **15.** 8100 **16.** 14400

बनाकर देखें — 2.1(पृ० - 26)

1. 2:5 **2.** 6:5:7 **3.** 6:1 **4.** 1:2:4 **5.** 75:74:72 **6.** 2:1:1अथवा 1:2:1 अथवा 1:1:2 **7.** 1:1:1 **8.** 56 वर्ष **9.** 80.50 रुपये **10.** 6 मीटर 6 डेसीमी० **11.** सातवीं कक्षा

स्वयं करें— 2.2 (पृ० - 29)

1) 70:81 **2)** 9:50 **3)** 1:15

बनाकर देखें — 2.2 (पृ० - 30)

1. (a) 4:5, 5:4 (b) 2:3, 3:2 (c) 5:8, 8:5 (d) 13:17, 17:13 (e) 3:4, 4:3 (f) 11:17, 17:11 (g) b:4c, 4c:b (h) 1:25, 25:1

2. (a) 1:5, 5:1 (b) 10:7, 7:10 (c) 10:7, 7:10 (d) 8:15, 15:8 (e) 14:3, 3:14 (f) 28:9, 9:28 (g) 2:1, 1:2 (h) 40:51, 51:40

3. (a) 4:3, गुरु अनुपात (b) 1:17 लघु अनुपात (c) 308:195, गुरु अनुपात (d) 7:120, लघु अनुपात

4. विनय **5.** पास का विद्यालय **6.** 5,60,000, 3:2

बनाकर देखें — 2.3 (पृ० -32)

1. साक्षर 5240 लोग, निरक्षर 1310 लोग **2.** बिशू पायेगा 400 रुपये और अपर्णा पायेगी 240 रुपये **3.** 245 क्विंटल **4.** 60:13 **5.** 2:3 **6.** 18,000 रुपये **7.** 60,000 रुपये **8.**प्रथम हॉल घर में 660 व्यक्ति, दूसरे हॉलघर में 180 लोग, एवं तृतीय हॉलघर में 210 व्यक्ति बैठेंगे **9.** मधु 2,200 रुपये, मानस 3,300 रुपये, कुन्तल 4,400 रुपये तथा इन्द्र 2,200 रुपये पायेंगे। **10.** 1:3:5 **11.** प्रथम मित्र 2,000 रुपये, दूसरा मित्र 4,000 रुपये एवं तृतीय मित्र 3,000 रुपये पायेंगे। **12.** 48 लाख, 60 लाख **13.** पत्नी 67,750 रुपये, पुत्र और पुत्री में प्रत्येक को 54,200 रुपये **14.** 8:5

स्वयं करें — 3.1 (पृ० - 35)

1) (a) है, (b) है, (c) है, (d) नहीं है, (e) है, (f) है, (g) है, (h) नहीं है, **2)** नहीं **3)** बराबर मात्रा में दोनों ने एकही मूल्य पर चीनी खरीदा।

स्वयं करें — 3.3 (पृ० - 39)

i) 5:10::10:20 **ii)** 8:4::4:2 **iii)** 7:14::14:28 **vi)** 4:10::10:25

स्वयं करें — 3.5 (पृ० - 42)

2) 49 रुपये **3)** 3 घं० **4)** 1.32 कि०ग्रा० **5)** 1.5 लीटर

बनाकर देखें — 3 (पृ० - 43)

1. समानुपाती- 5, 25, 7, 35 ; 9, 18, 15, 30 समानुपाती नहीं- 4, 10, 30, 18 ; 5, 10, 16, 20 **2.** 12 दिन में **3.** 6 दिन **4.** 20 **5.** 200 दिन **6.** 1600 रुपये **8.** (a) 9:2 (b) 12:13 (c) 3:2 (d) 3:2 (e) लाल, हरा, बादामी और पीला **9.** द्वितीय शरबत **10.** 10:11 **11.** 2:7 **12.** 10, **13.** जवाफूल 45, गेंदा फूल 60, 15

स्वयं करें — 4.2 (पृ० - 51)

1) (i) - (ii), (ii) - (iii), (iii) - (vi), (iv) - (i)

स्वयं करें — 4.3 (पृ० - 53)

i) (-8)+(-8)+(-8)+(-8)+(-8)+(-8) **ii)** (-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3) = -21 **iii)** (-12)+(-12)+(-12)+(-12)+(-12)+(-12)+(-12)+(-12)+(-12) = -108

स्वयं करें- 4.5 (पृ० - 56)

2) -145 **3)** -920 **5)** -41 **6)** 44

स्वयं करें — 4.6 (पृ० - 57)

i) 630 **ii)** -2400 **iii)** - 264 **iv)** - 8910

स्वयं करें — 4.8 (पृ० - 61)

1) (a) 22 नं० **(b)** 15 नं० **(c)** 1 नं० **2)** 2000 लाभ हुआ **4) (a)** 240 मी० मिट्टी के नीचे रहेगा अर्थात् – 240 मी० की स्थिति में रहेगा। **(b)** लिफ्ट की स्थिति = – 105 मीटर अर्थात् 105 मीटर मिट्टी के नीचे रहेगा।

बनाकर देखें — 4 (पृ० - 68)

1.(a)-40**(b)**6**(c)**-5**(d)**-6**(e)**8**(f)**-6**(h)**-11 **(i)** -26 **(j)** -29 **(k)** 59 **(l)** -1 **2.** -2 **3. (i)**-3**(ii)**18 **4.**2^0C **5.**18मीटर,200मीटर **6.(i)**-9**(ii)**29**(iii)**202**(iv)**-3**(v)**4**(vi)**2**(vii)**-20 **(viii)**9 **9.(i)**-25**(ii)**-24**(iii)**-7**(iv)**-75**(v)**-13**(vi)**-20**(vii)**9**(viii)**30**(ix)**11**(x)**11

स्वयं करें — 5.1 (पृ०- 71)

i) $8275 = 8 \times 10^3+2\times10^2+7\times10+5$ **ii)** $90925 = 9\times10^4+0\times10^3+9\times10^2+2\times10+5$ **iii)**$12578 = 1\times10^4+2\times10^3+5\times10^2+7\times10+8$ **iv)**$7858=7\times10^3+8\times10^2+5\times10+8$

स्वयं करें — 5.2 (पृ० - 71)

1) 2 **2)** 3 **3)** 3 **4)** 5 **5)** 3 **6)** 11^2 **7)** 5^4 **8)** 2,2,2 **9)** 3,3,3,3 **10)** 3 **11)** 5 **12)** 3 **13)** 4

स्वयं करें — 5.3 (पृ० - 72)

