गणित प्रभा

अष्टम श्रेणी

पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद

प्रथम संस्करण : जनवरी, 2014
द्वितीय संस्करण : दिसम्बर, 2014

पुस्तक अधिकार : पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद

प्रकाशक :
प्राध्यापिका नवनीता चटर्जी
सचिव, पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद
77/2, पार्क स्ट्रीट, कोलकाता – 700 016

मुद्रक :
वेस्ट बेंगल टेक्सबुक कारपोरेशन लिमिटेड
(पश्चिमबंग सरकार का उपक्रम)
कोलकाता – 700 056

सत्यमेव जयते

भारतीय संविधान

प्रस्तावना

हम, भारत के लोग, भारत के एक संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न धर्मनिरपेक्ष समाजवादी लोकतंत्रात्मक गणराज्य बनाने के लिए तथा उसके समस्त नागरिकों को न्याय, सामाजिक, आर्थिक और राजनीतिक, स्वतंत्रता, विचार की अभिव्यक्ति की, विश्वास की धर्म एवं पूजा की समानता-प्रतिष्ठा एवं अवसर की समता प्राप्त करने के लिए तथा उन सब में, भ्रातृत्व- जिसमें व्यक्ति की गरिमा और राष्ट्र की एकता सुनिश्चित रहे का वर्धन करने के लिए इस संविधान सभा में आज 26 नवम्बर 1949 को इसके द्वारा इस संविधान को स्वीकार करते है, कानून का रूप देते हैं और अपने-आप को इस संविधान को अर्पण करते है।

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC and to secure to all its citizens : JUSTICE, social, economic and political; LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship; EQUALITY of status and of opportunity and to promote among them all – FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation; IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November 1949, do HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.

भूमिका

राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रूपरेखा 2005 एवं शिक्षा अधिकार कानून 2009 इन दोनों को महत्त्व देते हुए वर्ष 2011 में पश्चिम बंगाल सरकार के नेतृत्व में गठित 'विशेषज्ञ समिति' के विद्यालय स्तर का पाठ्यक्रम, पाठ्यसूची एवं पाठ्य पुस्तकों की समीक्षा और पुनर्विवेचना का दायित्व दिया गया। इस समिति के विषय विशेषज्ञ के अथक प्रयत्न एवं परिश्रम से इस पुस्तक को तैयार कर पाना सम्भव हो सका है।

इस गणित की पुस्तक में अष्टम श्रेणी के पाठ्यसूची के अनुसार ही प्रणयन और नामकरण किया गया। 'गणित प्रभा'। इस पुस्तक में गणित की भाषा में समाधान करने की प्रचलित अवधारणा को अपनाया गया है, जिससे गणित की भाषा में भाषातंरित समस्या को देखकर विद्यार्थी आसानी से समझ पाए कि संश्लिष्ट समस्या में किस गणित की प्रक्रिया, सूत्र अथवा पद्धति के प्रयोग करने की जरुरत है।

अंकगणित, बीजगणित और ज्यामिती विषयों को सुन्दर और सहज भाषा में इस तरह से बतलाया गया है कि जिससे समस्त विद्यार्थियों के समाधान करने में सफलता हासिल करने के उद्देश्य को भली-भाँति इस पुस्तक में प्रसारित किया गया है।

विभिन्न शिक्षक, शिक्षाप्रेमी, शिक्षाविद, विषय विशेषज्ञ और अलंकरण के लिए प्रसिद्ध कलाकार-जिनके निरंतर श्रम एवं अथक प्रयास से इस महत्त्वपूर्ण पुस्तक को तैयार करना सम्भव हो सका। उन सभी को पर्षद की ओर से आंतरिक धन्यवाद और कृतज्ञता ज्ञापित करता हूँ।

पश्चिमबंग सर्वशिक्षा मिशन की आर्थिक सहायता से यह पुस्तक छात्र-छात्राओं को बिना मूल्य के वितरण की जाएगी। इस परियोजना को कार्यान्वित करने के लिए पश्चिम बंगाल सरकार का शिक्षा विभाग, पश्चिमबंग शिक्षा अधिकार एवं पश्चिम बंगाल सर्व शिक्षा मिशन ने विभिन्न प्रकार से सहायता की है। उनकी भूमिका को अनदेखा नहीं किया जा सकता है।

आशा करता हूँ कि पर्षद द्वारा प्रकाशित इस 'गणित प्रभा' पुस्तक विद्यार्थियों में विज्ञान विषय के प्रति आकर्षित करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका का पालन करेगी और माध्यमिक स्तर पर गणित चर्चा का मान उन्नयन करने में सहायक होगा। इससे छात्र-छात्राएं लाभान्वित होगे। इस तरह से ही पर्षद की सामाजिक प्रतिबद्धता सार्थक होगी।

समस्त शिक्षाप्रेमी, शिक्षक-शिक्षिका और संश्लिष्ट सभी से मेरा विनित अनुरोध है कि आप अपने बहुमूल्य परामर्श एवं सुझाव देने का प्रयास करें ताकि आगामी दिनों में आने वाले संस्करण में संशोधन किया जा सके। इस पुस्तक के जरिए मान उन्नयन होगा और छात्र-छात्राएँ लाभाविन्त होगे। अंग्रेजी में एक कहावत है— 'even the best can be bettered' पुस्तक की उत्कृष्टता के लिए शिक्षक समाज और विद्वान व्यक्तियों के विचार एवं परामर्श को हमेशा ग्रहण करेंगे।

जुलाई, 2014
77/2 पार्क स्ट्रीट
कोलकाता 700 016

कल्याणमय गांगुली
प्रशासक
पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद

प्राक्कथन

पश्चिम बंगाल की माननीया मुख्यमंत्री सुश्री ममता बनर्जी ने 2011 में विद्यालय की शिक्षा के लिए एक 'विशेषज्ञ समिति' का गठन किया। इस विशेषज्ञ समिति को यह दायित्व दिया गया कि विद्यालय स्तर के समस्त पाठ्यक्रम, पाठ्सूची एवं पाठ्य-पुस्तक की पुनः पुनर्विवेचना एवं पुनर्विन्यास प्रक्रिया को संचालित करें। उस समिति की सिफारिश के अनुसार नवीन पाठ्यक्रम, पाठ्यसूची एवं पाठ्य-पुस्तक तैयार किया गया। इस पूरी प्रक्रिया में राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रूपरेखा 2005 शिक्षा अधिकार नियम 2009 (RTE, 2011) इन दोनों को ध्यान में रखा गया है। इसके साथ ही साथ समग्र परिकल्पना में रवीन्द्रनाथ ठाकुर के शिक्षा दर्शन की रूपरेखा को आधार के रूप में ग्रहण किया है।

उच्च माध्यमिक स्तर पर गणित की पुस्तक का नाम '*गणित प्रभा*' है। पुस्तक में क्रम से गणित की समस्या के समाधान की पद्धति को बतलाया गया है। विद्यार्थियों की सुविधा के लिए प्रत्येक क्षेत्र में यत्नपूर्वक मौलिक अवधारणाओं को सरल भाषा एवं स्वयं करों पद्धति के जरिए दर्शाया गया है। 'गणित' विषय के वैचित्र्यमय एवं आकर्षणीय बनाने के प्रयास को पुस्तक में सहजता से देखा जा सकता है। विद्यार्थियों के प्रायोगिक सामर्थ्य वृद्धि की ओर भी ध्यान दिया गया है। आशा करता हूँ कि शिक्षा जगत् में यह पुस्तक प्रशंसनीय होगा। इस 'गणित प्रभा' पुस्तक को नवीन शैक्षणिक वर्ष (2014) में पश्चिमबंग सर्व शिक्षा मिशन की आर्थिक सहायता से राज्य के समस्त छात्र-छात्राओं को बिना मूल्य वितरण किया जाएगा।

चयनित शिक्षाविद शिक्षक-शिक्षिका एवं विषय विशेषज्ञों ने अल्प समय में इस पुस्तक को प्रस्तुत करने का प्रयास किया है। पश्चिम बंगाल के माध्यमिक शिक्षा व्यवस्था के विद्वत लोगों ने पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद के पाठ्य-पुस्तक का अनुमोदन कर हमें कृतज्ञ किया है समय-समय पर पश्चिमबंग मध्य शिक्षा पर्षद, पश्चिम बंगाल सरकार का शिक्षा विभाग, पश्चिम बंगाल सर्व शिक्षा अभियान एवं पश्चिम बंगाल शिक्षा अधिकार ने जो सहायता प्रदान किया है, उन्हें भी धन्यवाद देना चाहूँगा।

पश्चिम बंगाल के माननीय शिक्षा मंत्री डॉ. पार्थ चटर्जी ने आवश्यक विचार एवं परामर्श देकर हमें कृतज्ञ किया है। उनके प्रति अपनी कृतज्ञता व्यक्त करते है।

पुस्तक की उत्कृष्टता के लिए शिक्षा अनुरागी लोगों के विचार -परामर्श को हम सादर ग्रहण करेंगे।

अभीक मजूमदार
चेयरमैन
विशेषज्ञ समिति
विद्यालय शिक्षा विभाग
पश्चिम बंगाल सरकार

जुलाई, 2014
निवेदिता भवन, पंचम तल्ला
विधाननगर, कोलकाता - 700 091

विशेषज्ञ कमेटी परिचालित पाठ्य-पुस्तक प्रनयन पर्षद

निर्माण और विन्यास

प्राध्यापक अभीक मजूमदार (चेयममैन, विशेषज्ञ समिति)

प्राध्यापक रथीन्द्रनाथ दे (सदस्य सचिव, विशेषज्ञ समिति)

शंकरनाथ भट्टाचार्य

सुमना सोम

तपसुन्दर बन्दोपाध्याय

मलय कृष्ण मजूमदार

पार्थ दास

प्रदूत्त पाल

आवरण और अलंकरण

शंकर बसाक

मुद्रण

विप्लव मण्डल

सहयोग

अनुपम दत्त, पिनाकी दे

विषय सूची

अध्याय	विषय	पृष्ठ
1	पूर्व पाठों की पुनरावृत्ति	1
2	पाई चित्र	21
3	परिमेय संख्या की धारणा	31
4	बहुपदी संख्याओं का गुणा और भाग	42
5	घनफल निर्णय	50
6	पूरक कोण, सम्पूरक कोण और संलग्न कोण	65
7	सम्मुख कोण की धारणा	72
8	समानान्तर सरल रेखा और तिर्यक रेखा के गुण तिर्यक	79
9	त्रिभुज की दो भुजायें एवं उनके विपरीत कोणो का सम्बंध	91
10	त्रिराशिक (समानुपात)	98
11	प्रतिशत	105
12	मिश्रण	113
13	बीजगणितीय संख्या राशियों का उत्पादक में विश्लेषण	120
14	बीजगणितीय संख्या राशियों का म.स.प. एवं ल.स.प.	132
15	बीजगणितीय संख्या राशियों का सरलीकरण	137
16	त्रिभुज के कोणों और भुजाओं के बीच सम्पर्क की जाँच	143
17	समय और कार्य	159
18	लेखचित्र	172
19	समीकरण गठन और समाधान	183
20	ज्यामितिक प्रमाण	193
21	त्रिभुज बनाना	208
22	समानान्तर सरल रेखा खींचना	214
23	प्रदत्त सरल रेखा को तीन, पांच बराबर भागों में विभक्त करना	220
24	मजेदार अंक	224
25	मिलाकर देखें	229

1.पूर्व पाठों की पुनरावृत्ति

हमारे आसदपुर ग्राम के विद्यालय की मरम्मत की जायेगी इस हेतु हम कुछ पूर्व छात्र एवं छात्राओं ने इस कार्य का दायित्व ग्रहण किया हैं। इस विद्यालय में छोटे बड़े दो कमरे हैं। मैं और तथागत प्रथम श्रेणी के घर की मरम्मत में कितना खर्च पड़ेगा हिसाब करेंगे।

1 मापकर देखे हैं कि प्रथम श्रेणी के घर की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 5 मीटर, 4 मीटर एवं 3 मीटर है। प्रति वर्गमीटर 55 रूपये के हिसाब से इस घर में सीमेन्ट कराने में कितना रुपया खर्च होगा बताओ।

प्रथम श्रेणी के घर के फर्श का क्षेत्रफल कितना होगा देखे।

इस घर के फर्श का क्षेत्रफल (☐ × ☐) वर्गमीटर

= ☐ वर्गमीटर

∴ इस घर के फर्श का सीमेण्ट करने हेतु खर्च होगा (☐ × ☐) रूपया

= ☐ रूपया।

2 इस प्रथम श्रेणी के घर में 2 मी० ×1.4 मी० माप का एक दरवाजा एवं 1.3 मी० ×1.2 मी० माप की दो खिड़कियाँ हैं। प्रति वर्ग मीटर 42 रूपया के हिसाब से इस घर में 2 खिड़कियाँ एवं एक दरवाजे का रंग करने में कितना खर्च होगा, देखें।

पहले उस घर के एक दरवाजे और एक खिड़की का क्षेत्रफल बताओ।

उस घर के एक दरवाजे का क्षेत्रफल 2 मी० ×1.4 मी० = 2.8 वर्गमीटर।

उस घर की 1 खिड़की का क्षेत्रफल 1.3 मी० × 1.2 मी० = 1.56 वर्गमीटर।

∴ उस घर के 2 खिड़कियों का क्षेत्रफल 2 × 1.56 वर्गमीटर = 3.12 वर्गमीटर।

∴ 1 दरवाजे और 2 खिड़कियों का क्षेत्रफल= (2.8 + 3.12) वर्गमीटर = 5.92 वर्गमीटर।

∴ प्रति वर्गमीटर 42 रूपया के हिसाब से दरवाजा और खिड़कियों के रंग करने में खर्च होगा = ☐ × ☐ = ☐ रूपया।

3 इसके बाद यदि घर के चारों दीवारों एवं छत का चुना कराये तो प्रति वर्ग मीटर 6 रूपया के हिसाब से कुल कितना खर्च होगा बताओ।

दरवाजे और खिड़की सहित चारों दीवारों एवं छत का क्षेत्रफल

= 2 × लम्बाई × ऊँचाई + 2 × चौड़ाई × ऊँचाई + लम्बाई × चौड़ाई

= (2 × 5 × 3 + 2 × 4 × 3 + 5 × 4) वर्गमीटर

= (30 + 24 + 20) वर्गमीटर

= □ वर्गमीटर

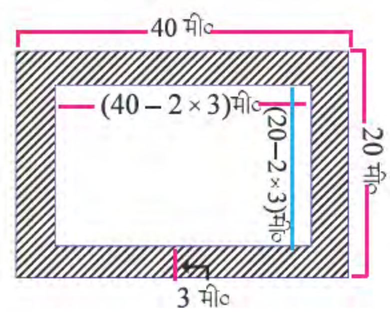
∴ दरवाजे और खिड़कियों को छोड़कर चारों दीवारों और छत का क्षेत्रफल = □ वर्गमी॰ – □ वर्गमी॰ = □ वर्गमी॰

∴ चारों दीवालों और छत का चुना करने का खर्च पड़ेगा = □ × □ रूपया = □ रूपया

कुल खर्च पड़ेगा = □ रूपया + □ रूपया + □ रूपया = □ रूपया

4 द्वितीय श्रेणी के घर की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 6 मी॰, 4 मी॰ व 3 मी॰। 2 मी॰ × 1.3 मी॰ माप का एक दरवाजा व 1.4 मी॰ × 1.2 मी॰ माप की दो खिड़कियाँ हैं उसी हिसाब से द्वितीय श्रेणी के फर्श का सीमेण्ट करने, खिड़की और दरवाजे का रंग करने और चारों दीवारों एवं छत पर चुना करने में कितना खर्च होगा बताओ। [स्वयं करें]

5 हमारे विद्यालय के पीछे की तरफ आयताकार एक मैदान है। इस खेल के मैदान की लम्बाई 40 मीटर एवं चौड़ाई 20 मीटर है। इस खेल के मैदान के भीतर चारों तरफ 3 मीटर चौड़ा एक रास्ता है प्रति वर्गमीटर 95 रूपया के हिसाब से रास्ते की मरम्मत करने में कुल कितना खर्च पड़ेगा बताओं।



रास्ता सहित आयताकार मैदान का क्षेत्रफल = (40 × 20) वर्ग मीटर

= □ वर्ग मीटर

रास्ता छोड़कर आयताकार मैदान की लम्बाई = 40 मीटर – 2 × 3 मीटर

= (40 – 6) मीटर

= 34 मीटर

रास्ता छोड़कर आयताकार मैदान की चौड़ाई = 20 मीटर – 2 × 3 मीटर

= (20 – 6) मीटर

= 14 मीटर

∴ रास्ता छोड़कर आयताकार मैदान का क्षेत्रफल = 34 मीटर × 14 मीटर

= 476 वर्ग मीटर।

∴ रास्ता का क्षेत्रफल = 800 वर्ग मीटर – ☐ वर्ग मीटर

= ☐ वर्ग मीटर

∴ प्रति वर्ग मीटर 95 रूपया के हिसाब से इस रास्ते को तैयार करने में खर्च पड़ेगा

= ☐ × ☐ रूपया = ☐ रूपया

6 यदि खेल के मैदान के बाहर चारों तरफ 3 मीटर चौड़ा रास्ता होता तो उसी हिसाब से तैयार करने में कितना रुपया खर्च होगा हिसाब करें [स्वयं करें]

रंगीन कागज का आनन्दप्रद खेल

आज हम सभी ने मिलकर निश्चित किया है कि विभिन्न आकार के छोटे बड़े आयताकार और वर्गाकार रंगीन कागज काटेंगें एवं उसमें कुछ काले रंग के कागज को काटकर समान चौड़ा रास्ता तैयार कर उसे रंगीन कागज में चिपकायेंगे।

7 प्रत्येक रंगीन कागज में काला रंग कितनी जगह छोड़े है देखे।

तीर्थंकर बनाया

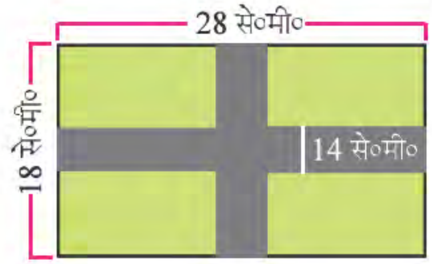
काले रंग के कागज सहित कागज का क्षेत्रफल ☐ × ☐ वर्ग से०मी०

= ☐ वर्ग से०मी०

काले रंग के कागज को छोड़कर कागज का क्षेत्रफल = ☐ वर्ग से०मी०

∴ काले रंग के रास्ते का क्षेत्रफल = ☐ वर्ग से०मी०

तितली बनाई



काले रंग के दो रास्तों को हरे रंग के आयताकार कागज के ठीक बीचों बीच सटाये हैं। इससे हरे रंग का चार समान आयत क्षेत्र प्राप्त हुआ।

∴ 1हरे के कागज की लम्बाई = $\frac{28-4}{2}$ से०मी०

= ☐ से०मी०

1हरे के आयताकार क्षेत्र की लम्बाई = $\frac{18-4}{2}$ से०मी०

= ☐ से०मी०

∴ 1 हरे रंग के आयतक्षेत्र का क्षेत्रफल = □ × □ वर्ग सेoमीo

= □ वर्ग सेoमीo

∴ 4 हरे रंग के आयतक्षेत्र का क्षेत्रफल = 4 × □ वर्ग सेoमीo

= □ वर्ग सेoमीo

काले रंग के रास्ता सहित आयतक्षेत्र का क्षेत्रफल = □ × □ वर्ग सेoमीo

= □ वर्ग सेoमीo

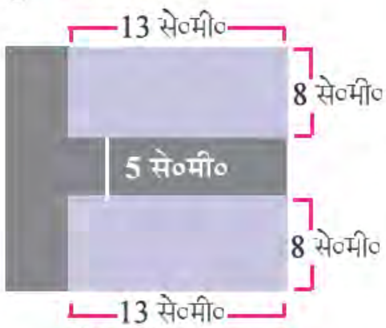
∴ तितली द्वारा बनाये काले रंग के रास्ता का क्षेत्रफल = (□ – □) वर्ग सेoमीo

= □ वर्ग सेoमीo।

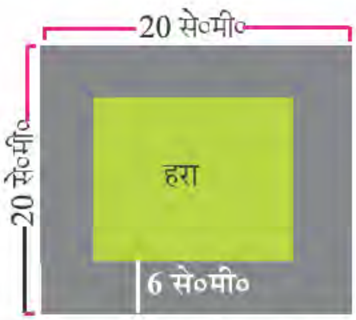
← सोफिया बनायी

8 सोफिया द्वारा तैयार काले रंग के रास्ते का क्षेत्रफल □ वर्ग सेoमीo। [स्वयं करें]