1) $2^3\times3$ **2)** $2^3\times7$ **3)** $3^2\times7$ **4)** $2^3\times3^2$ **5)** $2^3\times5^2$

स्वयं करें — 5.4 (पृ० - 72)

1) < **2)** < **3)** = **4)** < **5)** > **6)** >

स्वयं करें– 5.5 (पृ: - 73)

1) (a) 2^{12} (b) $(-3)^{30}$ (c) 10^{10} (d) 2^2 (e) 9 (f) 11^2

स्वयं करें — 5.6 (पृ० - 73)

1) 1, **2)** 7^3, **3)** 1, **4)** 0, **5)** 0

स्वयं करें — 5.8 (पृ० - 75)

1) 2^9, **2)** 5^8, **3)** 6^6, **4)** 3^8, **5)** (i) 2 (ii) 500 (iii) 5^8 (iv) 16 (v) 625 (vi) 1 (vii) a^4 (viii) 1

बनाकर देखें — 5 (पृ० - 76)

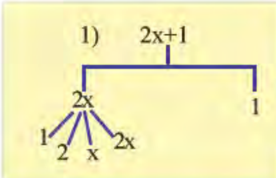
1. 579×10^5 कि०मी०, 2279×10^5 कि०मी० और 7783×10^5 कि०मी०

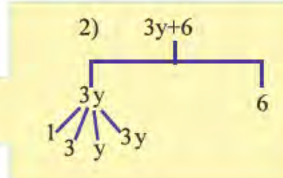
2. (i) 6 **(ii)** 10^8

3. (i) 97.8×10, 9.78×10^2 और 0.978×10^3 **(ii)** 15921.7×10, 1592.17×10^2 और 159.217×10^3 **4. (i)** 3272, **(ii)** 2035 **(iii)** 82306 **(iv)** 95670

5. (i) 18^2 **(ii)** 6^3 **(iii)** 1 **(iv)** a^3b **(v)** 2 **(vi)** $(2x^2)^2$

स्वयं करें — 6.2 (पृ० - 79)



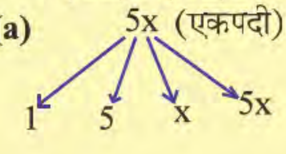


बनाकर देखें — 6.1 (पृ० -84)

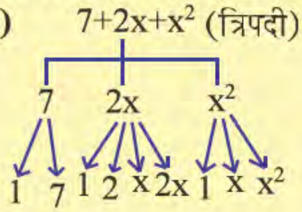
1. (a) x+y **(b)** z-x **(c)** 2p+q **(d)** x^3, **(e)** $\frac{1}{4}(x+y)$ **(f)** 4ab+7 **(g)** $2x+\frac{1}{2}y$ **(h)** (x+y)-xy

2. 17, 22, 27, 32, 37 .... ; 5x+2 एवं 13, 17, 21, 25 .... ; 4x+1

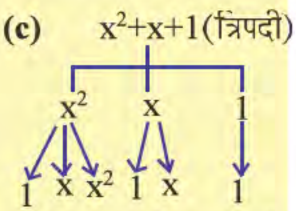
3. (a)



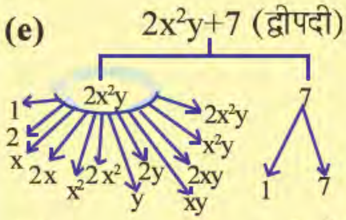
(b)



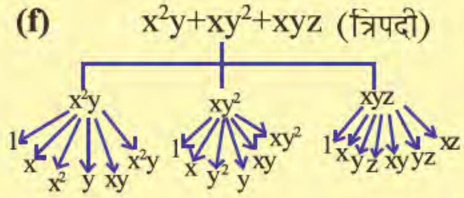
(c)



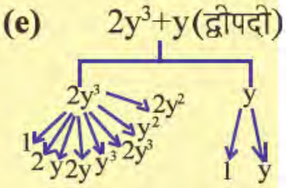
(e)



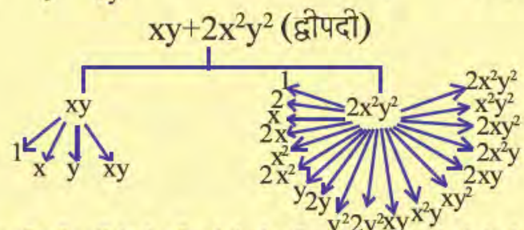
(f)



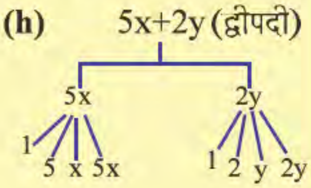
(e)



(g)



(h)



4. **(a)** 2, 3 **(b)** 1, 2 **(c)** 1, 5, -7 **(d)** -1 **(e)** 1, 1, -1 **(f)** $\frac{1}{2}$

5. **(a)** y^3x, y^3 **(b)** -8zx, -8z **(c)** -x, -1 **(d)** yx, y **(e)** x, 1 और xy^2, y^2 **(f)** $15xy^4$, $15y^4$ **(g)** -5x, -5 और $-xy^2$, $-y^2$

6. | 2x, -5x, 3x | y, 18y, – y | 12xy, -4xy, 3xy, -xy | $13y^2$, $-2y^2$ | $21x^2y$ | $-6x^2$, $-15x^2$ |

7. सदृश पद → (b), (c), (e) असदृश पद → (a), (d), (f)

8. (b), -6 ; (c), 3; (d), 3y; (e), $-6y^2$

स्वयं करें — 6.4 (पृ० - 94)

1) **(i)** 13x-12y **(ii)** 9a-5b + 2c-d **2)** **(i)** 5mn + 2m **(ii)** $p^2q-2p^2-q^2-pq^2$

बनाकर देखें — 6.2 (पृ० - 94)

1. (i) 8x **(ii)** 6y **(iii)** 3y **(iv)** -12x **(v)** 5a **(vi)** -4x **(vii)** 7p **(viii)** o **(ix)** $8a^2b$ (x) o
2. (a) 2x + 2 **(b)** 3x+6 **(c)** 4x + 18 **(d)** 2x + 13 **(e)** 3x – 27 **(f)** 5x + 15 **3. (i)** 10a + 4b **(ii)** 9a –5 **(iii)** $19a^2 + 3a + 19$ **(iv)** $13a^2b + 2b^2a + 22$ **(v)** 3xy + 4x+3y **4. (i)** 6x + 3y **(ii)**

$-4m^2 + 2m + 4$ **(iii)** $-6x - y - 7$ **(iv)** $-14a^2 + a + 3$ **(v)** $x + 2x^2 - 3y^2$ (vi) $x^2 + 4xy - 3y^2$ **5. (a)** $31x^2y - xy^2$ **(b)** $b + 16a$ **(c)** $-2m^2 - 4n^2$ **(d)** $2a - 2b$ **(e)** $8p - q - 2r$ **(f)** $-3x + 4y$ **(g)** $4x^2 - 6x$ **(h)** $5x^2 + 10x + 10$ **(i)** $4a - 4b + 2ab$ **6.** $9x^2 + 4x + 9$ **7.** $7x - 3$ **8.** $-6x^2 + 3x - 4$ **9.** $-4x - 10y - 4z$ **10.** $13x^2$ **11.** $6 + 8x + 5x^2$

स्वयं करें — 6.5 (पृ॰ - 97)

1) (i) 41 **(ii)** 3 **(iii)** 34 **(iv)** 133 **(v)** 5 **2) (i)** $\frac{1}{2}$ **(ii)** 8 **(iii)** 5 **(iv)** 6 **(v)** –28
3) (i) –3 **(ii)** 5 **(iii)** –9 **(iv)** 16 **(vi)** $-\frac{1}{36}$

स्वयं करें — 6.6 (पृ॰ - 100)

1) (i) $14x$ **(ii)** $-12x^2$ **(iii)** $6x^3$ **(iv)** 0 **(v)** $12a^2bc$ **(vi)** $16x^2y^2$ **(vii)** $6a^3b^3$ **(viii)** $16x^2y^2$

स्वयं करें — 6.7 (पृ॰ - 103)

1) (i) $a^3b - ab^3$ **(ii)** $4a^2 + 4ab - 4ac$ **(iii)** $12a^3b^2 + 6a^2b^3$ **(iv)** $x^3y^2z - x^2y^3z + xy^2z^3$ **(v)** 0
2) (i) $-x^2 + 41x$ (ii) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ (iii) $48x^2 + 18xy - 28x$ (iv) $14 - 3a - 12b$

स्वयं करें — 6.8 (पृ॰ - 105)

1) (i) $70 - 11x - 3x^2$ **(ii)** $88 + 16x - 22y - 4xy$ **(iii)** $4a^2 + 4aby - 6ay - 6by^2$ **(iv)** $6x^3y - 3xy^2 - 10x^2y^2 + 5y^3$ **(v)** $\frac{x^2}{3} - \frac{47}{90}xy + \frac{y^2}{5}$ **(vi)** $\frac{6a^3}{35} - \frac{4a^2}{63} - \frac{3a}{25} + \frac{2}{45}$

बनाकर देखें — 6.3 (पृ॰ - 108)

1. (i) $12ab$ **(ii)** $4b$ **(iii)** 3 **(iv)** $-x^3$ **(v)** 3 **(vi)** x^4 **(vii)** $\frac{1}{x^2}$ **(viii)** 0 **(ix)** 0 **(x)** $3b$ **(xi)** y **(xii)** अर्थहीन

2. (a) $-36x^2yz$ **(b)** $56x^4y^4$ **(c)** $24a^4b$ **(d)** $-\frac{13}{3}m^7n^7$ **(e)** $\frac{2}{5}x^3y^3$ **(f)** $15x^3yz^3$ **(g)** $-s^4t^3u^3$ **(h)** $-\frac{8}{3}x^4y^4z^4$ **(i)** $12a^2 + 28ab$ **(j)** $16a^3 + 40a^2b$ **(k)** $-51x^3 + 68x^2$ **(l)** $\frac{2}{3}a^3bc + \frac{2}{3}ab^3c - 2abc^3$ **(m)** $100x^3y - 1000x^2y^2$ **(n)** $10x^2 + 13xy - 3y^2$ **(o)** $2a^2b - 2b^3 - 6a^3 + 6ab^2$ **(p)** $3x^2 + 7x + 2$ **3. (i)** $6x^2$ **(ii)** $(12x^2 + 3x)$ वर्गमीटर **(iii)** $(2x^2 + 12x)$ रुपये **(iv)** $49x^2$ वर्गमीटर **(v)** $2x$ इकाई **(vi)** $81y^3$ **4. (i)** $8x$ **(ii)** $-9y^2$ **(iii)** $15y^3$ **(iv)** $-\frac{21}{4}\frac{m^2n^2}{1}$ **(v)** $5a - 7b^2$ **(vi)** $-16x^6 + 4x^3$ **(vii)** $3m + 4mn$ **(viii)** $-9a^3 + 6b^3$ **(ix)** $-1 - 2pr + 3p^2qr^2$ **(x)** $-\frac{1}{m^2} - \frac{1}{mn} - \frac{1}{n^2}$
5. (i) 0 **(ii)** $2ab - 2ca$ **(iii)** $-2x$ **(iv)** $-2x^2 - x$ **(v)** 0 **(vi)** 0

स्वयं करें — 10.1 (पृ॰ - 131)

1) (i) 0.76, 0.765, 0.7647 **(ii)** 0.66, 0.655, 0.6552

स्वयं करें — 10.2 (पृ॰ - 132)

452167— 452170– 452200, 452000, 450000;
784062— 784060, 784100, 784000, 780000

बनाकर देखें — 10 (पृ॰ - 132)

1. 42.86 पैसे; 0.02 पैसे अधिक **2.** लगभग 146.67 पैसे , 11.73 रुपये, 10.27 रुपये, 22 रुपये, बराबर **3.** 299330 कि॰मी॰ **4.** 1 **6.** **(i)** 3.14, 3.143, 3.1429 **(ii)** 0.21, 0.214, 0.2143 **(iii)** 0.20, 0.200, 0.2000 **(iv)** 0.82, 0.825, 0.8246 **8.** **(i)** 11 बजकर 10 मिनट **(ii)** 100 रुपये **(iii)** 1.6 से॰मी॰ **(iv)** 100 ग्राम

स्वयं करें — 11.1 (पृ॰ - 136)

1) (i) $\frac{16}{25}$ **(ii)** $\frac{36}{49}$ **(iii)** $\frac{16}{25}$ **(iv)** $\frac{121}{144}$ **2) (i)** $\frac{4}{5}$ **(ii)** $\frac{3}{8}$ **(iii)** $\frac{6}{11}$ **(iv)** $\frac{12}{13}$ **(v)** $\frac{15}{17}$

स्वयं करें — 11.2 (पृ॰ - 137)

1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 2 **2)** (i) 2 (ii) 5 (iii) 5 (iv) 3

बनाकर देखें— 11.1 (पृ॰ - 138)