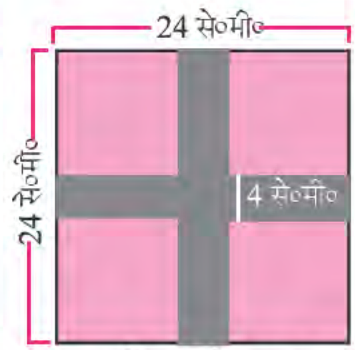
दूसरे भाइयों ने बनाया —



डेविड ने बनाया



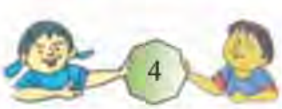
फारूक ने बनाया



मिताली ने बनाया

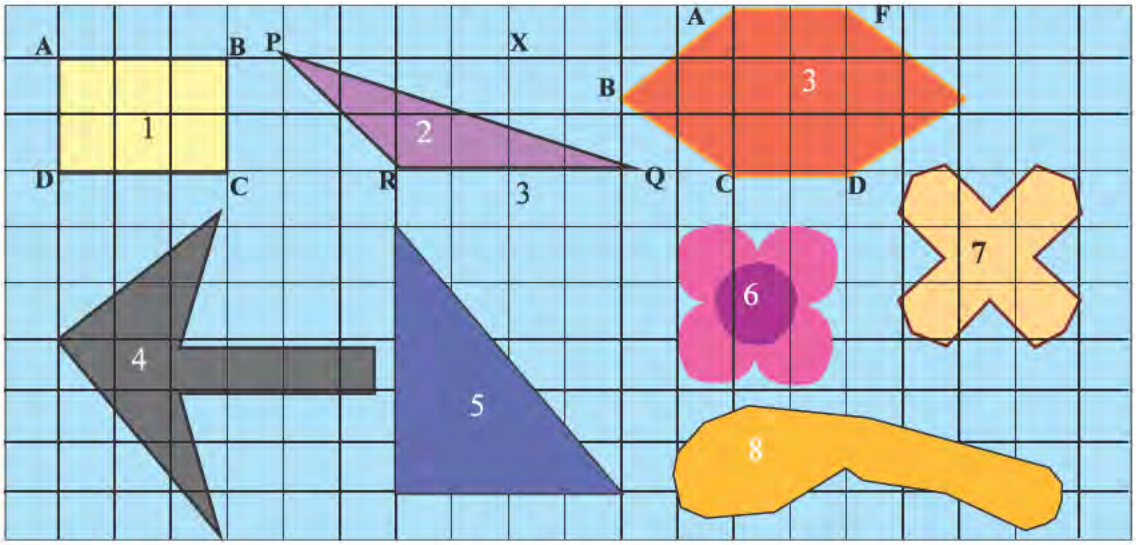
देखते हैं कि काला रास्ता वर्गक्षेत्र को 4 समान क्षेत्रफल वाले वर्गक्षेत्र में विभाजित किया है

9 डेविड, फारूक, मिताली द्वारा बनाये चित्र देखे एवं काले रंग के रास्ते का क्षेत्रफल निकालकर लिखें। [स्वयं करें]



करके देखो — 1.1

1. नीचे की तालिका में चित्र देखे एवं प्रत्येक चित्र कितना जगह घेरे है लिखें —



आकार	पूरे घिरे छोटे वर्गों की संख्या	अर्द्ध घिरे छोटे वर्गों की संख्या	आधा से अधिक घिरे छोटे वर्गों की संख्या	आधा से कम घिरे छोटे वर्गों की संख्या	कुल क्षेत्रफल (1छोटे वर्गाकार भाग क्षेत्रफल =1वर्ग से०मी०)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

2. अमीना के घर के आयताकार आंगन की लम्बाई 6 मीटार एवं चौड़ाई 4.2 मीटर है। इस आंगन के बीच में 3.5 मीटर × 2.5 मीटर की एक आयताकार शतरंजी बनी है। शतरंजी छोड़कर आंगन का क्षेत्रफल निकालकर देखे।

3. अजन्ता हाउसिंग के काम्प्लेक्स के वर्गाकार पार्क के बाहर चारों तरफ 3 मीटर चौड़ा एक रास्ता है। रास्ता सहित पार्क की परिसीमा 484 मीटर होने से रास्ते का क्षेत्रफल निकाले।

4. मिहिर के आयताकार बाग की लम्बाई 50 मीटर एवं चौड़ाई 30 मीटर है। इस बाग के बीचों बीच लम्बाई के समानान्तर 4 मीटर चौड़ा एक रास्ता बाग को दो समान क्षेत्रफल वाले आयताकार क्षेत्रों में बाँटता है। रास्ते का क्षेत्रफल स्वयं निकालकर देखे।

   a) यदि 4 मीटर चौड़ा रास्ता। बाग की चौड़ाई के समानान्तर बाग के बीच में होता और बाग को दो भागों में बांटता तो रास्ते का क्षेत्रफल क्या होता ? देखे।

   b) यदि मिहिर के बगान की लम्बाई और चौड़ाई दोनों के समानान्तर बाग के बीचोंबीच रास्ता होते और बाग को 4 समान भागों में बाँटता तो रास्ता का क्षेत्रफल क्या होता बताओ।

5. हमारे घर के पास पापिया की आयताकार जमीन है। इस आयताकार जमीन की लम्बाई 48 मीटर एवं चौड़ाई 26 मीटर है। पापिया अपनी जमीन के चारों तरफ 4 मीटर छोड़कर घर तैयार करेगी हिसाब करके देखे कि पापिया कितने वर्ग मीटर जमीन पर अपना घर बनायेगी।

6. हमारा भाई दीपू 15 से०मी० लम्बा और 8 से०मी० चौड़े पूरे आयताकार कागज पर एक चित्र बनाता है।

   a) यदि दीपू आयताकार क्षेत्र की चौड़ाई समान रखते हुए लम्बाई को दोगुना कर देता तो उसके चित्र वाले कागज के क्षेत्रफल में क्या परिवर्तन होता। बताओ।

   (b) यदि दीपू चित्र के कागज की लम्बाई समान रखते हुये चौड़ाई को दोगुना कर देता तो कागज के क्षेत्रफल में क्या परिवर्तन होता, देखें।

   (c) यदि दीपू अपने चित्र वाले कागज की लम्बाई चौड़ाई दोनों को दोगुना कर देता तो कागज के क्षेत्रफल में क्या परिवर्तन होता, बताओ।

   (d) किन्तु दीपू यदि अपने कागज की लम्बाई, चौड़ाई दोनों को आधा कर देता तो चित्रवाले कागज के क्षेत्रफल में क्या परिवर्तन होता। बताओ।

7. मैंने तीन वर्गाकार कागजों को काटा एवं क्षेत्रफल में कैसा परिवर्तन होगा देखे।

   यदि, (a) लम्बाई को दोगुना कर दिया जाये

   (b) यदि लम्बाई को आधा कर दिया जाये

8. हमारे इलाके के क्लब के घर की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 7.2 मी०, 5.5 मी०, और 4.2 मी० है। घर में 3 मी० लम्बा एवं 1.8 मी० चौड़ा एक दरवाजा तथा 2.25 मी० लम्बा एवं 1.8 मी० चौड़ा माप को दो खिड़कियाँ हैं।

   (a) क्लब घर के फर्श का क्षेत्रफल क्या है ? करके देखें। प्रति वर्गमी० 62 रूपया की दर से फर्श का सीमेण्ट करने में क्या खर्च होगा बताओ।

   (b) दरवाजे और खिड़की को छोड़कर घर के चारों दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात करके देखो।

   (c) घर के छत का क्षेत्रफल निकालकर देखो।

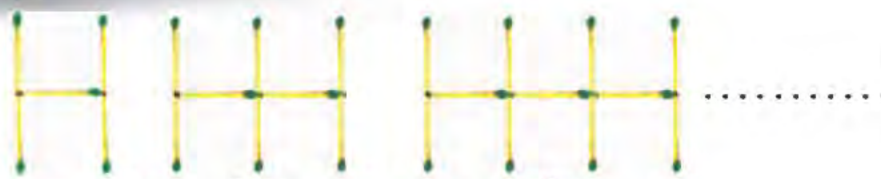
   (d) 12 रूपया प्रति वर्ग मी० की दर से दरवाजा और खिड़की छोड़कर घर के भीतर चारो दीवारों पर चूना करने में क्या खर्च होगा बताओ।

रंगीन काठी को विभिन्न तरह से सजायें

मै, सातकी, अमिता और अयन बहुत सी रंगीन दियासलाई की काठी को एक सादे कागज के ऊपर विभिन्न प्रकार से आटा से चिपकाया उस रंगीन काठी की सजावट को हम कक्षा में टांग कर रखेंगे।

सातकी ने तय किया कि हमलोगों की सजावट में कितनी काठिया है उसे देखेंगे।

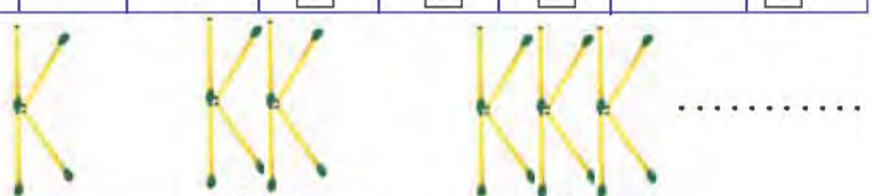
भैने सजाया →



सातकी ने लिखा— प्रथम द्वितीय तृतीय

सजाने का स्थान	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ	पंचम	....	सप्तम
दियासलाई के काठी की संख्या	5	8	☐	☐	☐	....	☐

अयन ने सजाया →



सातकी ने लिखा— प्रथम द्वितीय तृतीय

सजाने का स्थान	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ	पंचम	....	सप्तम
दियासलाई के काठी की संख्या	4	8	☐	☐	☐	....	☐

अमिता ने सजाया →

सातकी ने लिखा— प्रथम द्वितीय तृतीय

सजाने का स्थान	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ	पंचम	....	सप्तम
दियासलाई के काठी की संख्या	3	5	☐	☐	☐	....	☐

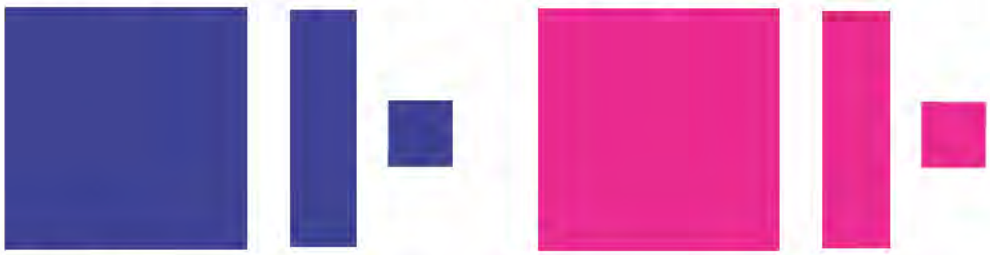
स्वत करें – 1.1

1) इस तीन प्रकार सप्तम सजावट में कितनी काठी लगेगी हिसाब करें।

2) स्वत: इसी प्रकार रंगीन काठी द्वारा एक सजावट तैयार करे एवं उसके सप्तम सजावट के काठियों की संख्या लिखे।

प्रयोग से

बहुत से आयताकार या वर्गीकार कार्ड तैयार करें जिसके एक तरफ नीला तथा दूसरे तरफ लाल है।



ऊपर की तरह

नीला (4 से०मी० × 4 से०मी०) वर्गक्षेत्राकार कागज → x^2

नीला (4 से०मी० × 1से०मी०) आयताक्षेत्राकार कागज → x

नीला (1से०मी० × 1से०मी०) वर्गाकार कागज → 1

एवं लाल (4 से०मी० × 4 से०मी०) वर्ग क्षेत्राकार कागज → $-x^2$

लाल (4 से०मी० × 1से०मी०) आयत क्षेत्राकार कागज → $-x$

लाल (1से०मी० × 1से०मी०) वर्गाकार कागज → -1 लिया।

नीचे की संख्याओ को नीले और लाल रंग के कार्ड की सहायता से व्यक्त करें :

(i) $2x^2 + 4x - 3$ **(ii)** $-2x^2 + 2x - 1$ **(iii)** $2x^2 - 3x + 5$ **(iv)** $-x^2 - 8x + 6$ **(v)** $4x^2 - 2x - 3$

(vi) $-4x^2 + 7x - 4$ **(vii)** $(x^2 + 2x + 5) + (2x^2 + 2x + 1)$ **(viii)** $(3x^2 - 5x + 6) + (2x^2 + 8x - 4)$

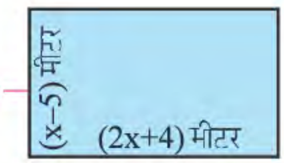
(ix) $(8x^2 - 2x - 4) - (3x^2 + 4x + 2)$ **(x)** $(-2x^2 + 5x + 3) - (-4x^2 + 2x - 2)$

संकेत : $2x^2 + 4x - 3$ →

आनन्दप्रद कार्ड का नया खेल

मै, उमा, समीर व सुबीर ने निश्चय किया कि बहुत से विभिन्न आयताकार और वर्गाकार कार्ड तैयार करके उसकी लम्बाई चौड़ाई लिखकर उलट कर रखेंगे। किन्तु कार्ड का क्षेत्रफल या लम्बाई और चौड़ाई लिख कर रखेंगे हम एक कार्ड निकाल कर उस कार्ड का क्षेत्रफल अथवा लम्बाई अथवा चौड़ाई लिखेंगे।

मैने जो कार्ड निकाला उसकी लम्बाई और चौड़ाई देखते है।—

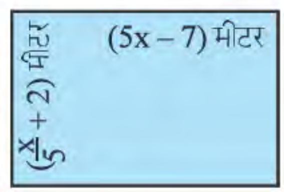


कार्ड का क्षेत्रफल = (2x + 4)मीटर ×(x – 5) मीटर

= (2x + 4)(x – 5) वर्ग मीटर

= ($2x^2$+4x–10x–20) वर्ग मीटर =($2x^2$– 6x – 20) वर्ग मीटर

उमा ने जो कार्ड निकाले उसकी लम्बाई और चौड़ाई देखते है—



उमा के कार्ड का क्षेत्रफल = ☐ मीटर × ☐ मीटर

= ☐ वर्ग मीटर

किन्तु समीर जो कार्ड निकाला उसका क्षेत्रफल ($7a^2b - 35ab^2 + 14abc$) वर्ग मीटर तथा चौड़ाई 7ab मीटर।

∴ समीर जो कार्ड निकाला उसकी लम्बाई = ($7a^2b - 35ab^2 + 14abc$) वर्ग मीटर ÷ 7ab मीटर

$$= \frac{7a^2b - 35ab^2 + 14abc}{7ab} \text{ मीटर}$$

$$= \left(\frac{\overset{a}{\cancel{7a^2b}}}{\cancel{7ab}} - \frac{\overset{5b}{\cancel{35ab^2}}}{\cancel{7ab}} + \frac{\overset{2c}{\cancel{14abc}}}{\cancel{7ab}} \right) \text{ मीटर}$$

= (a – 5b + 2c) मीटर

सुबीर जो कार्ड निकाला उसका क्षेत्रफल ($6x^4y^2 - 12x^2y^2 + 30x^2y^4$) वर्ग मीटर एवं लम्बाई $6x^2y^2$ मीटर।

∴ कार्ड की चौड़ाई = ☐ वर्ग मीटर ÷ ☐ मीटर

= ☐ मीटर।

10 एक आयताकार कार्ड का क्षेत्रफल $(9p^2 - 4q^2)$ वर्ग मीटर एवं चौड़ाई $(3p - 2q)$ मीटर। उसकी लम्बाई कितनी होगी, देखें।

यहाँ लम्बाई = क्षेत्रफल ÷ चौड़ाई

$$= \frac{9p^2 - 4q^2}{3p - 2q}$$

$9p^2 - 4q^2$ - को दो बीजगणितीय संख्याओ के गुणाफल के रुप में अर्थात उत्पादक विश्लेषण करें।

$$9p^2 - 4q^2 = (3p)^2 - (2q)^2$$

$$= (3p + 2q)(3p - 2q)$$

$\therefore$ लम्बाई $\frac{9p^2 - 4q^2}{3p - 2q}$ मीटर

$= \frac{(3p + 2q)(3p - 2q)}{(3p - 2q)}$ मीटर

$= (3p + 2q)$ मीटर

स्वयं करे—1.2

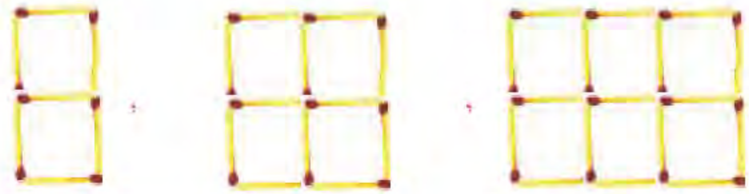
निम्न तालिका को पूर्ण करे :

आयताकार कार्ड की लम्बाई	आयताकार कार्ड की चौड़ाई	आयताकार कार्ड का क्षेत्रफल
$(9x^2 + 2)$ मी०	$(3 - x)$मी०	
$(8 - y^2)$मी०	$(5x + 2)$ मी०	
	$4x$ से०मी०	$(8x^3 - 4x^2 + 16x)$ वर्ग से०मी०
$3x^2y^2$ मी०		$(9x^4y^4 - 27x^3y^2 + 18x^2y^3)$ वर्ग मी०
$(2 + 5x)$ मी०	$(2 - 5x)$ मी०	
	$(4 + 10p)$ मी०	$(16 - 100p^2)$ वर्ग मी०
$(11m - 13n)$ मी०		$(121m^2 - 169n^2)$ वर्ग मी०
$(9x - y)$ से०मी०	$(9x + y)$ से०मी०	

प्रयोग करके देखे — 1.2

1. निम्न प्रत्येक की सप्तम (n घनात्मक पूर्ण संख्या) सजावट में लगी काठियों की संख्या लिखे :

(i) , ...

(ii)  ....

(iii) ....