1. $\frac{33}{25}$ से॰मी॰ **2. (i)** $1\frac{6}{7}$ **(ii)** $\frac{5}{9}$ **(iii)** $2\frac{15}{26}$ **(iv)** $\frac{35}{27}$ **(v)** $\frac{3}{4}$

3. $\frac{13}{11}$, **4.** $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{4}$ **5.** $\frac{41}{16}$ **6.** $1\frac{42}{49}$ **7.** $4\frac{4}{5}$ **8.** 2

9. $\frac{7}{6}$, $\frac{4}{5}$ **10.** $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$ **11.** 1 **12.** $\frac{23}{60}$ **13.** $\sqrt{\frac{1}{16}}$, $\sqrt{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{1}{36}}$, $\sqrt{\frac{1}{49}}$

14. 4 **15. (i)** $1\frac{6}{7}$ **(ii)** $\frac{43}{16}$ **(iii)** $\frac{11}{15}$ **(iv)** $1\frac{32}{35}$

स्वयं करें —11.3 (पृ॰ - 142)

1) (i) 0.49 **(ii)** 0.0256 **(iii)** 0.0064 **(iv)** 0.0625 **2) (ii)** 1.44 **3) (i)** 2.1 **(ii)** 1.5 **(iii)** 0.16 **(iv)** 0.22

स्वयं करें — 11.4 (पृ॰ - 143)

1) 0.016 **2)** 0.213 **3)** 1.03 **4)** 8.7

स्वयं करें — 11.5 (पृ॰ - 144)

2.24,2.236 व 2.65,2.646

बनाकर देखें — 11.2 (पृ० - 144)

1. 5.7 से०मी० **2.** 2.25 से०मी० **3.** 0.72 **4.** 0.18 **5.** 17.205 **6.**प्रथम वर्गक्षेत्र, 0.18 मीटर **7.** 0.5 **8.** **(i)** 1.6 **(ii)** 2.2 **(iii)** 2.4 **(iv)** 2.6 **(v)** 0.213 **(vi)** 0.013 **(vii)** 8.729 **(viii)** 13.057 **(ix)** 74.2 **9.** 1.05 **10.** 3.25 **11.** 15.6 **12.** 0.000004 **13.** **(i)** 2.45 **(ii)** 2.83 **(iii)** 3.317 **(iv)** 3.464 **14.** 3.87, 0.0231 कम

स्वयं करें — 12.1 (पृ० -152)

i) $a = x, b=3, x^2+6x+9$ **ii)** $a = p, b=9$, p2+18p+81 **iii)** $a=6, b=-x, 36-12x+x^2$ **iv)** $a=y, b=-2, y^2-4y+4$ **v)** $a=mn, b=l^2, m^2n^2+2mnl^2+l^4$ **vi)** $a=6x, b=3, 36x^2+36x+9$ **vii)** $a=4x, b=5y, 16x^2+40xy+25y^2$ **viii)** $a=pqc, b=2, p^2q^2c^2+4pqc+4$ **ix)** $a=\frac{5}{k}$, $b=3, \frac{25}{k^2}+\frac{30}{k}+9$, **x)** $a=\frac{3}{r}, b=\frac{2}{p}, \frac{q}{r^2}+\frac{12}{rp}+\frac{4}{p^2}$ **ix)** $a=\frac{5}{k}, b=3,$ $\frac{25}{k^2}+\frac{30}{k}+9$ (x) $a=\frac{3}{r}, b=\frac{2}{p}, \frac{q}{r^2}+\frac{12}{rp}+\frac{4}{p^2}$ (xi) $a=\frac{p}{q}, b=\frac{m}{n}, \frac{p^2}{q^2}+\frac{2pm}{qn}+\frac{m^2}{n^2}$ **xii)** $a=m^2, b=n^2, m^4+2m^2n^2+n^4$ **xiii)** $a=3xy, b=4z, 9x^2y^2+24xyz+16z^2$ **xiv)** $a=2x, b=3y+z, 4x^2+9y^2+z^2+12xy+6yz+4zx$ **xv)** $a=100, b=2$, 10404 **xvi)** $a=p, b=q+r+s$, $p^2+q^2+r^2+s^2+2pq+2pr+2qr+2qs+2rs+2ps$

स्वयं करें — 12.2 (पृ० -153)

(i) $a=x, b=5, x^2-10x+25$ **(ii)** $a=m, b= n, m^2-2mn+n^2$ **(iii)** $a=10, b=x, 100-20x+x^2$ **(iv)** $a=x, b=-y, x^2+2xy+y^2$ **(v)** $a=3x, b=y, 9x^2-6xy+y^2$ **(vi)** $a=4m, b=-2, 16m^2+16m+4$ **(vii)** $a=5y, b=-x, 25y^2+10xy+x^2$ **(viii)** $a=ce, b=fg, c^2e^2-2cefg+f^2g^2$ **(ix)** $a=px, b=\frac{1}{2}$ $p^2x^2-px+\frac{1}{4}$ **(x)** $a=p+q, b=r, p^2+q^2+r^2+2pq-2qr-2pr$ **(xi)** $a=p, b=q-r, p^2+q^2+r^2-2pq-2qr+2pr$ **(xii)** $a=\frac{2x}{3}, b=\frac{3y}{4}, \frac{4}{9}x^2-xy+\frac{9}{16}y^2$ (xii) $a=3m^3, b=4n^3, 9m^6-24m^3n^3+16n^6$ (xiv) $a=2x+y, b=z, 4x^2+y^2+z^2+4xy-2yz-2zx$ **(xv)** $a=1000, b=1$, 998001 **(xvi)** $a=p+q, b=r+s$, $p^2+q^2+r^2+s^2+2pq-2pr-2ps-2qr-2qs+2rs$

बनाकर देखें — 12.1 (पृ० - 155)

1. **(ii)** $(a+b)^2$ **2.** **(ii)** 49, **3.** **(iii)** 2ab या -2ab, **4.** (iii) 3 **5.**(i) $\frac{1}{64}$ **6.**(i) $k = \pm\frac{2}{3}$ (ii) 2,-2 (iii) 2 (iv)$k= -6$ **7.** **(i)** q^2 **(ii)** $(p+q)^2$ **8.** **(i)** $(4a-5c)^2$ **(ii)** $(2p-\frac{1}{2})^2$ **(iii)** $(1+\frac{2}{a})^2$ **(iv)** $(3a+4b)^2$ **9.** **(i)** 81 **(ii)** 81 **(iii)** 49 **(iv)** 169 **10.** **(i)** 20,104 **(ii)** 624 **(iii)** $\frac{53}{28}$, **(vi)** $(2x+5y)^2+(2x-5y)^2$ **(vii)** $(\frac{1+x}{2})^2-(\frac{1-x}{2})^2$ (और भी समाधान हो सकता है)

बनाकर देखें—12.2 (पृ० - 161)

1. **(i)** x^2+8x+7 **(ii)** $x^2-10x+16$ **(iii)** $x^2+3x-54$ **(iv)** $4x^2-1$ **(v)** $x^2y^2-2xy-8$ **(vi)** a^4+a^2-20

3. (i) 65 **(ii)** 24 **(iii)** 6 **(iv)**14 **(v)** 18 **(vii)** 21 **(viii)** 7 **(x)** $34\frac{2}{3}$ **(xi)** $23\frac{4}{7}$ **(xii)** 5 **(xvii)** 18

बनाकर देखें —12.3 (पृ॰ - 167)

1. (i)1200 **(ii)** 3.36 **(iii)** 6936 **(iv)** 0.9775 **(v)** 3000 **2. (i)** 81 **(ii)** a=2 **(iii)** 4+x **3. (i)** (5l+4m) (5l-4m) **(ii)** $(7x^2+6y^2)(7x^2-6y^2)$ **(iii)** (3a+2b)a (iv) (x+y+a+b) (x+y-a-b) (v) 4x(y-z) (vi) 4m(p+q) **4. (i)** c^4-d^4 **(ii)** $1-81x^8$ **(iii)** $a^{16}-b^{16}$ **5. (i)** $(4c^2+9d^2)(2c+3d)(2c-3d)$ **(ii)** $(p^2q^2+r^2s^2)(pq+rs)(pq-rs)$ **(iii)** $(9+x^2)(3+x)(3-x)$ **(iv)** $(25+a^2b^2)(5+ab)(5-ab)$ **7.** $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$ **9.** a^8+a^4+1 **10.** 16 **11.** $(2x+1)^2-(a-4)^2$ **12.** $(a-\frac{1}{a})^2-1^2$

बनाकर देखें — 14 (पृ॰ - 177)

1. (i) तीन **(ii)** एक **(iii)** तीन **(iv)** एक **(v)** समबाहु त्रिभुज

स्वयं करें — 15.1 (पृ॰ 186)

10. 5 कि॰मी॰

बनाकर देखें — 15 (पृ॰ - 187)

1. शनिवार, 4कि॰मी॰, सरल समानुपातिक **2.** मंगलवार, 2 मिनट, व्यस्तसमानुपात **4.**18 कि॰मी॰/घंटा **5.** 6 सेकेण्ड **6.** 7घंटा 48मिनट **7.** 16:5 **8.** 3घंटा 15 मिनट **9.** 50कि॰मी॰ **10.** 202.5 कि॰मी॰ **11.** $8\frac{2}{5}$ सेकेंड **12.**12.96 कि॰मी॰ प्रतिघंटा **13.** 21सेकेंड **14.** 250 मीटर **15.** 66 मीटर, 59.4कि॰मी॰/घंटा **16.** 65 मिटर, 39.6 कि॰मी/घंटा **17.** 180 मिटर **18.** 125मिटर, 45कि॰मी॰/घंटा **20.**1मिटर।

स्वयं करें — 17.2 (पृ॰ - 201)

1) 630 वर्गमीटर **2)** 46,170 रुपये **3)** 4,320 रुपये **4)** 27,500 रुपये

स्वयं करें — 17.3 (पृ॰ - 203)

1) 512 वर्गमीटर **2)** 1344 वर्गमीटर

बनाकर देखें - 17 (पृ॰ - 204)

2. (i) 16 से॰मी॰ **(ii)** 25 वर्गमीटर **(iii)** 40 वर्गसे॰मी॰ **(iv)** 10000 **(v)** 0.0001 **(vi)** 5 वर्गमीटर = 5 मीटर × मीटर एवं 5 वर्ग मीटर = 5 मीटर × 5 मीटर **(ix)** 36 वर्गसे॰मी॰ **(x)** 25 **3. (a)** 64 वर्गसे॰मी॰ **(b)** 60 वर्गसे॰मी॰ **(c)** 516 वर्गसे॰मी॰ **4.** 88 वर्गसे॰मी॰, 92 वर्गसे॰मी॰ **5. (i)** 40 मीटर, 28 मीटर **(ii)** 864 वर्गमीटर **(iii)** 256 वर्गमीटर **6.** 84 वर्गमीटर **7.** 1120 रुपये **8.** 34 मीटर, 17 मीटर, 102 मीटर **9.** 24 मीटर, 12 मीटर **10.** 0.395 वर्गमीटर, 6.48 वर्गमीटर **11.** 38000 रुपये, 481.25 वर्गमीटर **12.** 64 वर्गमीटर, 72 वर्गमीटर **13.** 25मीटर 14. 6000 **15.** 240.44 वर्गमीटर, 6011 **16.** 66 वर्गसे॰मी॰, 136 वर्गसे॰मी॰, 90 वर्गसे॰मी॰, 90 वर्गसे॰मी॰ **17. (i)** 3600 रुपये **(ii)** 2496 रुपये **(iii)** 2277.60 रुपये **(iv)** 17717.40 रुपये **18.** 100800 रुपये

बनाकर देखें — 18.2 (पृ॰ - 216)

1. i) समद्विबाहु **(ii)** समबाहु (iii) 4 **(iv)** 2 **(v)** 4,2 **(vi)** समानान्तर चतुर्भुज **(vii)** (a) दो (b) सूषम पंचभुज **(ix)** 60,6 **(x)** समद्विबाहु **(xi)** दोनों कर्ण **(xii)** 180 **(xiii)** 120 **(xiv)** 90 **(xv)** समानान्तर चतुर्भुज **2.** (a) समद्विबाहु त्रिभुज (b) समानान्तर चतुर्भुज (c) 6 (d)

स्वयं करें — 19.1 (पृ॰ - 221)

1) 2×2×3×x×x×y(x+2) **2)** 2×3×3×y×z×z(2y+3z) **3)** 2×2×2×2×x×y×z(x+y) **4)** 3×5×p×q×q(p+3q)

स्वयं करें — 19.2 (पृ॰ - 224)

1) (i)2(1+7x) (ii) 5(x-4y) (iii) 3(2x-y) (iv) 3a(a-4) **2)** (i) 2,a,2a (ii) x (iii) 2, 4, y, z, yz, 2y, 2z, 2yz, 4y, 4z, 4yz (iv) 7, a, b, 7a, 7b, ab, 7ab