2. एक समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक भुजा की लम्बाई ($4y + 2$) से०मी० होने पर परिसीमा लिखे।

3. एक आयताकार क्षेत्र की लम्बाई ($8x + 3y$) से०मी० एवं चौड़ाई($8x - 3y$) से०मी०। इस आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल लिखे।

4. वर्गक्षेत्र की एक भुजा की लम्बाई ($3m - 4$) मीटर होने पर क्षेत्रफल कितना होगा m-एम के रुप में लिखे। m-का मान कितना होने पर इस वर्गक्षेत्र की परिसीमा 8 मीटर होगी हिसाब करके देखे।

5. निम्न तालिका को पूर्ण करे :

बीजगणितीय संख्यायें	योग करे	वियोग करे
(a) (i) x^2+2y^2 (ii) $(-8y^2+6x^2+z^2)$	(i) + (ii) x^2+2y^2 $+(-8y^2+6x^2+z^2)$ $= x^2+2y^2-8y^2+6x^2+z^2$ $= 7x^2-6y^2+z^2$	(i)–(ii) $x^2+2y^2-(-8y^2$ $+6x^2+z^2)$ $= x^2+2y^2+8y^2-6x^2-z^2$ $= 10y^2-5x^2-z^2$
(b) (i) $6a^2+2$, (ii) $-3a^2+3a$, (iii) $-2a+3$	(i) + (ii) + (iii)	(ii) – (i) (iii) – (i)
(c) (i) $9m^2-2mn+n^2$ (ii) m^2+n^2 (iii) $m^2-3mn-2n^2$	(i) + (ii) + (iii)	(i) – (ii) (ii) – (iii)

6. निम्न तालिका देखें और लिखे :

बीजगणितीय संख्यायें	गुणा करे	भाग करे
(a) (i) $9a^3b^2 - 15a^2b^3$ (ii) $3ab$	(i) × (ii) $(9a^3b^2 - 15a^2b^3) \times 3ab$ $= 27a^{3+1}b^{2+1} - 45a^{2+1}b^{3+1}$ $= 27a^4b^3 - 45a^3b^4$	(i) ÷ (ii) $\frac{9a^3b^2 - 15a^2b^3}{3ab}$ $= \frac{9a^3b^2}{3ab} - \frac{15a^2b^3}{3ab}$ $= 3a^{3-1}b^{2-1} - 5a^{2-1}b^{3-1}$ $= 3a^2b - 5ab^2$
(b) (i) $x^4 - 4x^3 + 6x^2$ (ii) x^2	(i) × (ii)	(i) ÷ (ii)
(i) $3m^2n^3+40m^3n^4-5m^4n^5$ (ii) $10m^2n^2$	(i) × (ii)	(i) ÷ (ii)
(c) (i) $(49l^2 - 100m^2)$ (ii) $(7l + 10m)$	(i) × (ii)	(i) ÷ (ii) [$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ सूत्र की सहायता से]
(d) (i) $625a^4 - 81b^4$ (ii) $5a + 3b$	(i) × (ii)	(i) ÷ (ii) [$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ सूत्र की सहायता से]

7. सरल करे :

(i) $(a - b) + (b - c) + (c - a)$

(ii) $(a + b)(a - b) + (b + c)(b - c) + (c + a)(c - a)$

(iii) $x^2 \times \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \times \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) \times y^2$

(iv) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$

(v) $x^2(y^2 - z^2) + y^2(z^2 - x^2) + z^2(x^2 - y^2)$

(vi) $(x^3 + y^3)(x^3 - y^3) + (y^3 + z^3)(y^3 - z^3) + (z^3 + x^3)(z^3 - x^3)$

8. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ एवं $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

— इन सूत्रों का उपयोग करके नीचे की संख्याओं का वर्ग करे -

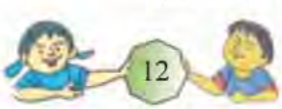
(i) $5x - 2y$ (ii) $7 + 2m$ (iii) $x + y + z$ (iv) $a + b - c - d$

9. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ एवं $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

— इन सूत्रों का उपयोग करके नीचे की संख्याओं का वर्ग करे -

(i) $9x^2 + \frac{9}{25y^2} - \frac{18x}{5y}$ (ii) $25m^2 - 70mn + 49n^2$

(iii) $(2a - b)^2 + (4a - 2b)(a + b) + (a + b)^2$ (iv) $\frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2} - 2$



10. निम्न संख्याओ की दो वर्ग के अन्तर के रुप में लिखे :

(i) 391×409 (ii) $(4x+3y)(2x-3y)$ (iii) x

11. उत्पादक विश्लेषण करें :

(i) $225m^2-100n^2$ (ii) $25x^2-\frac{1}{9}y^2z^2$ (iii) $7ax^2+14ax+7a$ (iv) $3x^4-6x^2a^2+3a^4$
(v) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$ (vi) $64ax^2-49a(x-2y)^2$ (vii) $x^2-9-4xy+4y^2$
(viii) x^2-2x-y^2+2y (ix) $3+2a-a^2$ (x) x^4-1 (xi) $a^2-b^2-c^2+2bc$
(xii) $ac+bc+a+b$ (xiii) $x^4+x^2y^2+y^4$

12. सूत्र की सहायता से गुणा करे : (i) $(xy+pq)(xy-pq)$ (ii) 49×51
(iii) $(2x-y+3z)(2x+y+3z)$ (iv) 1511×1489
(v) $(a-2)(a+2)(a^2+4)$

13. (a) $x+\frac{1}{x}=4$ होने से दिखायें कि $x^2+\frac{1}{x^2}=14$ व $x^4+\frac{1}{x^4}=194$

(b) $m+\frac{1}{m}=-5$ होने से दिखायें कि $m^2+\frac{1}{p^2}=23$

(c) $p-\frac{1}{p}=m$ होने से दिखायें कि (i) $p^2+\frac{1}{m^2}=m^2+2$ एवं (ii) $(p+\frac{1}{p})^2=m^2+4$

(d) $a+b=5$, $a-b=1$ होने से सूत्र की सहायता से दिखायें कि $8ab(a^2+b^2)=624$

(e) $x-y=3$, $xy=28$ होने से (x^2+y^2)-का मान निकालकर देखें।

14. दो वर्गों के योग के रुप में लिखे :

(a) $2(a^2+b^2)$ (b) $50x^2+18y^2$ (c) $a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac-bd)$

15. (i) t का मान कितना होने पर $x^2-tx+\frac{1}{4}$ एक पूर्ण वर्ग संख्या होगी लिखे।

(ii) a^2+4 के साथ कितना योग करने पर वह एक पूर्ण वर्ग संख्या होगी।

(iii) a औ b धनात्मक पूर्ण संख्या एवं $a^2-b^2=9\times11$ होने से a और b का मान लिखे।

(iv) $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ एक सूत्र जैसा समीकरण है युक्ति के साथ लिखे।

(v) शून्य को छोड़कर x और y के किसी भी धनात्मक या ऋणात्मक मान के लिए (x^2+y^2) का मान लिए सदा ही ☐ होगा [धनात्मक / ऋणात्मक]

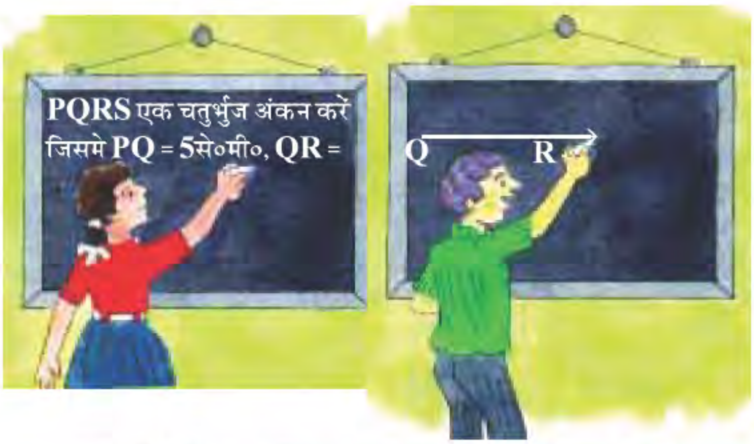
16. समाधान करें :

(i) $6x=72$ (ii) $9x+2=20$ (iii) $4x-2x+3=9-4x$

(iv) $\frac{x}{4}-\frac{x}{2}=3\frac{1}{2}-\frac{x}{3}$ (v) $2x-5\{7-(x-6)+3x\}-28=39$

(vi) $\frac{1}{3}(x-2)+\frac{1}{4}(x+3)=\frac{1}{5}(x+4)+15$

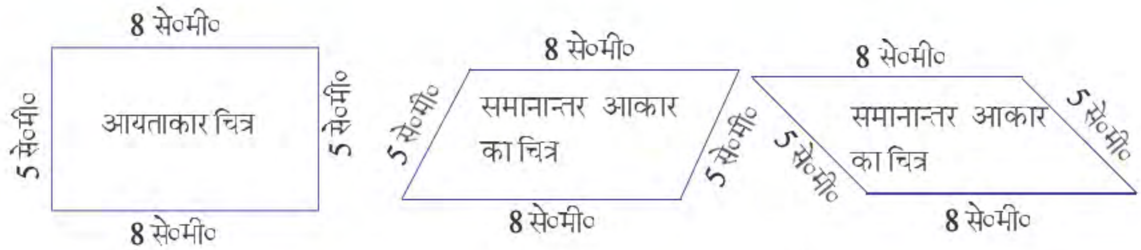
ज्यमितीय चित्रांकन करें



आज हम लोग आनन्दप्रद खेल खेलेंगें। कुछ दोस्त मिलकर दो ब्लैक बोर्ड की व्यवस्था किये है। हम में से कोई ब्लैक बोर्ड पर विभिन्न शर्तो को लिख देंगे। दूसरे उन्ही शर्तो के अनुसार अंकन का प्रयास करेंगे।

शिउली ने लिखा, 'एकचतुर्भुज अंकन करें जिसकी चार भुजायें क्रमश: 5 से०मी० 8 से०मी० 5 से०मी० और 8 से०मी० अर्थात विपरीत भुजाये समान हैं।

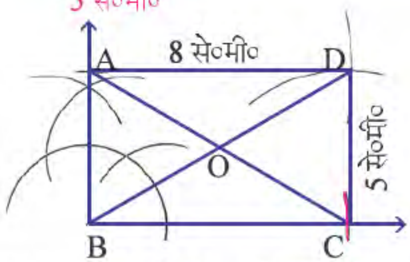
मै 5 से०मी० लम्बाई की दो और 8 से०मी० लम्बाई की दो काठियाँ लेकर देखूँ किस किस प्रकार चतुर्भुज बनता है।



काठी बैठाकर देखते है इन शर्तो से कोई निर्दिष्ट चतुर्भुज नहीं बनाया जा सकता है। इसके लिए एक और शर्त की जरुरत है।

इस बार शिउली ने लिखा - ऐसा एक चतुर्भुज बनाये जिसकी विपरीत भुजाओं की लम्बाई समान एवं एक कोण 90^0 अर्थात [ ] (आयताकार/वर्गाकार) चित्र बनाये जिसकी लम्बाई 8 से०मी० एवं चौड़ाई 5 से०मी० हो।

11 अनिता दुसरा ब्लैक बोर्ड पर ABCD एक आयताकार चित्र बनायी जिसकी लम्बाई 8 से०मी० एवं चौड़ाई 5 से०मी०



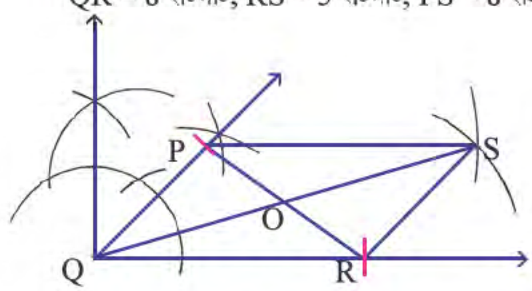
ABCD आयताकार चित्र का प्रत्येक कोण ☐
एवं चारों कोणों का योग ☐
स्केल की सहायता से मापकर देखते हैं।

AC = ☐ से०मी० एवं BD = ☐ से०मी०,और AC ☐ BD [=/≠ बैठाये]एवं AO ☐ OC [=/≠बैठायें], BO ☐ OD [=/≠बैठाये]। चाँद को सहायता से मापकर देखते हैं, ∠AOD ☐ 90^0 [=/≠बैठायें]

∴ ABCD आयताकार चित्र के दोनों कर्ण एक दूसरे की परस्पर समद्विभाजित करते हैं परन्तु समकोण पर नहीं समद्विभाजित करते हैं।

12 शिउली पुन: लिखी, 'PQRS एक चतुर्भुज अंकन करें जिसमे PQ = 5से०मी०, QR = 8से०मी०, RS = 5से०मी०, PS = 8से०मी० एवं ∠PQR = 45^0; अर्थात PQRS एक ☐ (समानान्तर/ आयताकार) चतुर्भुज।

तुहिन दूसरे ब्लैकबोर्ड पर PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज बनाया जिसमें PQ = 5 से०मी०, QR = 8 से०मी०, RS = 5 से०मी०, PS = 8 से०मी० एवं ∠PQR = 45^0

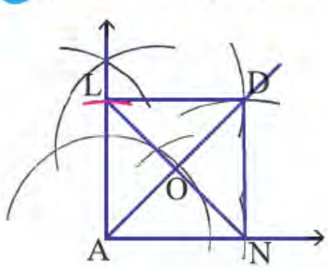


चाँद की सहायता से मापकर देखते हैं ∠PQR = ☐, ∠QRS = ☐, ∠RSP = ☐, ∠SPQ = ☐,
∴ चारों कोणो की माप का योग = ☐
स्केल की सहायता से माप कर देखते हैं।

PR = ☐ से०मी०, QS = ☐ से०मी०, PO ☐ OR [=/≠बैठाये], QO ☐ OS [=/≠बैठाये]

∴ दोनो कर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं [कॉपी में मैं चार इस प्रकार के चतुर्भुज बनाऊंगा और अपनी माप द्वारा जाँच करेंगे।]।

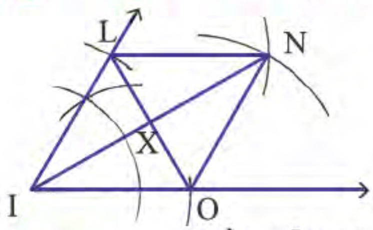
13 इस बार तिथि ने एक वर्गाकार क्षेत्र अंकन की जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 4 से०मी०



LAND वर्गाकार चित्र के प्रत्येक भुजा की लम्बाई ☐ से०मी०,
प्रत्येक कोण का परिमाप ☐ एवं LN और AD दोनो कर्ण ☐ [समान/असमान]
LO ☐ ON [=/≠बैठायें], AO ☐ OD [=/≠बैठायें]
चाँद की सहायता से मापकर देखते है कि ∠LOD = ☐

वर्ग क्षेत्र के दोनों कर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

14 आसिफ इकबाल एक सम चतुर्भुज (Rhombus)LION बनाया जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 5 से०मी०, एवं $\angle LIO = 60^0$



चाँद की सहायता से मापकर देखते हैं।

$\angle LIO$ = ☐, $\angle ION$ = ☐,

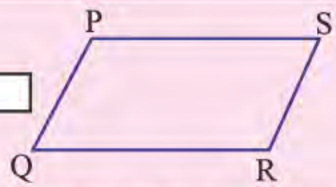
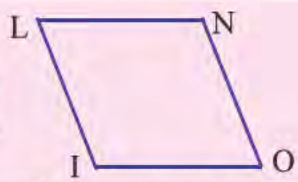
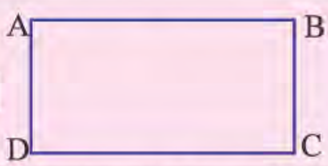
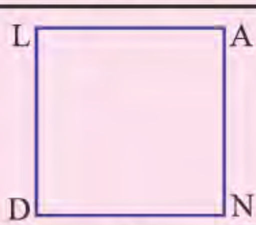
$\angle ONL$ = ☐, $\angle NLI$ = ☐ एवं $\angle LXN$ = ☐

समचतुर्भुज के चारों कोणों का योग = ☐

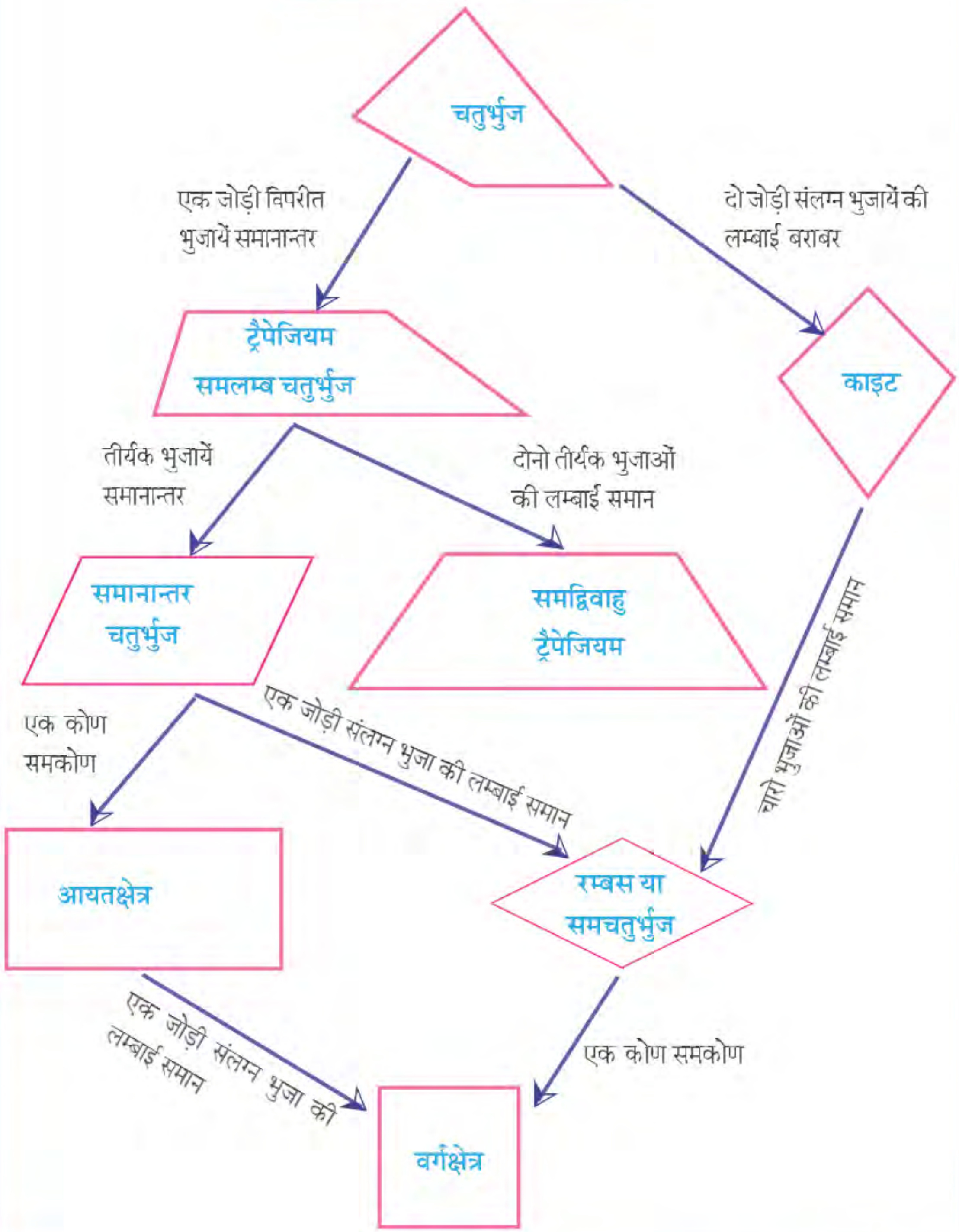
स्केल की सहायता से माप कर देखते हैं LX ☐ XO [=/≠] एवं IX ☐ XN [=/≠]

∴ रम्बस के दोनों कर्ण परस्पर समविभाजित करते है।

क्या-क्या पाये देखे—

समान्तर  जिस चतुर्भुज का विपरीत भुजाए परस्पर समान्तर होती है	(1) विपरीत भुजाओं की लम्बाई ☐। (2) विपरीत कोणों की परिमाप ☐। (3) दोनों कर्ण की लम्बाई साधारणत ☐। (4) दोनों कर्ण परस्पर ☐ करते है।
समचतुर्भुज (Rhombus)  जिस समान्तर के एकमुखी भुजाओ की लम्बाई समान है	(1) सभी भुजाओं की लम्बाई ☐। (2) विपरीत कोणो की परिमाप ☐। (3) दोनों कर्ण की लम्बाई साधारणत ☐। (4) दोनों कर्ण परस्पर ☐ ☐ करते है।
आयतक्षेत्र  जिस समानन्तर चतुर्भुज का एक कोण समकोण है	(1) विपरीत भुजाओं की लम्बाई ☐। (2) विपरीत कोण की परिमाप ☐। (3) दोनों कर्ण की लम्बाई ☐। (4) दोनों कर्ण एक दूसरे से ☐ करते है।
वर्गक्षेत्र  जिस समान्तर का एक कोण समकोण एवं एक जोड़ी संलग्न भुजाये समान हो।	(1) सभी भुजाओं की लम्बाई ☐। (2) प्रत्येक कोण की परिमाप ☐। (3) दोनों कर्ण की लम्बाई ☐। (4) दोनों कर्ण एक दूसरे से ☐ ☐ करते है।

चतुर्भुज का वर्गीकरण



(1) मैं दो $45^0–45^0–90^0$ सेट स्क्वायर से ☐ [आयतकार चित्र /वर्गाकार चित्र] पाऊँगा।

(2) मैं दो $30^0 – 60^0–90^0$ सेट स्क्वायर से ☐ [आयतकार चित्र /वर्गाकार चित्र]पाऊँगा।

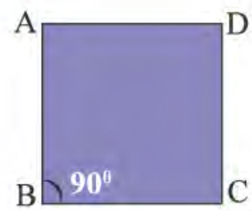
(3) मैं दो ☐ सेट स्क्वायर से समानान्तर चतुर्भुज पाऊँगा

प्रयोग करके देखो

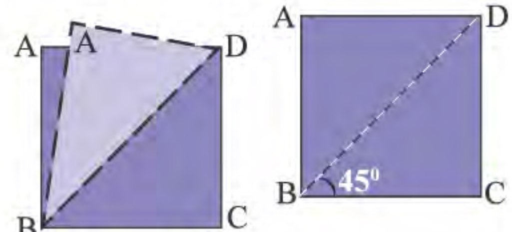
हम लोग अपनी कॉपी में विभिन्न माप के छोटे बड़े वर्गाकार चित्र बनाये इस बार वर्गाकार इसी कागज में विभिन्न रंग लगाकर काट लिया।

हम अपने नीले रंग के वर्गाकार कागज को मोड़कर 90^0, 45^0 एवं $22\frac{1}{2}^0$ के कोण तैयार करे।

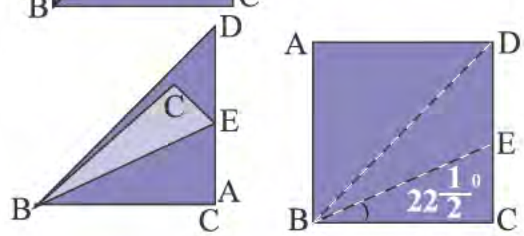
पहले एक वर्गाकार कागज लिया ⟶



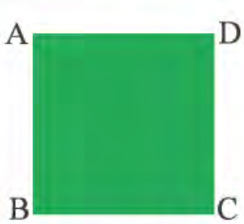
BD कर्ण को मोड़कर, फिर मोड़ को खोलने पर पाया ⟶



BD और BC दोनो किनारों को एक दुसरे के साथ मिला कर मोड़ने और पुन:मोड़ खोलने पर पाया⟶



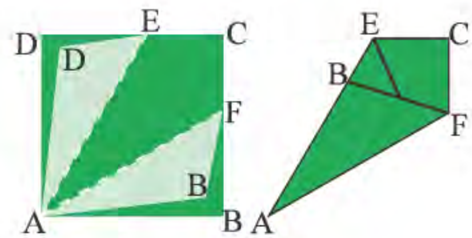
चाँद की सहायता से मापकर देखते हैं $\angle ABC =$ ☐, $\angle DBC =$ ☐ एवं $\angle EBC =$ ☐



हम अपने हरे रंग के वर्गाकार कागज को मोड़कर 15^0, 30^0 व 60^0 कोण तैयार करने की चेष्टा करें।

पहले मैंने वर्गाकार हरा कागज लिया।

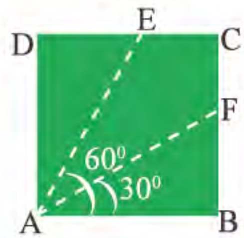
इस बार इस वर्गाकार कागज के $\angle A$ को केन्द्र मान कर AB और AD दोनो किनारो पास के चित्र की तरह मोड़ा जिससे मोड़ा हुआ भाग एक के ऊपर एक पूर्ण रुप से मिल जाँय।



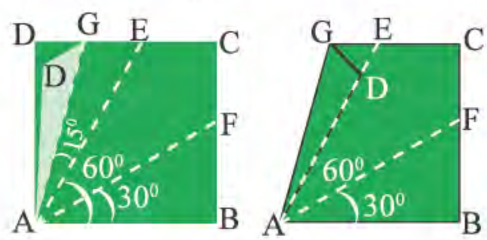
इस बार मोड़ को खोलने पर पास के चित्र की तरह पाया।

मोड़ को खोलने पर पाया, $\angle DAE = \angle EAF = \angle FAB = 30^0$

$$\angle BAE = \angle DAF = 60^0$$

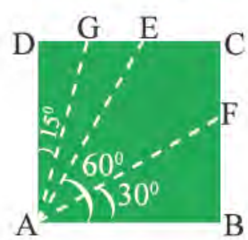


इस बार कोण $\angle A$ को केन्द्र करकेAD को AE के साथ मिलाकर मोड़ा



मोड़ खोलने पर पाया,

$\angle DAG =$ ☐



परीक्षा करके देखे — 1.3

1. (i) हाथ और कलम से वर्गाकार कागज को मोड़कर $22\frac{1}{2}^0$, 45^0, 90^0 कोण तैयार करें।

(i) मैं समानान्तर चतुर्भुज बनाऊँ एवं कागज काटकर कोणों को मोड़कर देखे समानान्तर चतुर्भुज के दोनों कर्ण परस्पर किस तरह काटते हैं।

(iii) हम वर्गाकार कागज को मोड़कर वर्गाकार आयताकार और समचतुर्भुज (Rhombus)के कोणों के गुण की जाँच करें।

(iv) 4 ☐ सेट स्क्वायर की सहयाता से समचतुर्भुज तैयार करें।

(v) मैंने सेट स्क्वायर की सहायता से 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 105^0 एवं 120^0 कोण बनायें।

2. स्केल, पेन्सिल और कम्पास की सहायता से 90^0, 45^0, $22\frac{1}{2}^0$, 60^0, 30^0, 120^0, 75^0, 105^0, 135^0, 150^0 कोण बनायें।

3. PLAN चतुर्भुज की विपरीत भुजाये समान अर्थात PL = AN = 6 से०मी० एवं PN = LA = 5 से०मी०। तीन प्रकार के PLAN चतुर्भुज बनायें और देखें कब PLAN आयताकार चतुर्भुज के चित्र के रुप में होता है।

4. एक निर्दिष्ट वर्गाकार चित्र बनाने के लिए कम से कम किन तथ्यों की आवश्यकता होती है देखे।

5. एक निर्दिष्ट समानान्तर चतुर्भुज चित्र बनाने के लिए कम से कम किन तथ्यों की आवश्यकता होती है देखे।

6. एक वर्गाकार चित्र DEAR बनाओं जिसमें DE = 5.6 से०मी०।

7. एक आयताकार चित्र BEST बनाओं जिसमे BE = 6 से०मी० और ES = 4.8 से०मी०।

8. एक समचतुर्भुज HOME बनाओं जिसमें $\angle HOM = 60^0$ एवं HO = 6 से०मी०।

9. एक समचतुर्भुज ROAD बनाओं जिसमें RA = 8 से०मी० और OD = 6 से०मी०।

10. एक समानान्तर चतुर्भुज GOLD बनाओं जिसमें GO = 7से०मी०, OL = 5.8 से०मी० एवं GL = 5.8 से०मी०।

11. (i) ABCD एक आयताकार क्षेत्र। AC = 5 से०मी० होने से, BD की लम्बाई कितनी होगी लिखें।

(ii) PQRS एक वर्गाकार क्षेत्र की PR और QS दोनों कर्ण O पर काटते हैं। PR = 5 से०मी० होने से QO की लम्बाई कितनी होगी लिखें।

(iii) ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज की $\angle ABC = 60^0$ होने से $\angle ADC$ का मान कितना होगा लिखें।

(iv) ABCD समचतुर्भुज की AC और BD दोनो कर्ण परस्पर O पर काटते हैं। $\angle AOB$ का मान कितना होगा लिखें।

(v) एक वर्ग क्षेत्र सदा समचतुर्भुज होता है लेकिन समचतुर्भुज सदैव ☐ नहीं होता।

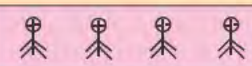
(vi) एक वर्ग क्षेत्र सदैव ☐ किन्तु एक आयतक्षेत्र सदैव ☐ नहीं होता।

2. पाई चित्र

कृष्णनगर के फरीदपुर ग्राम में मेरे मित्र का घर है। शहनाज के पिता मिट्टी के बहुत सुन्दर खिलौना तैयार करते है।

आज हम बहुत से मित्र मिलकर शहनाज के घर घुमने गये है। वहाँ हम लोग मिट्टी का खिलौना बनाना देखें।

शहनाज के पिता नियामत चाचा इस सप्ताह के प्रथम चार दिनों में कुछ मिट्टी के खिलौना तैयार किये उसका चित्र लेख निम्नलिखित है।

दिन	तैयार मिट्टी के खिलौना की संख्या	→ 20 मिट्टी से बना खिलौना
सोमवार		
मंगलवार		
बुधवार		
बृहस्पतिवार		

चित्र लेख से निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर खोंजे

(i) नियामत चाचा कब सबसे अधिक मिट्टी का खिलौना बनाये लिखें

(ii) नियामत चाचा मंगलवार को कितने मिट्टी के पूतूल बनाये? लिखें

(iii) वे किस दिन सबसे कम खिलौना बनाये लिखें।

(iv) वे सोमवार को कितने मिट्टी का खिलौना बनाये थे लिखें

मेरा मित्र अमिय हमारे तैयार तथ्य को समझाने हेतु एक स्तम्भ चित्र बनाया।

अमिय जो स्तम्भ चित्र तैयार की उससे निम्न प्रश्नों के उत्तर खोजे

(i) नियामत चाचा सोमवार को कितने मिट्टी का खिलौना बनाये लिखें।

(ii) वे कब सबसे कम मिट्टी का खिलौना बनाये लिखें।

(iii) वे सोमवार को वृहस्पतिवार की तुलना में कितने अधिक खिलौना बनाये।

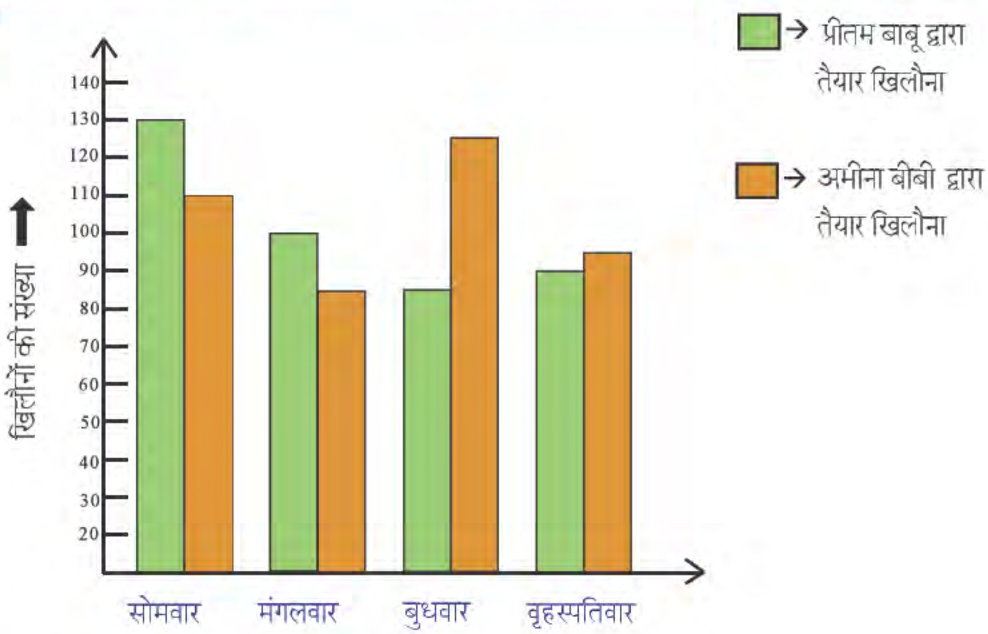
1 हमलोगों ने नियामत चाचा की तरह मिट्टी का खिलौना बनाने की चेष्टा किये। हम 20 लोग कितने मिट्टी के पूतूल बनाये लिखें।—

4, 1, 3, 2, 4, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 3, 3, 4

देखते है तथ्य कचेतथ्य के रुप में है। इन्हें टैलीमार्क द्वारा सजाकर लिखें।

मिट्टी के पुतुल की संख्या	टैलीमार्क	छात्र-छात्रओं ओं की संख्या
1	II	2
2	IIII	4
3	𝍸 III	8
4	𝍸 I	6

2 उसी ग्राम के प्रीतम बाबू और अमीनाबीबी गत सप्ताह प्रथम चार दिनों मे कितने मिट्टी के पुतुल तैयार किये स्तम्भ चित्र में देखे।



द्विस्तम्भ लेखा चित्र देखें एवं निम्नप्रश्नों का उत्तर खोजें—

(i) प्रीतम बाबू और अमीनाबीबी दोनों में किसने सोमवार को मिट्टी का खिलौना अधिक बनाये एवं कितने अधिक मिट्टी का खिलौना तैयार किये थे लिखें।

(ii) किन किन दिनों अमीनाबीबी ने प्रीतम बाबू से अधिक खिलौना बनाये एवं कितने अधिक मिट्टी का खिलौना बनाये उसे लिखे।

स्वंय करें—2

इस वर्ष हमारे स्कूल के विज्ञान प्रदर्शनी कार्यक्रम में विभिन्न प्रकार के विज्ञान के मॉडल तैयार करके व्याख्या का आयोजन किया गया है। प्रति दिन बहुत से स्कूलों के लड़के लड़कियाँ एवं अभिभावकगण क्रम से देखने हेतु आ रहे हैं। आज रविवार सुबह 10 बजे से दोपहर 12 बजे तक जो प्रदर्शनी में आये उनकी तालिका तैयार करे—

मान ले, महिला W पुरूष M बालक B बालिका G

[B, G, B, M, G, G, M, B, W, B, W, G, W, G, G, M, M, W, B, B, B, W, W, G, G, W, B, M, M, B, G, G, B, W, M, M, W, M, M, G, G, W, M]

ऊपर के कच्चे तथ्य को टैलीमार्क देकर संख्या विभाजन तालिका तैयार करें एवं एक स्तम्भ चित्र तैयार करें।

दूसरे रूप में चित्र के माध्यम से तथ्यों को लिखें

आज हमारी कक्षा में 30 विद्यार्थी आये हैं। हमलोग निश्चित किये हैं कि प्रत्येक की हाबी [खाली समय में क्या करना अच्छा लगता है] जानेंगे एवं संग्रह तथ्य को लेखा चित्र में व्यक्त करेंगें।

अयन हमारी कक्षा के 30 छात्र-छात्रों की हाबी (रुचि) की तालिका तैयार किया—

हाबी (रुचि)	गाना	नाचना	कहानी की पुस्तक पढ़ना	नाटक करना	चित्रांकन
छात्र-छात्राओं की संख्या	7	6	5	5	7

मेहर ऊपर के तथ्यों से स्तम्भ चित्र तैयार किया। [स्वंय करें]

इसके अलावा दूसरे रूप में क्या चित्र बनाकर इस तथ्य को दिखाया जाये जहाँ से आसानी से इस तथ्य की व्याख्या की जा सके

वृत्ताकार चित्र के माध्यम से तथ्य को व्यक्त किया जाय जहाँ अनेक तरह की वृत्त कला होती है। एक एक वृत्त खण्ड तथ्य के एक एक भाग को व्यक्त करती है एवं वृत्त खण्ड की माप इन तथ्य के भागों के परिमाण के समानुपाती होती है।

पास के वृत्ताकार चित्र के माध्यम से तथ्यों की व्याख्या किया जाय

देखते हैं गाने की और चित्रांकन का वृत्त खण्ड सबसे बड़ा एवं समान माप का है।

एवं कहानी की पुस्तक पढ़ना और नाटक करने का वृत्त खण्ड की माप सबसे छोटी एवं बराबर माप की है।

अर्थात एक एक वृत्त खण्ड तथ्य के एक एक भाग को व्यक्त करता है एवं एक वृत्त खण्ड की माप तथ्य एक-एक भाग परिमाण के साथ $\square$।

खाली समय में गाना गाते है कुल छात्रों के $= \frac{7 \text{ व्यक्ति}}{30 \text{ व्यक्ति}} = \frac{7}{30}$ भाग

खाली समय में चित्रांकन करते है कुल छात्रों के $= \frac{7}{30}$ भाग

लेकिन खाली समय में कहानी पुस्तक पढ़ते है कुल छात्रों के $= \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ भाग

लेकिन खाली समय में नाटक करते है कुल छात्रों के $= \frac{1}{6}$

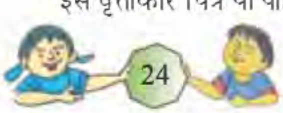
एवं खाली समय में नाचते है कुल छात्रों के $= \frac{\square}{\square}$

अत: गीत गाना एवं चित्रांकन का वृत्त खण्ड पूरे वृत्ताकार क्षेत्र का $\frac{\square}{\square}$ भाग से जुड़ा है।

एवं खाली समय में नाचने का वृत्त खण्ड पूरे वृत्त क्षेत्र का $\frac{\square}{\square}$ भाग से जुड़ा है।

इस प्रकार वृत्ताकार चित्र के माध्यम से तथ्य लिखने की पद्धति को क्या कहा जाता है?

इसे वृत्ताकार चित्र या पाई चित्र या पाई चार्ट कहते हैं।



विभिन्न भागों के समानुपात में वृत्त खण्ड बनाने की चेष्टा करे

नीचे के पाई चित्र को देखकर तथ्यों को समझे

आज सुबह 11बजे से 12 बजेतक रास्ते में यानवाहन चलने का पाईचित्र

देखते है —1) सबसे अधिक चलता है [ ]।

2) सबसे कम चलता है [ ]।

3) कौन सी दो गाड़ियाँ समान संख्या में चलती है देखे।

4) टैक्सी चलने का वृत्त खण्ड कुल वृत्त का कौन सा भाग है।

आज सुवह से बहुत बारिश हो रही है, फलत: बहुत से बच्चे स्कूल नहीं आंये तथागत ने उपस्थित एवं अनुपस्थित की संख्या का पाई चित्र बनाया ।

देखते है तथागत की कक्षा का आधे से अधिक छात्र-छात्रायें [ ]।
[उपस्थित / अनुपस्थित]

अनुपस्थित का वृत्त खण्ड कुल वृत्त खण्ड का कौन सा भाग है लिखे।

लेकिन कैसे पाई चित्र बनायेंगे देखे

हमारी कक्षा की छात्र-छात्रायें किस खेल को अधिक पसन्द करती है उनकी प्रतिशत की तालिका बनाये (हर व्यक्ति को एक ही खेल पसन्द करना होगा)।

खेल	खेल को पसन्द करने वाले छात्र-छात्रायें की संख्या (प्रतिशत)
क्रिकेट	50
फुटबॉल	30
बैडमिण्टन	20

मै इस तालिका के तथ्यों का पाई चित्र तैयार करूँ।

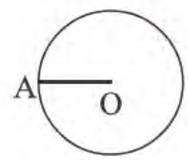
एक वृत्त के केन्द्र का सम्पूर्ण कोण = 360^0

अत: पाई चित्र में व्यक्त तथ्यों का व्यास कुल वृत्त खण्ड के भागों के समानुपात में होगा। अर्थात वृत्त खण्ड केन्द्रीय कोण (Central Angle) 360° से भिन्न होगा।

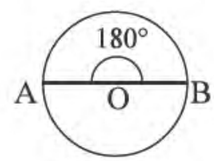
हम केन्द्रीय कोण के रूप में वृत्त खण्ड व्यक्त करें।

खेल	खेल पसन्द करने वावो का (प्रतिशत)	खेल पसन्द करने वावो की (भिन्न)	केन्द्रीय कोण (360^0 का भाग)
क्रिकेट	50	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 360^0 = 180^0$
फुटबॉल	30	$\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$	$\frac{3}{10} \times 360^0 = 108^0$
बैडमिण्टन	20	$\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \times 360° = 72°$

1) इस वार किसी अर्द्धव्यास से एक वृत्त बनाया।

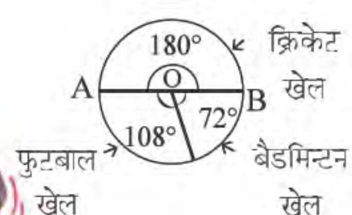


2) क्रिकेट खेल पसन्द करने वालो का केन्द्रीय कोण
अत: चाँद से 180^0 का कोण $\angle AOB = 180^0$ बनाया।



3) इस बार उल्टी दिशा में चाँद बैठाकर शेष दोनों वृत्त खण्डों को बनाया जिनका कोण 108^0 और 72^0 है।

इस प्रकार तालिका तथ्य से पाई चित्र बनाया।



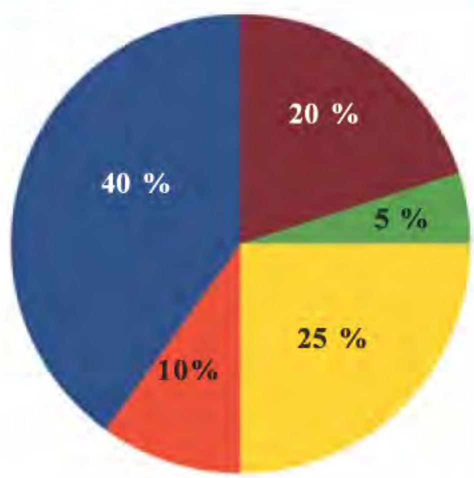
हमारे इलाके के पुस्तकालय में पढ़ने के लिए विभिन्न प्रकार की पुस्तकें हैं। हम उनकी तालिका तैयार करें।

पुस्तक प्रकार	छोटी कहानी	उपन्यास	भ्रमण	छोटे बच्चों का कॉमिक्स	जीवनी
पुस्तक (प्रतिशत)	40	20	5	25	10