स्वयं करें — 19.3 (पृ॰ - 224)

1) (i) (x+1)(y+3) (ii) (q+2)(p-1) (iii) (3y+2)(2x+1) (iv) (2y+1)(5x+1)

बनाकर देखें— 19.1 (पृ॰ - 225)

1. (i) 7× x ×y **(ii)** 3×3× x× x ×y **(iii)** 2×2×2×2×a×b×b×c **(iv)** -5×5×l×m×n **(v)** 2×2×3 × x × (2 + x) **(vi)** -5×p×q× $(p^2 + 8)$ **(vii)** 3×7×x ×y×y×(3x - 2) **(viii)** 11×11×m×n× $(m^2 - n)$ **2. (i)** 11, x, 11x **(ii)** 7, a, b, 7a, 7b, 7ab **(iii)** -1, -n, -l, nl, -nl, n, l **(iv)** 2, 3, 6, a, b, 2a, 2b, 3a, 3b, 6a, 6b, ab, 2ab, 3ab, 6ab **(v)** 2 **(vi)** 3, 9, x, 3x, 9x **(vii)** 1 **4. (i)** 5(1+2x) **(ii)** 2(x - 3) **(iii)** 7(m - 2n) **(iv)** 3x(6y + 7z) **(v)** 2y(2x + 3z) **(vi)** xy(7z - 6) **(vii)** 7a(a + 2) **(viii)** -5(3m - 4) **(ix)** 2ab(3a+4b), (x) $a(3a - b^2)$ **(xi)** bc(a - d) **(xii)** $2×2(15xy^3 + xy - 2)$ **(xiii)** xyz(x + y + z) **(xiv)** $a(a^2 - a + 1)$ **(xv)** $xxyy(z^2 + 1 + q^2)$ **5. (i)** (x + 1)(y + 2) **(ii)** (b + 1)(a - 5) **(iii)** (2x - 3)(3y + 2) **(iv)** (3 - 7n)(5m + 3) **(v)** (a + b)(x - y) **(vi)** (1- ab)(c - 9)

बनाकर देखें— 19.2 (पृ॰ - 228)

1. (i) (x + 7)(x + 7) **(ii)** (2m - 9)(2m - 9) **(iii)** (5x + 3)(5x + 3) **(iv)** (11b - 4)(11b -4) **(v)** xxyy (x+2)(x-2) **(vi)** $(a^2 + 2b^2)(a^2 + 2b^2)$ **(vii)** 2×2 (x+2)(x-2) **(viii)** (11+ 6x)(11-6x) **(ix)** (xy + pq)(xy - pq) **(x)** 5(4m + 5)(4m - 5) **(xi)** a(x+y)(x-y) **(xii)** (l + m + n)(l - m - n) **(xiii)** (3a - 3b - 2c)(a+b) **(xiv)** (x-3y)(x+y) **(xv)** (x+3y + z)(x+3y - z) **(xvi)** (a + b - c)(a - b + c) **(xvii)** c(b - a)(2ab - bc - ca) **(xviii)** (x + y +3z)(x - y - 3z) **(xix)** (x -y)(x + y + 4) **(xx)** (a + b - c - d)(a - b - c +d) **(xxi)** (a - b + c)(b - a + c) **(xxii)** (6x + 4a + 3b)(6x - 4a - 3b) **(xxiii)** (a - b + 1)(a + b-1) **(xxiv)** (a + b - 2)(a - b) **(xxv)** (ac - bd + bc +ad)(ac - bd - bc - ad) **(xxvi)** (a - b)(a + b - 4c) **(xxvii)** (a + b + c +d)(a - b - c + d)(a + b - c - d)(a - b + c - d) **(xxviii)** (3x + y - z)(x - y - z) **2. (i)** $(9x^2 + 6xy + 2y^2)(9x^2 - 6xy + 2y^2)$ **(ii)** $(p^2 + 3pq - 2q^2)(p^2 - 3pq - 2q^2)$ **(iii)** $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2y^2)(x^2 - 2y^2)$ **(iv)** $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ **(v)** $(x^2 + y^2)(3x^2 - y^2)$ **(vi)** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ **(vii)** $(x^2 + 4y^2)(x^2 + 2y^2)$ **(viii)** (z - x + y)(z -3x - y) **(ix)** $(x + y)(x - y)(3x^2 - y^2)$ **(x)** $(p^2 + 3q^2)(p^2 - 5q^2)$ **(xi)** $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

बनाकर देखें — 20 (पृ० - 239)

2. **(i)** बराबर **(ii)** समानान्तर चतुर्भुज **(iii)** समानान्तर **(iv)** आयतक्षएत्र **(v)** दो **(vi)** समकोण **(vii)** बराबर **(viii)** समानान्तर चतुर्भुज **(ix)** समद्विभाजित

स्वयं करें — 22.1 (पृ० - 252)

1) $x = 5$ **2)** $x = 6$ **3)** $x = 6$ **4)** $x = 6$

स्वयं करें — 22.2 (पृ० - 258)

1) $x = 12$ **2)** $y = 13$ **3)** $x = 5$ **4)** $y = \frac{2}{3}$ **5)** $x = 2$

बनाकर देखें — 22.1 (पृ० - 253)

1. **(a)** समीकरण, x **(b)** समीकरण, x **(c)** समीकरण, t **(d)** समीकरण, t **(e)** समीकरण, x **(h)** समीकरण, y **(i)** समीकरण, x **2.** **(i)** $3x = 33$ **(ii)** $5y = 65$ **(iii)** $x+2 = 18$ **(iv)** $\frac{x}{4} = 5$

3.