दीगयी तालिका से पाई चित्र बनायें सबसे पहले
प्रतिशत के भिन्न में व्यक्त करें

पुस्तक प्रकार	छोटी कहानी	उपन्यास	भ्रमण	छोटे बच्चों की कॉमिक्स	जीवनी
पुस्तक (प्रतिशत)	40	20	5	25	10
पुस्तक (भिन्न)	$\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$	$\frac{20}{100}=\frac{\square}{5}$	$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$	$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$	$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$
केन्द्रीय कोण (360^0 -का भाग)	$360^0 \times \frac{2}{5}$ $=\square$	$360^0 \times \frac{1}{5}$ $=\square$	$360^0 \times \frac{\square}{\square}$ $=\square$	$360^0 \times \frac{\square}{\square}$ $=\square$	360^0 $=\square$

मैं अब एक वृत्ताकार क्षेत्र को विभिन्न तथ्यों के आधार पर उनके केन्द्रीय कोण के अनुसार क्रमश: 144^0, 72^0, 18^0, 90^0, 36^0 वृत्त खण्डों में बाँटा



करके देखे — 2

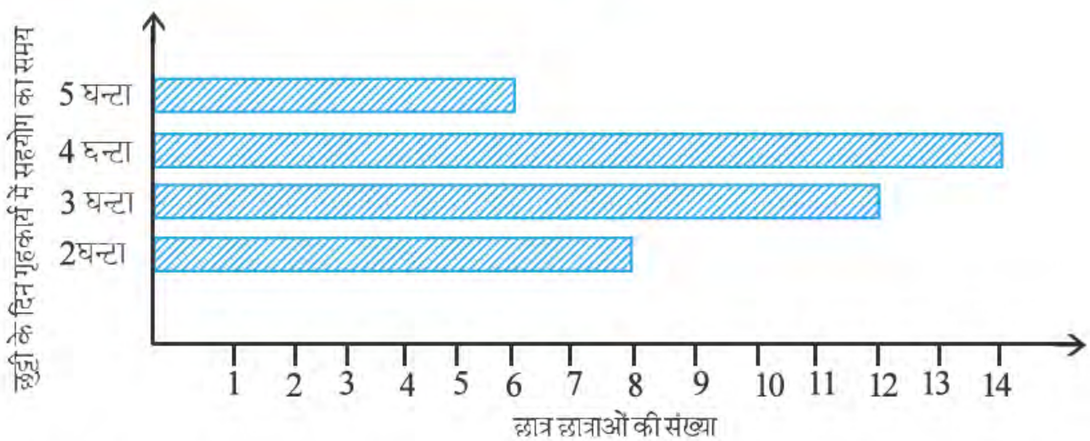
1. पिछले वर्ष अप्रैल महीने में रोहित के स्कूल में 23 दिन का पठन-पाठन हुआ था। रोहित उन 23 दिनों में अपनी कक्षा में छात्र छात्राओं की उपस्थिति की संख्या लिखकर रखा है।

वे हैं —

		15	43	51	47	43	5
51	47	38	51	47	51	47	51
47	51	51	43	47	43	51	42

हम इस कच्चे तथ्य को टैली मार्क द्वारा सजाकर परिसंख्या विभाजन तालिका तैयार करें एवं उससे स्तम्भ चित्र बनायें।

2. हमारी कक्षा में 40 छात्र-छात्राओं में हर छुट्टि के दिन कितने लोग घर के काम में कितने घंटे सहायता करते हैं उसका एक स्तम्भ चित्र बनाये उस स्तम्भ चित्र द्वारा विभिन्न प्रश्नों का उत्तर खोंजे।



1) स्तम्भ चित्र से हमारी कक्षा में कितने छात्र-छात्राएँ प्रत्येक छुट्टी के दिन कितने समय तक घर का काम करते है लिखे।

2) कितनी छात्र-छात्रीएँ सबसे अधिक छुट्टी के दिन घर के काम करती है लिखे।

3) प्रत्येक छुट्टी के दिन कितनी छात्र-छात्राऐं 2 घण्टा घर के काम में सहायता करती है।

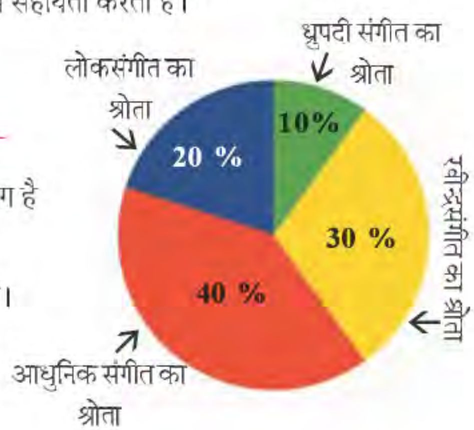
3. निम्न पाई चित्र को देखें और प्रश्नों का उत्तर खोजे —

a) श्रोतागण किस प्रकार का गीत पसन्द करते है उसका पाई चित्र—

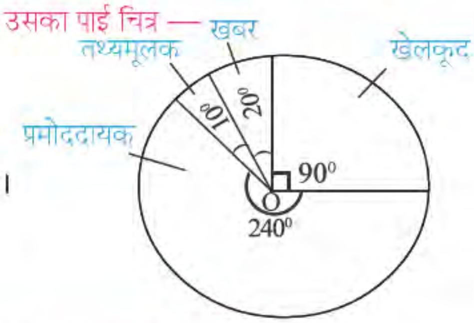
(i) लोकसंगीत श्रोता का वृत्त खण्ड पूरे वृत्त खण्ड का कौन सा भाग है लिखे।

(ii) पाई चित्र में किस-किस गीत के श्रोता सबसे अधिक है लिखे।

(iii) किस प्रकार के गीत के श्रोता सबसे कम हैं लिखे।



b) दर्शकगण टी. वी. में किस प्रकार के कार्यक्रम पसन्द करते है उसका पाई चित्र —



(i) खबर दर्शकों का वृत्तखण्ड कुल वृत्त का कौन सा अंश है लिखें ।

(ii) किस प्रकार के कार्यक्रम के दर्शक सबसे अधिक है लिखे।

(iii) किस प्रकार के दर्शक सबसे कम है लिखे।

(iv) कुल दर्शकों के कितने भाग खेल कूद देखते हैं।

4. पंचम श्रेणी में वार्षिक मूल्यांकन में शुभम के प्राप्तका संख्या का प्रतिशत तालिका में लिखा।

विषद	हिन्दी	अंग्रेजी	गणित	परिवेश	शरीर शिक्षा और हस्त कला
प्राप्तंक (प्रतिशत)	15	20	30	15	20

इस तथ्य का पाई चित्र बनायें और प्रत्येक वृत्त खण्ड का केन्द्रीय कोण लिखे।

5. हमारे इलाके में एक दुकान है मैं इस दुकान में एक दिन विभिन्न प्रकार की बिक्री वस्तुओं की तालिका तैयार किया।

वस्तु	साधारण पावरोटी	स्लाइस पावरोटी	केक	बिस्कुट
मूल्य	320	100	160	140

हम इस तथ्यों का पाई चित्र बनाने की चेष्टा करें।

संकेत: पहले भिन्न में बदले।

इस दिन कुल बिक्रय हुआ = ₹ (320 + 100 + 160 + 140) = ₹ ☐

∴ साधारण पावरोटी बिक्री हुई = $\frac{320}{720}$ = $\frac{☐}{☐}$

हमारे पाई चित्र मे वृत्ताकार क्षेत्र में पावरोटी बिक्री

वृत्त खण्ड के केन्द्रीय कोंण $360^0 \times \frac{4}{9} = 4 \times 40^0 = 160^0$

इसी प्रकार स्लाइस पावरोटी वृत्त खण्ड का केन्द्रीय कोण ☐

केक बिक्री का केन्द्रीय कोण ☐

बिस्कुट बिक्री का केन्द्रीय कोण ☐

इसबार स्वंय पाई चित्र बनायें।

6. आठवीं कक्षा के दो विभागों की छात्र-छात्रायें खाली समय जो विषय पसन्द करते है उसकी तालिका तैयार की गयी है। (एक व्यक्ति एक ही विषय पसन्द करेगा)।

पसन्द विषय	गान	कविता	नाच	नाटक	चित्रांकन
छात्र-छात्राओं की संख्या	20	25	27	28	20

इस तथ्य से कुल छात्रों को कौन-कौन सा विषय पसन्द है बताओ। प्रत्येक वृत्त खण्ड के लिए केन्द्रीय कोण खोजकर पाई चित्र तैयार करे।

7. मैंने एक मॉडल तैयार किया है। उपकरण खरीदने के खर्च की तालिका बनाया।

उपकरण	आर्ट पेपार	स्केच पेन	कैंची	रंगीन फीता	पिचबोर्ड
खर्च ₹	9	12	25	6	8

तथ्यों का वृत्ताकार चित्र या पाई चित्र तैयार करे।

8. एक चित्र प्रदर्शनी में आये 450 व्यक्तियों की दर्शक पसन्दगी चित्र शिल्पी तालिका तैयार किया।

चित्रशिल्पी का नाम	यामिनी राय	नन्दलाल बसु	चिन्तामणि कर	गणेश पाइन
पसन्द दर्शक की संख्या	150	120	80	100

इस तथ्य को लेकर एक पाई चित्र तैयार करे और वृत्त खण्डों का केन्द्रीय कोण लिखें।

9. 180 व्यक्तियों द्वारा पसन्द ऋतुओं की जाँच करके प्राप्त तथ्य का नीचे पाईचित्र वनाया गया है।

निम्न पाईचित्र से प्रश्नों के उत्तर खोजने की चेष्टा करें।

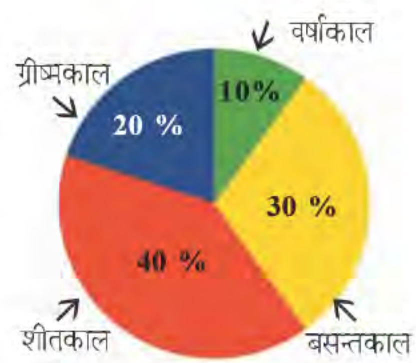
i) सबसे अधिक लोग कौन ऋतु पसन्द करते हैं एवं कितने लोग लिखें।

ii) सबसे कम लोग कौन सी ऋतु पसन्द करते है लिखें।

iii) कितने लोग ग्रीष्म काल पसन्द करते है लिखें।

iv) सबसे छोटे वृत्त खण्ड द्वारा कौन ऋतु बतायी गयी है।

v) स्वयं पाईचित्र देखे और दो नये प्रश्न तैयार कर उनका उत्तर खोजें।



3. परिमेय संख्या की धारणा

आज रविवार है। हमारे स्कूल की छुट्टी है। हम सभी मित्र मधुमिता के घर जा रहे है। मधुमिता का घर बैन्डिल के पास है। हमने निश्चित किया है सारे दिन यहाँ खूब आनन्द करेगे यहाँ की खेती बारी जनसंख्या और अधिकांश मनुष्यों की जीविका के सम्बंध में जानेंगे।

सुबह 8 बजे बस खुली। उस समय हम 15 लोग बस में बैठे थे लेकिन कुछ समय बाद बस में बहुत भीड़ हो गयी।

हमने निश्चय किया है कि समीकरण तैयार करके कितने लोग बस में उठते है और उतरते है। तमाल समीकरण के मूलांक को एक कार्ड पर लिखने की चेष्टा करेगा

मान लें हमारी बस में और x यात्री उठे। इस समय यदि बस में 32 यात्री थे,

मिलता है $x + 15 = 32$ ...... (i)

अथवा, $x = 32 - 15$

$\therefore x = 17$

फलत: बस में और 17 यात्री उठे।

तमाल एक कागज पर लिखा, **(i)** नये समीकरण के मूलांक स्वाभाविक संख्या है।

लेकिन यदि बस में 15 यात्री थे,

अर्थात् $x + 15 = 15$ .... (ii) होने से x = ☐ मिला।

∴ इस क्षेत्र में (ii) नं समीकरण के बीज ☐ (स्वाभाविक संख्या/अखण्ड संख्या)

लेकिन आयेषा गलती से $x + 35 = 32$ लिखती है।

$x + 35 = 32$ .... (iii) का समाधान करके देखें कौन संख्या मिलती है।

$x + 35 = 32$

x = ☐ [स्वयं: करें] (iii) नं समीकरण का मूलांक – 3.

तमाल ने लिखा (iii) नं समीकरण के बीज ☐ [पूर्ण संख्या/अखण्ड संख्या]

नासिर ने भी गलती से लिखा $2x + 15 = 32$

उषा भी गलती से लिखी $3x + 40 = 32$

1 मै समीकरण $2x + 15 = 32$ ....(iv) समीकरण का समाधान करके इसका मान खोजूंगा।

$2x + 15 = 32$

अथवा, $2x = 32 - 15$

अथवा, $2x = 17$

$\therefore \ x = \dfrac{17}{2}$

$\dfrac{17}{2}$, प्राकृतिक संख्या भी नहीं, अखण्ड संख्या भी नहीं एवं पूर्ण संख्या भी नहीं है तो इस संख्या को क्या कहेंगे?

$\dfrac{17}{2}$ — एक परिमेय संख्या।

जिस संख्या को $\dfrac{p}{q}$ रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p और q पूर्ण संख्या एवं $q \neq 0$ हो तो उसे परिमेय संख्या कहते हैं।

लेकिन देखते है, 17, 0, –3 इन्हे भी, $\dfrac{17}{1}, \dfrac{0}{q}\ (q \neq 0)$ एवं $\dfrac{-3}{1}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है तो क्या ये भी परिमेय संख्याये हैं?

प्राकृतिक संख्या, अखण्ड संख्या और पूर्ण संख्या भी परिमेय संख्या हैं।

2 $3x + 40 = 32$ का समाधान करें।

अथवा, $3x = 32 - 40$

अथवा, $3x = -8$

$\therefore x = \dfrac{-8}{3}$

देखते है समीकरण का मूलांक है $\dfrac{-8}{3}$

$\dfrac{-8}{3}$ एक [ ] संख्या।

स्वयं करें— 3.1

मधुमिता के घर पहुँचने के बाद उसके भाई राना ने उसकी कॉपी में बहुत से समीकरणों को लिखा।

1. निम्न समीकरणों का समाधान करें :

(i) $5x = 30$ (ii) $2x + \dfrac{x-1}{2} = 5$ (iii) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{x}{10}$ (iv) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

देखते हैं प्रत्येक समीकरण का मूलांक [ ] संख्या है।

परिमेय संख्याओं में सम्बन्ध खोजे

मधुमिता के घर में जाकर हम ने खूब आनन्द किया। मेहर ने बहुत से कार्ड बनाये तथा प्रत्येक कार्ड में वह अलग-अलग परिमेय संख्या लिखा।

अब टेबल पर उन कार्डों को उलटकर रख दिया।

हमलोग इच्छानुसार कोई भी कार्ड निकालकर योग, वियोग, गुणा अथवा भाग करके देखेंगे कि ये सब किस प्रकार की संख्या हैं।

मैंने निकाला $\boxed{\frac{-2}{3}}$ और $\boxed{\frac{3}{8}}$

कार्ड पर लिखी दोनों संख्याओं का योग करके देखे क्या पाते हैं। $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$

देखते हैं दो परिमेय संख्याओं का योग करने पर परिमेय संख्या ही पाते है।

3 अब मैं दो परिमेय संख्याओं का वियोग करने से देखूँ क्या पाता हूँ।

$$(-\frac{2}{3}) - (\frac{3}{8}) = -\frac{2}{3} - \frac{3}{8} = \frac{-16-9}{24} = -\frac{25}{24}$$

देखता हूँ कि दो मूल संख्याओं का वियोग करने से ☐ संख्या ही पाया।

4 अब दो मूल संख्याओं का गुणा करके देखें क्या पाते हैं।

$$(-\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}) \times (\frac{\cancel{3}}{{}_4\cancel{8}}) = -\frac{1}{4}$$

देखते हैं दो मूल संख्या का गुणा करके ☐ संख्या ही पाये।

5 अब दो परिमेय संख्याओं का भाग करके देखें क्या पाते हैं।

$$(-\frac{2}{3}) \div (\frac{3}{8}) = -\frac{2}{3} \times \frac{8}{3} = -\frac{16}{9}$$

देखते है कि दो परिमेय संख्याओं का भागफल ☐ संख्या पाये। लेकिन यदि $(-\frac{2}{3}) \div 0$ करें देखें क्या पाते हैं।

$-\frac{2}{3} \div 0$ अपरिभाषित

∴ शून्य से भाग नहीं करने से दो परिमेय संख्याओं का भागफल सदा परिमेय संख्या होती है।

सिराज निकाला $\boxed{\frac{5}{4}}$ और $\boxed{\frac{2}{13}}$

सिराज के कार्ड पर लिखी परिमेय संख्याओं का योग, वियोग, गुणा और भाग करने से परिमेय संख्या पाये कि नहीं बिना हिसाब किये देखें (स्वयं करें)

संख्याये	योगफल	वियोगफल	गुणनफल	भागफल	सिद्धान्त
दो अखण्ड संख्या 5 और 8	$5+8=$ □	दोनो संख्या का वियोग करें $5-8=$ □ $8-5=$ □	दोनो संख्याओं का गुणा करें $5\times 8=$ □	दोनो संख्याओं का भाग करें $5\div 8=\frac{5}{8}$ $8\div 5=\frac{8}{5}$	दो अखण्ड संख्याओं का वियोगफल और भागफल हमेशा अखण्ड नहीं होगा लेकिन योगफल और गुणनफल सदा ही अखण्ड संख्या होती है।
दो पूर्ण संख्या 7 और -9	$7+(-9)=$ □	$7-(-9)=$ $(-9)-(7)=$ □	$7\times(-9)=$ □	$7\div(-9)=$ □ $(-9)\div(7)=$ □	पूर्ण संख्या का योगफल और वियोगफल एवं गुणनफल □ संख्या होती है। लेकिन पूर्ण संख्या का भागफल हमेशा □ संख्या नहीं होती।
कोई दो परिमेय संख्या लिये □ और □	□ + □ = □	□ - □ = □ □ - □ = □	□ × □ = □	□ ÷ □ = □ □ ÷ □ = □	स्वयं लिखे

∴ a और b परिमेय संख्या होने पर (a + b) □ संख्या (a - b) अथवा (b - a) □ संख्या। (a × b) □ संख्या। लेकिन a ÷ b हमेशा परिमेय संख्या जब $b \neq 0$

मैं किसी परिमेय संख्या के साथ 0 का योग करके देखे क्या पाते है। $0+\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$ एवं $\frac{3}{7}+0=\frac{3}{7}$

पुन: मैं किसी परिमेय संख्या को 1 से गुणा करके देखे क्या पाते है।

$1\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$ एवं $\frac{3}{7}\times 1=\frac{3}{7}$

सीमा अन्य किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के साथ 0 के साथ योग करके एवं दोनो संख्याओं को 1 से गुणा करके पायी—

0 + कोई परिमेय संख्या = वही परिमेय संख्या + 0 = □

1 × कोई परिभेय संख्या = वही परिभेय संख्या × 1 = □

अर्थात् $0+a=a+0=a$ एवं $1\times a=a\times 1=a$ [यहाँ a कोई भी परिमेय संख्या]

मैं किसी परिमेय संख्या को 0 से गुणा करके देखूँ क्या पाता हूँ।

$0\times\frac{14}{19}=$ □ , $\frac{14}{19}\times 0=$ □

∴ दीपू अन्य किन्हीं दो परिमेय संख्या को 0 से गुणा करके पाया

0 × कोई परिमेय संख्या = कोई परिमेय संख्या × 0 = $\square$

[कोई भी परिमेय संख्या लेकर स्वयं करें]

अर्थात् $0 \times a = a \times 0 = 0$ (यहाँ a कोई परिमेय संख्या है)।

नीचे की तालिका को समझकर लिखे और कहाँ-कहाँ विनिमय नियम मानकर चलता है देखें।

परिमेय संख्या	प्रकिया	सिद्धान्त
$\frac{5}{7}$ और $\frac{6}{11}$	उन दो परिमेय संख्याओं का योग करें $\frac{5}{7}+\frac{6}{11}=\square$ $\frac{6}{11}+\frac{5}{7}=\square$ $\therefore \frac{5}{7}+\frac{6}{11}\ \square\ \frac{6}{11}+\frac{5}{7}$ [= / ≠ बैठायें] अन्य कोई दो परिमेय संख्या लेकर जांच करें। ∴ $a + b = b + a$ [यहाँ a और b परिमेय संख्या]	परिमेय संख्या योग विनिमय नियम मानकर चलती है।
$\frac{7}{8}$ और $\frac{2}{5}$	उन परिमेय संख्या का वियोग करें $\frac{7}{8}-\frac{2}{5}=\square$ एंव $\frac{2}{5}-\frac{7}{8}=\square$ $\frac{7}{8}-\frac{2}{5}\ \square\ \frac{2}{5}-\frac{7}{8}$ [= / ≠ बैठायें] अन्य कोई दो परिमेय संख्या लेकर जांच करें। साधारणत: $a - b \neq b - a$ [यहाँ a और b परिमेय संख्या]	परिमेय संख्या वियोग विनिमय नियम का मानकर चलती है।
$\frac{5}{6}$ और $\frac{3}{2}$	दो परिमेय संख्याओं का गुणा करें $\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}=\square$ एंव $\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}=\square$ $\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}\ \square\ \frac{3}{2}\times\frac{5}{6}$ [= / ≠ बैठाये] अन्य कोई दो परिमेय संख्या लेकर जांच करें। ∴ $a \times b = b \times a$ [यहाँ a और b परिमेय संख्या]	$\square$
शून्य को छोड़कर कोई परिमेय संख्या लें जैसे $\square$ और $\square$	उन दो परिमेय संख्याओं का भाग करें $\square \div \square = \square$ एंव $\square \div \square = \square$ $\square\ \square\ \square$ [= / ≠ बैठाये] साधारणत: $a \div b \neq b \div a$ [यहाँ a और b परिमेय संख्या]]	$\square$

6 हम कोई तीन परिमेय संख्या में लेकर योग करें।

$-\frac{1}{5} + (\frac{2}{5} + \frac{5}{7}) = \square$ [स्वयं करें]

एवं $(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}) + \frac{5}{7} = \square$ [स्वयं करें]

$\therefore -\frac{1}{5} + (\frac{2}{5} + \frac{5}{7}) \square (-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}) + \frac{5}{7}$ [= / ≠ बैठायें]

$\therefore -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ और $\frac{5}{7}$ इनका योग संख्या नियम मानकर चलता हैं।

7 रोहित अन्य कोई तीन परिमेय संख्या लेकर परिमेय संख्याओं का योग संयोग नियम मानकर चलता है या नहीं जाँच किया।

पाया $a + (b + c) = (a + b) + c$ [यहाँ a, b और c तीन परिमेय संख्यायें है]

8 कोई तीन परिमेय संख्या लेकर वियोग करें और देखें क्या पाते है।

$\frac{3}{5} - (\frac{2}{7} - \frac{1}{4}) = \square$ [स्वयं करें]

$(\frac{3}{5} - \frac{2}{7}) - \frac{1}{4} = \square$ [स्वयं करें]

$\therefore \frac{3}{5} - (\frac{2}{7} - \frac{1}{4}) \square (\frac{3}{5} - \frac{2}{7}) - \frac{1}{4}$ [= / ≠ बैठायें]

$\therefore$ परिमेय संख्या का वियोग, संयोग नियम मानकर नहीं चलता।

साधारणत: $a - (b - c) \neq (a - b) - c$ [यहाँ a, b और c तीन परिमेय संख्यायें है]

9 मैं कोई तीन परिमेय संख्याओं को लेकर गुणा करू और देखे परिमेय संख्याओं का गुणा संयोग नियम मानता है या नहीं।

$\frac{5}{8} \times (\frac{3}{5} \times \frac{7}{9}) = \square$ एवं $(\frac{5}{8} \times \frac{3}{5}) \times \frac{7}{9} = \square$

$\therefore \frac{5}{8} \times (\frac{3}{5} \times \frac{7}{9}) \square (\frac{5}{8} \times \frac{3}{5}) \times \frac{7}{9}$ [= / ≠ बैठाये]

$\frac{5}{8}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}$ का गुणा संयोग नियम मानकर चलता है।

10 शुभम अन्य कोई तीन परिमेय संख्याओ को लेकर उनका गुणा किया और देखा कि इनका गुणा संयोग नियम मानकर चलता है या नहीं जाँच किया। **[स्वयं करें]**

पाया, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ [यहाँ a, b और c परिमेय संख्या]

11 मैं तीन परिमेय संख्या लेकर भाग करके देखूँ परिमेय संख्याओं का भाग संयोग नियम मानकर चलता है या नहीं।

$$\frac{11}{13} \div \left(\frac{5}{6} \div \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{13} \div \left(\frac{5}{6} \times \frac{8}{3}\right) = \frac{11}{13} \div \frac{20}{9} = \frac{11}{13} \times \frac{9}{20} = \frac{99}{260}$$

लेकिन $\left(\frac{11}{13} \div \frac{5}{6}\right) \div \frac{3}{8} = \left(\frac{11}{13} \times \frac{6}{5}\right) \div \frac{3}{8} = \frac{66}{65} \times \frac{8}{3} = \square$

$\therefore \frac{11}{13} \div \left(\frac{5}{6} \div \frac{3}{8}\right) \square \left(\frac{11}{13} \div \frac{5}{6}\right) \div \frac{3}{8}$ [= / ≠ बैठायें]

परिमेय संख्याओं का भाग संयोग नियम मानकर नहीं चलता है।

साधारणत: $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ [यहाँ, a, b और c परिमेय संख्या एवं $b \neq 0$ व $c \neq 0$]

12 योग के विनिमय और संयोग नियम व्यवहार कर परिमेय संख्या का योग करें।

(1) $\frac{5}{14} + \frac{6}{52} + \left(-\frac{3}{28}\right) + \frac{7}{13}$

$= \frac{5}{14} + \left\{\frac{6}{52} + \left(-\frac{3}{28}\right)\right\} + \frac{7}{13}$

$= \frac{5}{14} + \left\{\left(-\frac{3}{28}\right) + \frac{6}{52}\right\} + \frac{7}{13}$

$= \left\{\frac{5}{14} + \left(-\frac{3}{28}\right)\right\} + \left(\frac{6}{52} + \frac{7}{13}\right)$ [विनिमय और संयोग के नियम की सहायता से पाते है]

$= \frac{10-3}{28} + \frac{6+28}{28}$

$= \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{28}_{4}} + \frac{\cancel{34}^{17}}{\cancel{52}_{26}}$

$= \frac{1}{4} + \frac{17}{26}$

$= \frac{13+34}{52}$

$= \frac{47}{52}$

13 परिमेय संख्या के गुणा के विनिमय और संयोग नियम की सहायता से गुणा करें।

$-\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{15}{16} \times \frac{-14}{9}$

$= \left\{-\frac{3}{5} \times \left(\frac{4}{7} \times \frac{15}{16}\right)\right\} \times \frac{-14}{9}$

$= -\frac{3}{5} \times \left(\frac{15}{16} \times \frac{4}{7}\right) \times \frac{-14}{9}$

$= \left(-\frac{3}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{15}^{3}}{16}\right) \times \left(\frac{4}{7} \times \frac{-14}{9}\right)$ [विनिमय और संयोग नियम की सहायता से पाया]

$= \frac{\cancel{9}}{\cancel{16}_{2}} \times \frac{-\cancel{8}}{\cancel{9}}$

$= \frac{1}{2}$

हमारे टेबल पर अनेक परिमेय संख्या लिखा कार्ड छोड़ा गया है।

मैं एक कार्ड खींचा। मैने उठाया $\boxed{\frac{3}{7}}$

मैं अपने कार्ड पर लिखी परिमेय संख्या के साथ क्या योग करू कि शून्य पाये देखे

$\frac{3}{7} + \square = 0$ एवं $\square + \frac{3}{7} = 0$ [स्वयं करें]

जोसेफ अन्य एक कार्ड उठाया। जोसेफ उठाया $\boxed{-\frac{2}{9}}$

$-\frac{2}{9} + \{-(-\frac{2}{9})\} = \square$ [स्वयं करें]

$-\frac{2}{9}$ के साथ $-(-\frac{2}{9})$ योग करके $\square$ पाया

$\square + (-\frac{2}{9}) = 0$

अर्थात a + (– a) = (– a) + a = 0 (यहाँ a एक परिमेय संख्या है)।

मैंने उठाया → $\boxed{\frac{9}{13}}$

14 परिमेय संख्या से $\frac{9}{13}$ का गुणा करने से 1 पायेगे देखें।

$\frac{9}{13} \times \square = 1$ अथवा $\square \times \frac{9}{13} = 1$

अर्थात् $\frac{9}{13}$ के $\frac{9}{13}$ को दूसरे अथवा $\frac{13}{9}$ से गुणा करने से $\square$ पायेंगे।

अपू उठाया → $\boxed{-\frac{11}{7}}$, $(-\frac{11}{7})$ के साथ किस परिमेय संख्या का गुणा करने से 1 पायेंगे लिखें।

$(-\frac{11}{7}) \times \square = 1$ और $\square \times (-\frac{11}{7}) = 1$

$\therefore \quad a \times \frac{1}{a} = \square = \frac{1}{a} \times a$ [यहाँ a एक परिमेय संख्या है एवं $a \neq 0$]

लेकिन राना ने तीन कार्ड उठाया → $\boxed{\frac{5}{2}}$, $\boxed{\frac{7}{8}}$ और $\boxed{\frac{11}{12}}$

वह लिखा $\frac{5}{2} \times (\frac{7}{8} + \frac{11}{12}) = \frac{5}{2} \times (\frac{21+22}{24})$

$= \frac{5}{2} \times \frac{43}{24} = \square$

लेकिन, $\frac{5}{2}\times\frac{7}{8}+\frac{5}{2}\times\frac{11}{12}=\frac{35}{16}+\frac{55}{24}=\square$ [स्वयं करें]

देखते है $\frac{5}{2}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{11}{12}\right)\ \square\ \frac{5}{2}\times\frac{7}{8}+\frac{5}{2}\times\frac{11}{12}$ [= / ≠ बैठायें]

मैं अन्य कोई तीन परिमेय संख्याओं को लेकर जाँच करुँ कि परिमेय संख्या विच्छेद नियम मानती है या नहीं।

> पाया, $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ [यहाँ a,b और c परिमेय संख्या हैं।]

स्वयं करें—3.2

1) $\frac{2}{9}$ के साथ $\square$ योग करने से 0 पायेंगे।
2) $-\frac{9}{8}$ के साथ $\square$ योग करने से 0 पायेंगे।
3) $-(-\frac{5}{2})$ के साथ $\square$ योग करने से शून्य पायेंगे।
4) $\frac{5}{8}$ के साथ $\square$ गुणा करने से 1 पायेंगे।
5) $-\frac{3}{9}$ के साथ $\square$ गुणा करने से 1 पायेंगे।
6) $\frac{7}{9}\times\left(\frac{-11}{25}\right)\times\left(\frac{-89}{41}\right)\times\left(\frac{5}{121}\right)$ विनिमय और संयोग के नियम की सहायता से गुणा करें।

आनन्दप्रद खेल

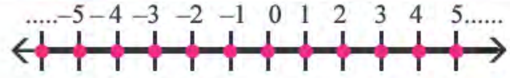
आज कमाल और रेहाना ने अपने परिमेय संख्या लिखे कार्ड लेकर अन्य खेल खेलेंगे और परिमेय संख्या का योग, वियोग, गुणा और भाग करते है।

आज वे इस परिमेय संख्या को रेखा पर बैठा सकते है कि नहीं प्रयास करेंगे। अत: कमाल एक-एक करके कार्ड उठाएगा एवं रेहाना संख्या रेखा बनाकार वहाँ पर परिमेय संख्या को बैठाने का प्रयास करेंगी।

मैं पहले प्राकृतिक संख्या, अखण्ड संख्या, और पूर्ण संख्या की संख्या रेखा बनाया।

इस संख्या रेखा की गोल चिन्हित संख्या प्राकृतिक संख्या हैं।

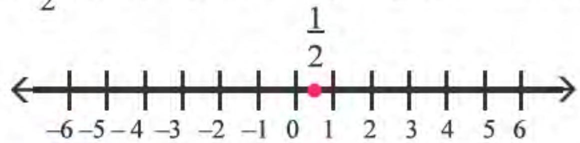
इस संख्या रेखा की गोल चिन्हित संख्या अखण्ड संख्या हैं।



इस संख्या रेखा की गोल चिन्हित संख्या पूर्ण संख्या हैं।

कमाल निकाला → $\boxed{\frac{1}{2}}$

पूर्ण संख्या की संख्या रेखा पर $\frac{1}{2}$ बैठायें। 0 से 1 के बीच की दूरी को 2 बराबर भागों में बाटकर मध्य बिन्दु पर $\frac{1}{2}$ बैठायें।



कमाल निकाला → $\boxed{\frac{1}{5}}$ और $\boxed{\frac{2}{5}}$

इस बार हम किस तरह $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{5}$ को संख्या रेखा पर बैठायेंगे देखें

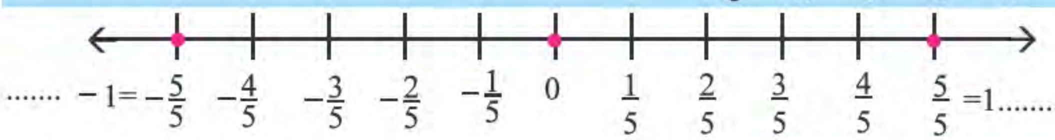
पूर्ण संख्या की संख्या रेखा के 0 से 1 के बीच की दूरी को 5 बराबर भागों में बांटकर प्रथम भाग पर $\frac{1}{5}$ एवं द्वितीय भाग पर $\frac{2}{5}$ बैठाये।

समझ गये, 0 से 1 के बीच की दूरी को 5 बराबर भागों में बांटने पर पायेंगे → $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5} = 1$

पुन: 1 से 2 के बीच की दूरी को 5 बराबर भाग करने पर पायेंगे → $\frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{10}{5} = 2$

–1 से 0 के बीच की दूरी को 5 बराबर भाग करने पर पायेंगे $0, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{5} = -1$

पुन: –2 से –1 के बीच की दूरी को बराबर 5 भाग करने पर पायेंगे $-\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}, -\frac{10}{5} = -2$



तब क्या $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच एक परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ है कि नहीं देखें?

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ एवं $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$

देखते है $\frac{4}{10}$ एवं $\frac{8}{10}$ के बीच $\frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}$ परिमेय संख्याओं को लिख सकते हैं

पुन: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100}$ एवं $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{80}{100}$

$\therefore \frac{40}{100}$ और $\frac{80}{100}$ के बीच $\frac{41}{100}, \frac{42}{100}, ..., \frac{79}{100}$ परिभेय संख्याओं को लिख सकते है।

$\therefore \frac{2}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच परिमेय संख्या ☐ [निर्दिष्ट / असंख्य]

पाया दो अलग परिमेय संख्या के मध्य ☐ परिमेय संख्यायें हैं। [निर्दिष्ट / असंख्य]

बनाकर देखें— 3

1. नीचे के समीकरणों का समाधान करें एवं मूलांक $\frac{p}{q}$ $[(q \neq 0)$ यहाँ p,q पूर्ण संख्या] के रूप में व्यक्त करें।

(a) $7x = 14$ (b) $4p + 32 = 0$ (c) $11x = 0$ (d) $5m - 3 = 0$ (e) $9y + 18 = 0$ (f) $t = 8 - 12t$ (g) $6y = 5 + y$

(h) $2x + \square = \square$ [स्वयं परिभेय संख्या बैठाये]

2. $y = -\frac{5}{4}$ होने से $-(-y) = y$ जाँच करें

3. $x = -\frac{3}{8}$ होने से खोजें (a) $2x + 5$ (b) $x +$ (c) $5\frac{3}{8}(-x)$ (d) $\square - (-x)$

[स्वयं परिभेय संख्या बैठाये]

4. नीचे के खाली स्थानों को समझकर संख्या लिखे :

(a) $\frac{9}{11} + \square = 0$ (b) $\square + (-\frac{21}{29}) = 0$ (c) $\frac{7}{19} \times \square = 1$ (d) $-5 \times \square = 1$

(e) $-\frac{15}{23} \times \square = 1$ (f) $(-\frac{8}{3}) \times (-\frac{21}{20}) = \square$

5. $\frac{7}{18}$ को $(-\frac{5}{6})$ को दूसरे से गुणा करके गुणनफल लिखे।

6. विनिमय और संयोग नियम की सहायता से मान खोंजे :

(i) $\frac{5}{8} + (-\frac{7}{15}) + (\frac{3}{32}) + \frac{11}{75}$ (ii) $\frac{8}{121} \times \frac{35}{169} \times \frac{55}{36} \times \frac{78}{49}$

7. संख्या रेखा पर परिमेय संख्या बैठाये: $\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{6}{5}, -\frac{8}{3}$

8. 4 परिमेय संख्या लिखे जो 1 से बड़ी तथा 2 से छोटी हो।

9. $-\frac{3}{5}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच 10 परिमेय संख्या खोजें:

[संकेत: $-\frac{3}{5} = -\frac{6}{10}$, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$]

10. नीचे के परिमेय संख्याओं के बीच पाँच-पाँच करके परिमेय संख्या लिखे :

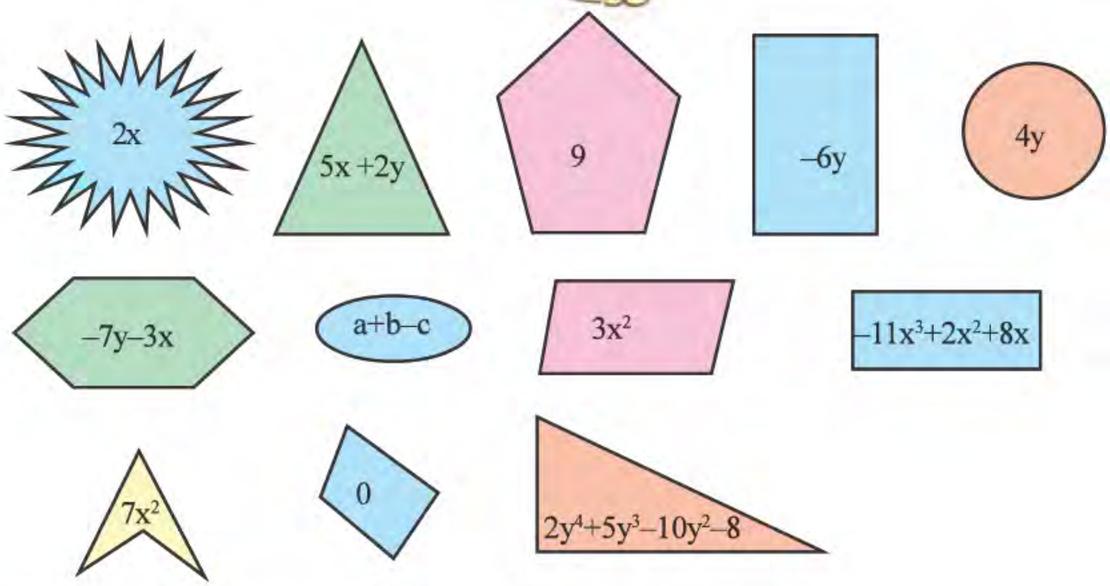
(a) $\frac{1}{3}$ और $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{4}{3}$ और $\frac{3}{7}$

[संकेत :हरो को बराबर करते है, $\frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \frac{10}{30}$, $\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{18}{30}$]

4. बहुपदी संख्याओं का गुणा और भाग

आज हमलोगों ने तय किया है कि हमारी कक्षा में कुछ आनन्दप्रद चीजे तैयार करके रंगीन चार्ट के ऊपर झूलाकर रखेंगे। अत: हम लोग रंगीन कागज काटकर विभिन्न आकार को कागज तैयार किये हैं। हमारा मित्र तथागत ने बहुत से रंगीन कागजो के बीच में विभिन्न संख्या या संख्याओं को लिखा है। जिसे रंगीन कागज के चार्ट पर लगाया है।

हम इन विभिन्न आकार के रंगीन कार्डो को देखें।



उपर्युक्त चित्रों को देखकर प्रयोजन के आधार पर चित्रांकन करें।

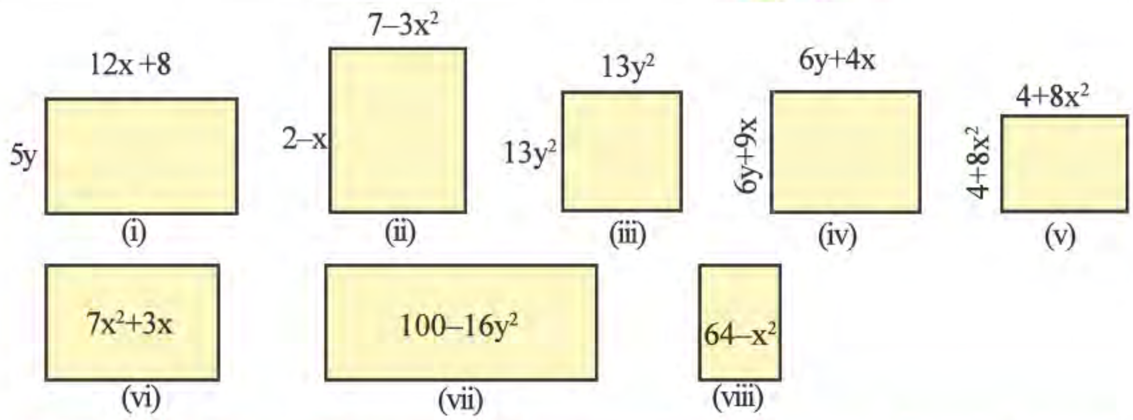
ध्रुवक लिखे कार्ड का अंकन करें	→	
उपर्युक्त चित्र से एक पदी बीजगणितीय संख्याओं को लिखे और उसे ही कार्ड में बनाएं	→	
एक पदी बीजगणितीय संख्याओं का योगफल खाली घर में लिखें	→	
उपर्युक्त चित्र को द्विपदी बीजगणितीय संख्याओं को लिखे और उन्हें कार्ड पर अंकन करें	→	
द्विपदी बीजगणितीय संख्याओ का योग करें एवं योगफल खाली स्थान में लिखें	→	

(a+b–c) के ☐ पद है। ∴ यह त्रिपदी संख्या राशि है। लेकिन $(2x^4+5y^3-10y^2-8)$ इस बीजगणितीय संख्या राशि के पद ☐ है अत: यह चारपदी संख्या राशि है।

इसी प्रकार एक बीजगणितीय राशि में यदि बहुत से पद हो तो उसे क्या कहेंगे?