सिद्ध नहीं करता है
सिद्ध नहीं करता है
सिद्ध नहीं करता है
सिद्ध नहीं करता है
सिद्ध करता है
सिद्ध नहीं करता है
सिद्ध नहीं करता है
सिद्ध नहीं करता है

4. **(i)**

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p+12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

(ii)

m	1	2	3	4	5	6	7	8
6m	6	12	18	24	30	36	42	48

(iii)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{t}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2

(iv)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7-x	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3

बनाकर देखें - 22.2 (पृ० - 259)

1. **(a)** $7x = 42$ **(b)** $4x + 5 = 3(x + 5)$ **(c)** $x + x - 5 + 2x = 187$

(d) $x - (3895 - x) = 1871$ **(e)** $12x - 48 = \frac{12}{5}x$

(f) $x - (\frac{1}{3}x + \frac{2}{7}x) = 160$ **(g)** $10\times5 + x = 11x$ **(h)** $100\times y + 10\times 7 + 0 = 114y$

बनाकर देखें - 22.3 (पृ० - 263)

(i) $x = \frac{7}{6}$ **(ii)** $x = 0$ **(iii)** $x = 3$ **(iv)** $x = 6$ **(v)** $x = 2$ **(vi)** $y = 5$ **(vii)** $x = 4$ **(viii)** $x = 7$ **(ix)** $x = -3$ **(x)** $x = -1$ **(xi)** $x = 3\frac{9}{10}$ **(xii)** $x = -\frac{2}{3}$ **(xiii)** $x = -1$ **(xiv)** $x = 2$ **(xv)** $x = 13\frac{8}{27}$ **(xvi)** $t = 4\frac{4}{5}$ **(xvii)** $x = \frac{3d - 2b}{2a - 3c}$ **(xviii)** $x = 2.2$ **(xix)** 8.7 **(xx)** 3.8

बनाकर देखें - 22.4 - (पृ० - 265)

1. 1100रुपये **2.** लम्बाई 120 मीटर, चौड़ाई 80 मीटर **3.** मंजू को 50 रुपये, कना को 70 रुपये एवं अमल को 50 रुपये **4.** 12 **5.** 1536 वर्गमीटर **6.** 5 रुपये के 11सिक्के एवं 10 रुपये के 9 सिक्के **7.** 90° **8.** 75,000 रुपये **9.** 14 कि०मी०/घंटा **10.** भाई की उम्र 4 वर्ष एवं चांदू की उम्र 12 वर्ष।

आपका पन्ना

यह पुस्तक तुम्हें कैसी लगती है ? लिखकर, चित्र बनाकर समझा दें :

आपका पन्ना

यह पुस्तक तुम्हें कैसी लगती है ? लिखकर, चित्र बनाकर समझा दें :

शिक्षण–परामर्श

- राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रुपरेखा NCF —2005का परामर्श यह है कि शिक्षार्थी अपने विद्यालय के जीवन और विद्यालय के बाहर अपने जीवन के साथ सर्वदा सामंजस्य बना सके। यह नीति निर्देश करती है कि विद्यार्थी की शिक्षा केवल पुस्तक ही सीमित न रहे। केवल पुस्तक से शिक्षा मिलने पर विद्यार्थी की शिक्षा में विद्यालय, घर एवं समाज से शिक्षा में एक खालीपन की सृष्टि होती है। राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रुपरेखा की इस मूल नीति के आधार पर ही वर्तमान पाठ्यक्रम, पाठ्यसूची और पाठ्य–पुस्तक तैयार किया जाता है। यह नीति और यह परामर्श देती है कि विद्यार्थी की शिक्षा विषय केन्द्रिय न हो। जहाँ तक संभव हो विद्यार्थी विभिन्न विषयों में एक सम्पर्क खोज पाये।

- आशा किया जाता है कि, शिक्षक/शिक्षिका जब इस पुस्तक का व्यवहार करेगें, जितना संभव हो इस नीति और दिए गए परामर्श का पालन करेंगे।

- वर्तमान शिक्षा विद्यार्थी आधारित है, शिक्षक/शिक्षिका केवल सहायक है अर्थात् विद्यार्थी अपने जन्म के बाद से ही घर, परिवेश, समाज से बहुत कुछ सीखता है अत: शिक्षक/शिक्षिका इसका ध्यान रखेंगे। यदि शिक्षक किसी विषय को बारे में बतलाते है, तो पहले उस विषय में विद्यार्थी के अर्जित ज्ञान का ख्याल रखते हुए सहायता करेंगे। विद्यार्थी की सोच या तर्क किसी भी प्रकार से रुके नहीं, वह चिन्तामुक्त होकर जाये उस तरफ सर्वदा ध्यान रखेंगे।

- पाठ्य पुस्तक विद्यार्थी की शिक्षा में केवल एक सहायक है। एक मात्र सहायक नहीं, विद्यार्थी की शिक्षा आनन्दपूर्वक हो इसके लिए विभिन्न शिक्षा संसाधनों की सहायता लेना चाहिए।

- गणित विषय की शिक्षा में विद्यार्थी के अंदर मूर्त धारणा से विमूर्त धारणा उत्पन्न हो। नहीं तो गणित विषय शिशु के लिए एक भय उत्पन्न का कारण बन जाता है।

- शिक्षक/शिक्षिका विद्यार्थी के परिचित परिवेश से कुछ वास्तविक समस्या तैयार करके गणित के किसी अध्याय में शुरू करें। इसके पश्चात् यदि संभव हो, तो सक्रियता आधारित Activity के द्वारा उस अध्याय के विषय में विद्यार्थी के मन में तार्किक धारणा को जन्म दे। विद्यार्थी की सोच–विचार तथा तर्क की स्वच्छता आने के बाद ही वह विमूर्त विषय को लेकर काम करें।

- शिक्षक/शिक्षिका यह भी ध्यान रखेंगे कि विद्यार्थी पुस्तक से स्वयं कितना किसी एक अध्याय को सीख पाता है। जब वह उस अध्याय के किसी अंश को सीखने में अटकता है या बाँधा प्राप्त करता तभी शिक्षक/शिक्षिका धीरे–धीरे उसकी सहायता करें। जिससे वह समस्या के समाधान का रास्ता स्वंय खोज पायें।

- शिक्षक/शिक्षिका किसी अध्याय के विषय में विद्यार्थी को इस प्रकार से कहानी कहेंगे जिससे विद्यार्थी प्रारंभ में कुछ समझने न पाये कि उसे कुछ सिखाया जा रहा है।

- दलगत शिक्षण विद्यार्थी के लिए अत्यन्त सहायक होता है। शिक्षक/शिक्षिका श्रेणी कक्ष में इस ओर ध्यान रखेंगे।

- वर्तमान शिक्षा में विद्यार्थी को पाठ दान या कुछ तथ्य बतलाने के लिए नहीं, विद्यार्थी ज्ञान को अर्जित कर सके शिक्षक/शिक्षिका इसका ध्यान रखेंगे। विद्यार्थी ज्ञान अर्जित करने पर वह धीरे–धीरे अनेक विषयों में गणित को खोजना चाहेगा एवं गणित विषय उसके लिए आनन्दायक हो उठेगा।

- विद्यार्थी मन में ही जल्दी-जल्दी किसी हिसाब को कर सके (मानसांक) शिक्षक/शिक्षिका इस पर विशेष ध्यान रखेंगे। गणित के प्रत्येक अध्याय से विद्यार्थी यदि मानसांक कर पाये तो विद्यार्थी की सोच–विचार, तर्क या गणना करने की क्षमता बहुत जल्दी तैयार हो जाती है।