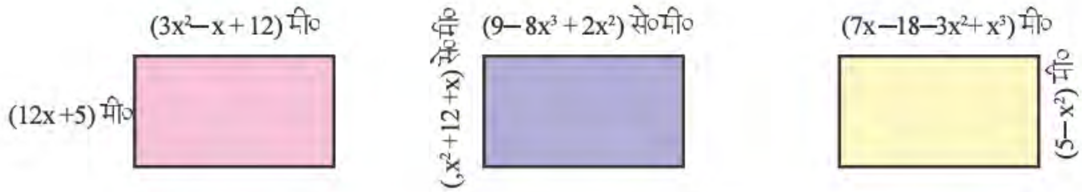
एक से अधिक पद युक्त राशि वाले बीजगणितीय राशि को बहुपदी कहते है।

रूपा ने दूसरे प्रकार की आनन्दप्रद चीज तैयार किया। वह उन सभी आयताकार कार्डो को संलग्न करके रखी है। वह उन्हें एक बड़े चित्र बोर्ड पर चिपकाकर रख दी। शकील उन आयताकार रंगीन कार्डों की लम्बाई चौड़ाई और क्षेत्रफल को लिख दिया। चित्र देखे और शकील जिहें नहीं लिखा है उहें लिखिने की चेष्टा करें।



आयत क्षेत्र	लम्बाई (इकाई)	चौड़ाई (इकाई)	क्षेत्रफल (वर्ग इकाई)
(i)	$12x + 8$	$5y$	
(ii)	$7-3x^2$	$2-x$	
(iii)			
(iv)			
(v)	$4 + 8x^2$	$4+8x^2$	
(vi)			$7x^2+3x$
(vii)			$100-16y^2$
(viii)			$64-x^2$
(ix)	स्वयं एकपदी बीजगणितीय संख्या राशि लिखें	स्वयं: द्विपदी बीजगणितीय संख्या राशि लिखें	

1.1 मैं स्वयं अपने तैयार किये आयताकार कार्ड की लम्बाई और चौड़ाई बहुपदी बीजगणितीव संख्या राशि को लिखा।



उपर्युक्त आयताकार कार्डो की लम्बाई और चौड़ाई x के घात को निम्नक्रम में सजाकर कार्ड का क्षेत्रफल निर्णय करें—

1.2 लाल रंग के आयताकार कार्ड का क्षेत्रफल

= $(3x^2 - x + 12) \times (12x+5)$ वर्ग मीटर।

= $\{3x^2 \times (12x+5) - x\,(12x+5) + 12\,(12x + 5)\}$ वर्ग मीटर।

= $(36x^3 + 15x^2 - 12x^2 - 5x + 144x + 60)$ वर्ग मीटर।

= $(36x^3 + 3x^2 + 139x + 60)$ वर्ग मीटर।

1.3 ब्लू रंग के आयताकार कार्ड का क्षेत्रफल

= $(9 - 8x^3 + 2x^2) \times (x^2 - x + 12)$ वर्ग मीटर।

= $(-8x^3 + 2x^2 + 9)\,(x^2 - x + 12)$ वर्ग मीटर। [x के घात के निम्नक्रम में सजायें]

= $\{-8x^3 \times (x^2 - x + 12) + 2x^2\,(x^2 - x + 12) + 9\,(x^2 - x + 12)\}$ वर्गसे०मी०। [विच्छेद नियम]

= $(-8x^{3+2} + 8x^{3+1} - 96x^3 + 2x^{2+2} - 2x^{2+1} + 24x^2 + 9x^2 - 9x + 108)$ वर्ग से०मी०

= $(-8x^5 + 8x^4 - 96x^3 + 2x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 9x^2 - 9x + 108)$ वर्ग से०मी०

= $(-8x^5 + 10x^4 - 98x^3 + 33x^2 - 9x + 108)$ वर्ग से०मी०

1.4 पीले रंग के आयताकार कार्ड का क्षेत्रफल

= $(7x - 18 - 3x^2 + x^3) \times (5 - x^2)$ वर्ग मीटर।

= [ ] × [ ] वर्ग मी० [x के घात के निम्नक्रम में सजायें]

= $\{ (x^3 - 3x^2 + 7x - 18) \times (-x^2) + (x^3 - 3x^2 + 7x - 18) \times 5 \}$ वर्ग मीटर

= [ ] वर्ग मीटर (स्वयं करें)

बनाकर देखे — 4.1

1.

प्रथम बीजगणितीय संख्या राशि	द्वितीय बीजगणितीय संख्या राशि	गुणनफल	गुणनफल का मान
a) $x^2 - 3x + 5$	$5x + 9$	$5x^3 - 6x^2 - 2x + 45$	$x = 1$ बैठाकर पाये 42
b) $x^2 + 12 - 7y$	$2x - y$		$x = -2$ और $y = 2$ बैठाकर पाये ☐
c) $8p^3 - 3p - 2p^2$	$4p^2 - 5$		$p = -2$ बैठाकर पाये ☐
d) $6a + 5b + 2$	$a - b + 6$		$a = 0$ और $b = -1$ बैठाकर पाये ☐
e) $p^3 - p^2q^2 + q^3$	$p^2 + pq + q^2$		$p = 2$ और $q = -2$ बैठाकर पाये ☐
f) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$	$x+y+z$		$x=1,\ y=0,\ z=-1$ बैठाकर पाये ☐
g) मैं स्वयं एक द्विपदी बीजगणितीय संख्या राशि लिखूँ	मैं स्वयं एक त्रिपदी बीजगणितीय संख्या राशि लिखूँ		चल या चलो का मान लिखकर गुणनफल का मान निकाले।

2. सतत् गुणा करे गुणनफल खोजें (एक के बाद एक गुणा करें)

(i) $(x^5 + 1), (3 - x^4), (4 + x^3 + x^6)$

(ii) $(2a^3 - 3b^5), (2a^3 + 3b^5), (2a^4 - 3a^2b^2 + b^4)$

(iii) $(ax + by), (ax - by), (a^4x^4 + a^2b^2x^2y^2 + b^4y^4)$

(iv) $(a+b+c), (a-b+c), (a+b-c)$

(v) $\left(\frac{2p^2}{q^2} + \frac{5q^2}{p^2}\right) \left(\frac{2p^2}{q^2} - \frac{5q^2}{p^2}\right)$

(vi) $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2}\right), \left(\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right), \left(\frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2}\right)$

3. सरल करें

(i) $(x+y)(x^2-xy+y^2) + (x-y)(x^2+xy+y^2)$ (ii) $a^2(b^2-c^2) + b^2(c^2-a^2) + c^2(a^2-b^2)$

4. (i) $a = x^2 + xy + y^2$, $b = y^2 + yz + z^2$, $c = z^2 + xz + x^2$ होने पर $(x-y)a + (y-z)b + (z-x)c$ का मान निर्णय करें।

(ii) $a = lx + my + n$, $b = mx + ny + l$, $c = nx + ly + m$ होने से $a(m+n) + b(n+l) + c(l+m)$ क्या होगा देखें।

मृणाल और श्रावणी ने बहुत से रंगीन कार्ड तैयार किया है। उन कार्डो पर बहुत सी बीजगणितीय राशियाँ लिखे हैं।

मैंने उन कार्डो के बीजगणितीय राशियों का गुणा करके गुणनफल को दूसरे कार्ड पर लिखा हैं। हमारा मित्र नीलाद्री कार्ड पर लिखे गुणनफल से गुणा या गुणक खोजने का प्रयास करता हैं।

$(x^2 + x) \times (x-1) = (x^3 - x)$

$(x^3 - x) \div (x-1) = \square$ $\qquad$ $(x^3 - x) \div (x^2-1) = \square$

गुणनफल ÷ गुणक = गुणा $\qquad$ गुणनफल ÷ गुणा = गुणक

$(x - 6) \times (x - 3) = \square$

$(x^2-9x + 18) \div (x - 3) = \square$ $\qquad$ $(x^2-9x + 18) \div (x - 6) = \square$

$(1 - 2c) \times (1-3c) = \square$

$(1-5c+ 6c^2) \div (1-2c) = \square$ $\qquad$ $(1-5c+ 6c^2) \div (1-3c) = \square$

दो संख्याओं का गुणनफल ÷ उनमें से एक संख्या = $\square$

2 गुणा करके गुणनफल को गुणा या गुणक से भाग करके भागफल की जाँच करें।

$(1+5x) \times (4-3x) =$ □

$(4 + 17x - 15x^2) \div (1 + 5x) =$ □

दूसरे तरीके से भाग करें, $5x + 1$) $-15x^2 + 17x + 4$ ($-3x + 4$ [x के घात को निम्नक्रम में सजाकर पाये]

$-15x^2 - 3x$ [घटायें]

$+ \quad +$

$20x + 4$

$20x + 4$ [घटायें]

$- \quad -$

0 भागफल $= -3x + 4$ एवं शेषफल $= 0$

3 $a^2 - 3a - 2) \times (2a - 1) =$ □

$(2a^3 - 7a^2 - a + 2) \div (a^2 - 3a - 2) =$ □

भाग करें, $a^2 - 3a - 2$) $2a^3 - 7a^2 - a + 2$ ($2a - 1$

$2a^3 - 6a^2 - 4a$ घटायें

$- \quad + \quad +$

$-a^2 + 3a + 2$

$-a^2 + 3a + 2$ घटायें

$+ \quad - \quad -$

0 भागफल = □ एवं शेषफल = □

4 □ $\times 3p - 1 = 81p^4 - 1$

भाग करके पायें, $3p - 1$) $81p^4 - 1$ ($27p^3 + 9p^2 + 3p + 1$

$81p^4 - 27p^3$

$- \quad +$

$27p^3 - 1$

$27p^3 - 9p^2$

$- \quad +$

$9p^2 - 1$

$9p^2 - 3p$

$- \quad +$

$3p - 1$

$3p - 1$

$- \quad +$

0 भागफल= □ और शेषफल = □

स्वयं करें— 4.1

1) चल के घात को निम्नक्रम में सजाकर भाग करें :

a) $(x^2 - 13x + 22)$ को $(x-11)$ द्वारा। b) $(a^2 - 5a + 6)$ को $(a - 2)$ द्वारा।

c) $(2a^3 - 7a^2 - a + 2)$ को $(a^2 - 3a - 2)$ द्वारा। d) $(4a^2 - 9b^2)$ को $(2a + 3b)$ द्वारा।

2) नीचे के रंगीन कार्ड से भागफल एवं शेषफल निकालें

रंगीन कार्ड	भाजक	भागफल	भाज्य	शेषफल
लाल		$2x + 3y$	$6x^3y - x^2y^2 - 7xy^3 + 12y^4$	
ब्लू	$4x^2 - x - 5$		$12x^4 + 5x^3 - 33x^2 - 3x + 16$	
हरा		$x^2 + px + q$	$x^3 + px^2 + qx + x$	

लाल कार्ड का भाजक और शेषफल निकालें

भाज्य = $6x^3y - x^2y^2 - 7xy^3 + 12y^4$

भागफल = $2x + 3y$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2y - 5xy^2 + 4y^3 \\
\hline
2x + 3y & 6x^3y - x^2y^2 - 7xy^3 + 12y^4 \\
 & 6x^3y + 9x^2y^2 \\
 & - \quad - \\
\hline
 & -10x^2y^2 - 7xy^3 \\
 & -10x^2y^2 - 15xy^3 \\
 & + \quad + \\
\hline
 & 8xy^3 + 12y^4 \\
 & 8xy^3 + 12y^4 \\
 & - \quad - \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

भाजक = ☐ और शेषफल = ☐

ब्लू कार्ड का भागफल और शेषफल ज्ञात करें।

यहाँ भाज्य = $12x^4 + 5x^3 - 33x^2 - 3x + 16$ एवं भाजक = $4x^2 - x - 5$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 2x - 4 \\
\hline
4x^2 - x - 5 & 12x^4 + 5x^3 - 33x^2 - 3x + 16 \\
 & 12x^4 - 3x^3 - 15x^2 \\
 & - \quad + \quad + \\
\hline
 & 8x^3 - 18x^2 - 3x \\
 & 8x^3 - 2x^2 - 10x \\
 & - \quad + \quad + \\
\hline
 & -16x^2 + 7x + 16 \\
 & -16x^2 + 4x + 20 \\
 & + \quad - \quad - \\
\hline
 & 3x - 4
\end{array}
$$

भागफल = ☐ एवं शेषफल = ☐

हरे कार्ड का भाजक और शेषफल निकालें

बनाकर देखें— 4.2

1. दो संख्याओं का गुणफल $3x^2 + 8x + 4$ एवं एक संख्या $3x + 2$ होने से दूसरी संख्या निकालें।

2. एक आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $(24x^2 - 65xy + 21y^2)$ वर्ग से० मी० एवं लम्बाई $(8x - 3y)$ से० मी० होने से उसकी चौड़ाई कितनी होगी निकालकर देखें।

3. एक भाग के गणित में भाज्य $x^4 + x^3y + xy^3 - y^4$ एवं भाजक $x^2 + xy - y^2$; भागफल एवं शेषफल ज्ञात करें।

4. भाग करें —

   a) $(m^2 + 4m - 21)$ को $(m - 3)$ से।

   b) $(6c^2 - 7c + 2)$ को $(3c - 2)$ से।

   c) $(2a^4 - a^3 - 2a^2 + 5a - 1)$ को $(2a^2 + a - 3)$ से।

   d) $(m^4 - 2m^3 - 7m^2 + 8m + 12)$ को $(m^2 - m - 6)$ से।

5. a) $(6x^2a^3 - 4x^3a^2 + 8x^4a^2) \div 2a^2x^2$

   b) $\dfrac{2y^9x^5}{5x^2} \times \dfrac{125\,xy^5}{16\,x^4y^{10}}$

   c) $\dfrac{7a^4y^2}{9a^2} \times \dfrac{729\,a^6}{42\,y^6}$

   d) $(p^2q^2r^5 - p^3q^5r^2 + p^5q^3r^2) \div p^2q^2r^2$

6. किसी भाग के प्रश्न में भाजक $(x - 4)$, भागफल $(x^2 + 4x + 4)$ एवं भागशेष 3 होने से भाज्य ज्ञात करें।
   [भाज्य = भाजक × ☐ + शेषफल]

7. किसी भाग के प्रश्न में भाजक $(a^2 + 2a - 1)$, भागफल $5a - 14$ एवं शेषफल $35a - 17$ होने से भाज्य कितना होगा करके देखें।

8. भाग करके भागफल और शेषफल लिखें।

   i) $(x^2 + 11x + 27) \div (x + 6)$

   ii) $(81x^4 + 2) \div (3x - 1)$

   iii) $(63x^2 - 19x - 20) \div (9x^2 + 5)$

   iv) $(x^3 - x^2 - 8x - 13) \div (x^2 + 3x + 3)$

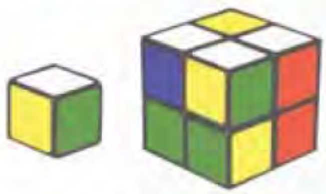
5. घनफल निर्णय

आज सुहाना और फिरोज पिचबोर्ड के छोटे-छोटे अनेक रंगीन बक्से से तैयार किये हैं।

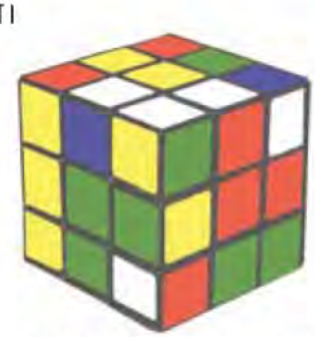
मापकर देखते है, इस पिचबोर्ड की लम्बाई 1 से०मी०, चौड़ाई 1 से०मी०एवं ऊँचाई 1 से०मी० है। अर्थात् यह एक घनाकार बक्सा हैं।

इस घनाकार बक्सा के प्रत्येक भुजा की लम्बाई ☐ से०मी०।

लेकिन यदि मैं इनके द्वारा 2 से०मी० लम्बाई का घनाकार बक्सा तैयार करना चाहे तो ऐसे कितने बक्सा लगेंगे देखें।



देखते हैं, **8** बक्सा लगेगा।



लेकिन 3 से०मी० लम्बाई वाली भुजा के घनाकार बक्सा को तैयार करने में ☐ बक्सा लगेंगे।

इस 1, 8, 27, ... संख्याओ को क्या कहेंगे?

1, 8, 27, ... इन संख्याओं को पूर्ण घनसंख्या कहते हैं। क्योंकि $1 = (1)^3$, $8 = (2)^3$, $27 = \square^3$, $8 = \boxed{2}^3$, $64 = \square^3$, $125 = \square^3$, ...

अर्थात्, 1, 2, 3, 4, 5, ... इस संख्याओं का घन क्रमशः 1, 8, 27, 64, 125, ...

स्वयं करो

मैंने स्वयं बहुत से घन तैयार किया, जिनकी भुजाओं की लम्बाई 1 से०मी० है। **8** और **27** इसी प्रकार के एक ही माप के घनक को जोड़कर बड़े घन तैयार करके घन संख्या $8=2^3$ और $27=3^3$ जाँच करें।

लेकिन फिरोज अपने 1 से०मी० लम्बाई के 12 घनाकर बक्से को लेकर एक आयताकार घन तैयार किया जिसकी लम्बाई 3 से०मी०, चौड़ाई 2 से०मी० एवं ऊँचाई 2 से०मी० अर्थात् प्रत्येक भुजा की लम्बाई बराबर नहीं है। $\therefore$ 12 पूर्ण घन संख्या नहीं हैं।

दूसरे रुप में देखें, $12 = 2\times2\times3$

$\therefore$ 12 को किसी घन संख्या के रुप में नहीं व्यक्त कर सकते।

इसलिए $12 \neq$ (कोई पूर्ण संख्या)^3

$\therefore$ 12 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।।

मैंने 32 एक ही आकार के छोटे घनाकार को लेकर एक बड़ा घन तैयार करने की चेष्टा किया :

$32 = 2\times2\times2\times2\times2$

$= (2\times2)\times(2\times2)\times2$

$= 4\times4\times2$ अर्थात् $32 \neq$ (कोई पूर्ण संख्या)^3

देखते है, 32 छोटे घनों को लेकर बड़ा कोई घन नहीं तैयार कर सकते हैं।

लेकिन $32\times2 = 64$ छोटे घन को लेकर बड़ा घन तैयार कर सकते हैं।

जैसा कि 64 एक पूर्ण घन संख्या।

अर्थात्, 32 एक पूर्ण घन संख्या नहीं हैं लेकिन 32 का सबसे छोटी धनात्मक संख्या 2 से गुणा करने से एक पूर्ण घन संख्या पायेंगे क्योंकि $64 = \square^3$

ताताई 54 उसी बराबर माप के घन को लेकर एक बड़ा घन तैयार कर सकता है कि नहीं हिसाब करें।

$54 = 2\times3\times3\times3$

देखते है, 54 एक $\square$ (पूर्ण घन संख्या/पूर्ण घन संख्या नहीं)

$\therefore$ 54 को छोटी धनात्मक संख्या $\square$ से भाग करने से पूर्ण घन संख्या पायेंगे । अत:, $54 \div 2 = 27$ एक $\square$ संख्या। कारण $27 = \square^3$

स्वयं करें - 5.1

1) नीचे की संख्याओं में कौन पूर्ण घन संख्या है खोजकर लिखे।

125, 500, 64, 7^3, 729, 968

आप लोग 1 से 20 तक संख्याओं का घन बनाकर नीचे की तालिका में लिखें।

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	......
पूर्ण घन संख्या	1	8	$\square$	64	$\square$				729	1000		1728				......