- विद्यार्थी गणित के किसी अध्याय को सीखते समय शिक्षक/शिक्षिका उस अध्याय के ऊपर यदि एक ऐसी तालिका बनाये जिससे उस अध्याय से विद्यार्थी के सीखने की जितनी संभावनायें रहती है उसे वह सीखता है। जैसे— गुणक के क्षेत्र में —

  1) बिना शून्य के एक संख्या के गुणकों की धारणा।
  2) वास्तव में गुणकों के प्रयोग की धारणा।
  3) एक संख्या के कितने गुणक हो सकते है उसकी धारणा।
  4) दो संख्याओं के साधारण गुणकों की धारण।
  5) दो संख्याओं के साधारण गुणक कितने हो सकते है उसकी धारणा।
  6) लघिष्ठ साधारण गुणकों की धारणा।
  7) वास्तविक साधारण गुणक और लघिष्ठ साधारण गुणकों के प्रयोग की धारणा।
  8) एक संख्या के किसी गुणक से कौन–कौन गुणनखण्ड मिलेंगे उसकी धारणा।

- किसी भी अध्याय के कुछ Open ended प्रश्न रहना आवश्यक है।
  a) जैसे दो संख्याओं का चार साधारण गुणक लिखो।
  b) एक बीजगणितीय संख्या माला जिसके दो चल है,
  c) एख गुरू अनुपात लिखो।
  d) तीन सरल रेखा की लम्बाई खीचों जिससे त्रिभुज बनाया जा सके।

- इस प्रकार की संभावना को शिक्षक/शिक्षिका स्वयं बनाये तो उनके पक्ष में विद्यार्थी के सर्वांगीण मूल्यांकन में CCE सुविधा होगी।

- विद्यार्थी के सामने किसी गणितीय परिभाषा या चिन्ह को निर्देश आकार में पहले से नहीं लाना ठीक है जो विद्यार्थी के लिए शिक्षण में पहले ही प्रतिबंधकता की सृष्टि करना है जैसे विद्यार्थी को पहले ही $\ngtr$ चिन्ह न बताकर यदि शिक्षक/शिक्षिका कुछ कहानी के माध्यम से अधिक नहीं की धारणा दें। जैसे— रुपा के बक्से के पेंसिलों की संख्या और नसीमा के बक्से की पेंसिलों की संख्या 5 से अधिक नहीं है, तो विद्यार्थी की सीख अच्छी होगी। इस प्रकार और भी अधिक नहीं की कहानी बतलाकर इस अधिक नहीं बात को यदि वे गणितीय चिन्ह में रुपांतरित करें तो विद्यार्थी को समझने में सुविधा होगी।

- गणित की कोई भी प्रक्रिया विद्यार्थी बिना समझे याद न कर लें। प्रत्येक प्रक्रिया को तर्क के द्वारा वह समझ पाये कि क्यों और कैसे होता है, शिक्षक/शिक्षिका इस ओर विशेष ध्यान रखेंगे। जैसे, जोड़, घटाव, गुणा के क्षेत्र में काम दाहिने तरफ से शुरू होता है लेकिन भाग के क्षेत्र में बायें से शुरू होता है लेकिन भाग के क्षेत्र में बायें से शुरू होता है। शिशु सक्रियता आधारित काम के माध्यम से ऐसा क्यों होता है तार्किक रुप से समझ सके।

- कक्षा में शिक्षक/शिक्षिका द्वारा दिया गया कोई सवाल कोई विद्यार्थी जल्दी ही हल करें और शांत होकर बैठे न रहे। जो विद्यार्थी जल्दी-जल्दी अध्याय को समझकर आगे जा रहे है तो शिक्षक/शिक्षिका और भी उससे कठिन सवाल देकर उसे आगे करेंगे। और जो धीरे-धीरे आगे बढ़ता है उसके अन्दर धीरे-धीरे तर्क वितर्क को बढ़ायेंगे तथा अध्याय में जिस सार्मथ्य की कामना है उस तक पहुँचाने में सहायता करेंगे।

- उच्च प्राथमिक शिक्षा में विद्यार्थी गणित के विभिन्न शाखाओं जैसे— अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति और राशि विज्ञान की धारणा करना शुरु करते है। इन शाखाओं में कोई अन्तर नहीं है उनके अंदर बहुत मेल है विद्यार्थी इस धारणा को समझ पाये। जैसे बीजगणित अंकगणित का साधारण रुप है। ज्यामिति में एक सरल रेखा पर x एक बिन्दु कहने पर x का मान असंख्य हो सकता है अर्थात् ज्यामिति के साथ बीजगणित का सम्पर्क है। इस सब धारणाओं से होकर वे गणित के सभी शाखाओं की चर्चा करेंगे एवं शाखाओं को अलग नहीं मानेंगे। तब गणित विषय उनके सामने और भी आनन्दायक हो उठेगा।

- कक्षा और वास्तविक समस्या जानकर शिक्षक/शिक्षिका स्वयं विद्यार्थी को तर्क पूर्ण आनन्दायक के लिए पाठ्य पुस्तक को और भी किस तरह अच्छे तरीके से प्रयोग किया जायेगा, उसका भी परामर्श देगे।

पाठ परिकल्पना

महीना	विषय
January (जनवरी)	1. पूर्व पाठों का पुनरावलोकन 2. अनुपात
February (फरवरी)	3. समानुपात 4. पूर्ण संख्याओं का जोड़, घटाव, गुणा और भाग।
March (मार्च)	5. सूचकों की धारणा। 6. बीजगणितीय प्रक्रिया। 7. कम्पास की सहायता से निर्दिष्ट कोण बनाना।
April (अप्रैल)	8. त्रिभुज बनाना 9. सर्वांगसमता की धारणा
May (मई)	10. आसन्न मान 11. भिन्नों का वर्गमूल 12. बीजगणितीय सूत्रावली
June (जून)	13. समानान्तर सरल रेखा और कटान बिन्दुओं की धारणा। 14. त्रिभुज की विशेषताएं
July (जुलाई)	15. समय और दूरी 16. द्विस्तंभ लेख 17. आयत क्षेत्र और वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल
August (अगस्त)	18. प्रतिसाम्य 19. उत्पादकों का विश्लेषण
September (सितम्बर)	20. चतुर्भुज का वर्ग विभाजन
October (अक्टूबर)	21. चतुर्भुज बनाना
November (नवम्बर)	22. समीकरणों का गठन और समाधान
December (दिसम्बर)	23. मजेदार अंक