ऊपर की तालिका से देखे है, $7 = 1^3 + 2^3$, $\square = 4^3 + 6^3$, $\square = \square^3 + \square^3$ (स्वयं: 2 तैयार करें)

1729 को दो घन संख्याओं के योग के रुप में व्यक्त किया जाय। लेकिन 1729 को एक विशेष संख्या कहा जाता है क्यों देखें।

1729 संख्या को हार्डी-रामानुजन संख्या कहा जाता हैं।

एक बार विख्यात गणितज्ञ जी एच हार्डी भारत के विख्यात गणितज्ञ रामानुजन से मिलने गये थे। वो जिस टैक्सी पर बैठकर गये थे उसका नम्बर था1729; गणितज्ञ हार्डी के लिए 1729 एक साधारण संख्या थी।
लेकिन रामानुजन ने सुनते ही तुरन्त कहा 1729 एक विशेष संख्या है।

क्योंकि यह सबसे छोटी संख्या है जिसे दो प्रकार से दो घन के योग के रुप में व्यक्त कर सकते हैं।

$$1729 = 12^3 + 1^3$$
$$1729 = 10^3 + 9^3$$

इसके बाद बहुत सी संख्या यें है जिन्हे दो प्रकार से दो घनो के समष्टि के रुप में व्यक्त कर सकते है। लेकिन 1729 सभी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो प्रकार से दो संख्याओं के घन के समष्टि के रुप में व्यक्त कर सकते है।

इन छोटे-छोटे घनो को जोड़कर फिरोज ने बहुत से बड़े घन तैयार किया।
मैं और सुहाना इन बड़े घनों के प्रत्येक किनारे की लम्बाई मापते हैं।

इन बड़े घन में 27 छोटे घन हैं।
पास के चित्र में देखते हैं बड़े घन की प्रत्येक भुजा की लम्बाई □ से०मी०।

मै दूसरे प्रकार से पाया, $27 = \square^3$

यहां 3 को 27 का क्या कहा जाता हैं?

3 को **घन** करके 27 पाते हैं। अत: 27 का **घनमूल** है 3

इसे $\sqrt[3]{27}$ या $27^{\frac{1}{3}}$ लिखा जाता है।

$\therefore 3^3 = 27$ एवं $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

1 मैं 8, 64, 125, 729 का घनमूल खोजूँ

1) $8 = 2\times2\times2 = 2^3$
$\therefore \sqrt[3]{8} = 2$

2) $64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2$
$= 2^3 \times 2^3$
$\therefore \sqrt[3]{64} = 2 \times 2 = 4$

3) $125 = \square \times \square \times \square = \square^3$
$\therefore \sqrt[3]{125} = \square$

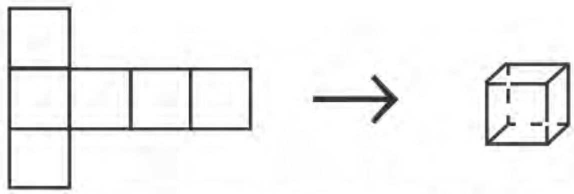
4) 729 □ (स्वयं मौलिक संख्या द्वारा उत्पादक विश्लेषण करें)

$= \square^3 \times \square^3$

$\therefore \sqrt[3]{729} = \square \times \square = \square$

बनाकर देखें— 5.1

1. दो घन तैयार करें जिसकी एक भुजा की लम्बाई क्रमश: 5 से॰मी॰ और 1 से॰मी॰।



कितने 1 से॰मी॰ लम्बाई के घनों को जोड़कर इस बड़े घन को बना सकते है हिसाब करें।

2. सुमन्त बहुत से 1 से॰मी॰ लम्बाई वाली भुजा का घन तैयार किया है। मनामी उन घनो को जोड़कर बड़ा घन बनाने का प्रयास करती है।हिसाब करके देखे मनामी नीचे लिखे किन-किन क्षेत्रों में बड़े घन तैयार कर सकती है।

   (i) 100 (ii) 1000 (iii) 1331 (iv) 1210 (v) 3375 (vi) 2700

3. नीचे की संख्याओ में कौन सी पूर्ण घन संख्या नहीं है लिखे।

   (i) 216 (ii) 343 (iii) 1024 (iv) 324 (v) 1744 (vi) 1372

4. देवनाथ एक आयताकार घन तैयार किया है, जिसकी लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 4 से॰मी॰, 3 से॰मी॰, और 3 से॰मी॰ है। हिसाब करके देखे कितने **आयताकार घनो** को जोड़कर देवनाथ घन बना सकता है।

5. नीचे की संख्याओं को किस क्षुद्रतम घनात्मक संख्या से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण घन संख्या होगा हिसाब करके देखें।

   (i) 675 (ii) 200 (iii) 108 (iv) 121 (v) 1225

6. नीचे की संख्याओं को सबसे छोटी किस घनात्मक संख्या से भाग करने पर पूर्ण घन संख्या होगा हिसाब करके लिखें।

   (i) 7000 (ii) 2662 (iii) 4394 (iv) 6750 (v) 675

7. नीचे की पूर्ण घन संख्याओं का उत्पादक विश्लेषण करें और घन मूल लिखे।

   (i) 512 (ii) 1728 (iii) 5832 (iv) 15625 (v) 10648

आज तितली और सैकत ने बहुत से रंगीन छोटे बड़े पिचबोर्ड के घन तैयार किया। हम इन घनों की एक भुजा की लम्बाई लिखेंगे। घन कितनी जगह को घेरे हुई हैं राबया हिसाब करके लिखेगी। अर्थात् घनों का आयतन हिसाब करके लिखेगी।

हरे रंग के इस घनाकार बॉक्स की एक भुजा की लम्बाई 4 से०मी०। $\therefore$ आयतन = (4 से०मी०)^3

= 4^3 घन से०मी० = 64 घन से०मी०।

मापकर देखते हैं इस घनाकार बॉक्स की एक भुजा की लम्बाई 12 से०मी०।

$\therefore$ आयतन = $\boxed{}^3$घन से०मी० = $\boxed{}$ घन से०मी०।

यदि घनाकार बॉक्स की एक भुजा की लम्बाई x से०मी० है तो,

आयतन होगा = (x सेमी०)^3 = x^3 घन सेमी०

घनाकार बॉक्स की एक भुजा की लम्बाई (x + 2) से०मी० होने से,

बॉक्स का आयतन = $(x + 2)^3$ घन से०मी०

$(x + 2)^3$ को हल कर क्या पाते है देखे।

$(x + 2)^3 = (x + 2) \times (x + 2)^2$

$= (x + 2)\{x^2 + 4x + 4\}$ [$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ सूत्र की सहायता से पाया]

$= (x + 2)x^2 + (x + 2)4x + (x + 2)4$ [विच्छेद नियम द्वारा पाया]

$= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$ [$\boxed{}$ नियम की सहायता से पाया]

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

इस घनाकार बॉक्स की एक भुजा की लम्बाई तितली (a + b) से०मी० लिखी

$\therefore$ इस घनाकार का आयतन $(a + b)^3$ घन से०मी०

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$

$= (a + b) \times \boxed{}$

$= (a + b) \times a^2 + (a + b)2ab + (a + b)b^2$ [विच्छेद नियम द्वारा]

$= a^3 + b^2a + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$ [विच्छेद नियम द्वारा]

$= a^3 + ab^2 + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$ [$b^2a = ab^2$ गुणा विनिमय का नियम]

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

पाया $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (I)

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

विनिमय और विच्छेद के नियम से पाया $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ (II)

मैंने $(a + b) \times (a + b) \times (a + b)$ को ऊपर नीचे लिखकर एक के बाद एक गुणा करके देखी (स्वयं प्रयास करें)

सैकत एक घनाकार बॉक्स की एक भुजा की लम्बाई लिखा $(2x + 7)$ से०मी०।

मैंने गुणा न करके सूत्र की सहायता से $(2x + 7)^3$ का विस्तार करुँ

$(2x + 7)^3 = (2x)^3 + 3\,(2x)^2 \times 7 + 3 \times 2x \times (7)^2 + (7)^3$ (यहां $a = 2x$ और $b = 7$ बैठाया)

$= 8x^3 + 3 \times 4x^2 \times 7 + 3 \times 2x \times 49 + 343$

$= 8x^3 + 84x^2 + 294x + 343$

2 हम I न० सूत्र की सहायता से बीजगणितीय और राशियों का घन निर्णय करें—

i) $3x + 2$ ii) $2y + 3$ iii) $x^2 + 2$ iv) $x + y + z$

I न० सूत्र की सहायता से

i) $(3x + 2)^3$ का विस्तार करे

$(3x + 2)^3 = (3x)^3 + 3 \times (3x)^2 \times 2 + 3 \times (3x) \times (2)^2 + (2)^3$ (यहां $a = 3x,\ b = 2$ लेकर पाती हैं)

$= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

I न० सूत्र की सहायता से

ii) $(2y + 3)^3$ का विस्तार करे

$(2y + 3)^3 = \square$ यहां $a = \square,\ b = \square$ (स्वयं करें)

iii) I न० सूत्र की सहायता से $(x^2 + 2)^3$ का विस्तार करे (स्वयं करें)

iv) I न० सूत्र की सहायता से $(x + y + z)^3$ का विस्तार करे

$(x + y + z)^3 = \{x + (y + z)\}^3$

$= x^3 + 3x^2\,(y + z) + 3x\,(y + z)^2 + (y + z)^3$ [$a = x,\ b = y + z$ बैठाया]

$= x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3x\,(y^2 + z^2 + 2yz) + (y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3)$

$= x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 + 6xyz + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$

$= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3xz^2 + 3x^2z + 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz$

3 हम I न० सूत्र की सहायता से

i) $(11)^3$ ii) $(15)^3$ iii) $(101)^3$ iv) $(210)^3$ का मान खोजें

i) $(11)^3$

$= (10 + 1)^3$

$= (10)^3 + 3 \times (10)^2 \times 1 + 3 \times 10 \times (1)^2 + (1)^3$

$= 1000 + 300 + 30 + 1$

$= 1331$

ii) $(15)^3$

$= (\square + \boxed{5})^3$

$= \square$

[स्वयं करें]

iii) $(101)^3$

$= (\square + \boxed{1})^3$

$= \square$

[स्वयं करें]

iv) $(210)^3$

$= (200 + \square)^3$

$= \square$

[स्वयं करें]

नासिम इस घनाकार घन की भुजा की लम्बाई लिखा $(x-3)$ से०मी०
इस घन का आयतन $(x-3)^3$ घन से०मी०

$(x-3)^3 = [x+(-3)]^3$
$= x^3 + 3(x)^2(-3) + 3x(-3)^2 + (-3)^3$ [I न० सूत्र $a = x$ और $b = -3$ बैठाकर पाया]
$= x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

घनाकार की एक भुजा की लम्बाई = $(a-b)$ से०मी० होने से पाया, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
घनक की आयतन = $(a-b)^3$ घन से०मी० होगा। $= a^3 - 3ab(a-b) - b^3$
$(a-b)^3$ का विस्तार करके क्या पाते है देखें $= a^3 - b^3 - 3ab(a+b)$
$(a-b)^3 = \{a + (-b)\}^3$ $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \text{ — IV}}$
$= a^3 + 3(a^2)(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$
$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^3b + 3ab^2 - b^3 \text{ — III}}$

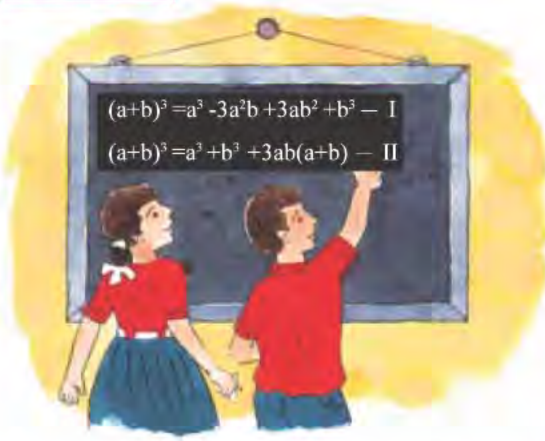
हम 3 न० सूत्र की सहायता से i) $(2-x)^3$ ii) $(2x - \frac{1}{3y})^3$ iii) $(a-b-c)^3$ का विस्तार करें एवं iv) $(99)^3$ का मान कितना देखें।

i) $(2-x)3$
$= (2)^3 - 3(2)^2 x + 3 \times 2x^2 - x^3$
$= 8 - 12x + 6x^2 - x^3$

ii) $(2x - \frac{1}{3y})^3$
$= (2x)^3 - 3(2x)^2(\frac{1}{3y}) + 3 \times 2x(\frac{1}{3y})^2 - (\frac{1}{3y})^3$
$= 8x^3 - \frac{4x^2}{y} + \frac{2x}{3y^2} - \frac{1}{27y^3}$

iii) $(a-b-c)^3$
$= [a-(b+c)]^3$
$= a^3 - 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 - (b+c)^3$
$= a^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3a(b^2+2bc+c^2) - (b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)$
$= a^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 - b^3 - 3b^2c - 3bc^2 - c^3$
$= a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c - 3bc^2 - 3a^2c + 3ac^2 + 6abc$

iv) $(99)^3$
$= (100-1)^3$
$= (100)^3 - 3(100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 - (1)^3$
= ______ (स्वयं करें)



आज सिमरन और सजल ने निश्चित किया कि उनके द्वारा ऊपर जाने गये सूत्रों को बोर्ड पर लिखकर इनकी सहायता से आसानी से कुछ मान खोजने की चेष्टा करेंगे।

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (I)

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$ (II)

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (III)

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)$ (IV)

4 हम लोग उपर्युक्त सूत्रों की सहायता से इस संख्या राशियों का मान खोजें।

$5.73 \times 5.73 \times 5.73 - 3 \times 5.73 \times 5.73 \times 3.73 + 3 \times 5.73 \times 3.73 \times 3.73 - 3.73 \times 3.73 \times 3.73$

$= (5.73)^3 - 3 \times (5.73)^2 \times 3.73 + 3 \times 5.73 \times (3.73)^2 - (3.73)^3$

$= (5.73 - 3.73)^3$ [III न॰ सूत्र से पाते है।]

$= 2^3 = 8$

5 सरल करें : $(a-2b+c)^3 - (a-2b)^3 - 3c\,(a-2b+c)\,(a-2b)$

$= (a-2b+c)^3 - (a-2b)^3 - 3c\,(a-2b+c)\,(a-2b)$

$= x^3 - y^3 - 3xy\,(x-y)$

$= (x-y)^3$

$= c^3 \quad [\because x - y = c]$

माना, $x = a-2b+c$ और $y = a-2b$

$x-y = (a-2ab+c) - (a-2b)$

$= a - 2b + c - a + 2b$

$= c$

6 $3x + \frac{3}{x} = 2$ होने से $x^3 + \frac{1}{x^3} + 2$ का मान लिखे।

$3x + \frac{3}{x} = 2$

या, $3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$ (विच्छेद नियम)

या, $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{3}$

या, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ (दोनों पक्ष का घन करने पर)

या, $x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{8}{27}$ (☐ न॰ सूत्र से पाया)

या, $x^3 + \frac{1}{x^3} + \cancel{3} \times \frac{2}{\cancel{3}} = \frac{8}{27}$

$\therefore \quad x^3 + \frac{1}{x^3} + 2 = \frac{8}{27}$

7 $(2p - 3q) = 10$ एवं $(8p^3 - 27q^3) = 100$ होने से pq का मान ज्ञात करें।

$(2p - 3q) = 10$

या, $(2p - 3q)^3 = (10)^3$

या, $(2p)^3 - (3q)^3 - 3 \times 2p \times 3q\,(2p - 3q) = 1000$

या, $8p^3 - 27q^3 - 18pq \times 10 = 1000$

या, $-180\,pq = 1000 - 100$

या, $-180\,pq = 900$

या, $pq = -\frac{900}{180}$

$\therefore$ $pq = -5$

8 $x - \frac{1}{9x} = 1$ होने से $27x^3 - \frac{1}{27x^3}$ का मान क्या होगा लिखें।

$x - \frac{1}{9x} = 1$

या, $3(x - \frac{1}{9x}) = 1 \times 3$ [दोनो तरफ 3 से गुणा करने पर]

या, $3x - \frac{1}{3x} = 3$

या, $(3x - \frac{1}{3x})^3 = 3$ [दोनो पक्षों का घन करने पर]

या, $27x^3 - \frac{1}{27x^3} - 3 \times 3x \times \frac{1}{3x}\ (3x - \frac{1}{3x}) = 27$

या, $27x^3 - \frac{1}{27x^3} - 3 \times 3 = 27$

$\therefore$ $27x^3 - \frac{1}{27x^3} = \square$

बनाकर देखे — 5.2

1.

घन की भुजा की लम्बाई (इकाई)	घन का आयतन (घन इकाई)
(i) $p^2 + q^2$	
(ii) $\frac{x}{3} + \frac{4}{y}$	
(iii) $x^2y - z^2$	
(iv) $1 + b - 2c$	
(v)	$(2.89)^3 + (2.11)^3 + 15 \times 2.89 \times 2.11$
(vi)	$(2m+3n)^3 + (2m - 3n)^3 + 12m\,(4m^2 - 9n^2)$
(vii)	$(a+b)^3 - (a - b)^3 - 6b\,(a^2 - b^2)$
(viii) $2x - 3y - 4z$	
(ix)	$x^6 - 15x^4 + 27x^2 - 125$
(x)	$1000 + 30x\,(10+x) + x^3$

2. I से IV न० सूत्रों की सहायता से नीचे के प्रश्नों का समाधान करें।

(a) $x - y = 2$ होने से $x^3 - y^3 - 6xy$ का मान निर्णय करें।

(b) $a + b = -\frac{1}{3}$ होने से सिद्व करने की चेष्टा करे $a^3 + b^3 - ab = -\frac{1}{27}$

(c) $x+y = 2$ एवं $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ होने से $x^3 + y^3$ का मान हिसाब करके लिखें।

(d) $\frac{x^2 - 1}{x} = 2$ होने से $\frac{x^6 - 1}{x^3}$ का मान ज्ञात करें।

(e) $x + \frac{1}{x} = 5$ होने से $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात करे।

(f) $x = y + z$ होने से $x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz$ का मान ज्ञात करे।

(g) $xy\,(x + y) = m$ होने से $x^3 + y^3 + 3m = \frac{m^3}{x^3y^3}$ प्रमाणित करें।

(h) $2x + \frac{1}{3x} = 4$ होने से सिद्व करें कि $27x^3 + \frac{1}{8x^3} = 189$

(i) $2a - \frac{2}{a} + 1 = 0$ होने से $a^3 - \frac{1}{a^3} + 2$ का मान ज्ञात करें।

(j) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ होने से $(a + b + c)$ का मान ज्ञात करें $(a \neq b \neq c)$।

(k) यदि $m+n = 5$ एवं $mn = 6$ होता है तो $(m^2 + n^2)\,(m^3 + n^3)$ का मान ज्ञात करें।

देवकुमार ने आज एक आनन्ददायक कार्य किया है। वह टीफीन के समय हमारी कक्षा के ब्लैकबोर्ड पर दो घन लिखा। माम्पी ने तय किया कि उन दोनों घनों को गणितीय राशि के रूप में लिखूँगी।

माम्पी लिखी ⟶ $a^3 + b^3$ $a^3 - b^3$

इस बादामी रंग के घर में लिखा है $a^3 + b^3$ ।

बीजगणितीय राशि $(a^3 + b^3)$ को दो राशियों के गुणनफल रूप में व्यक्त करने की चेष्टा करें। अर्थात् $(a^3 + b^3)$ का उत्पादक ज्ञात करे।

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

या, $a^3+b^3+3ab(a+b) = (a+b)^3$

या, $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

या, $a^3+b^3 = (a+b)\{(a+b)^2 - 3ab\}$

या, $a^3+b^3 = (a+b)\{a^2+2ab+b^2 - 3ab\}$

$\therefore$ $a^3+b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

पाया, $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

मैंनें समझा कि $a^3 + b^3$ का उत्पादक विश्लेषण करने से एक-एक बीजगणितीय उत्पादक $(a+b)$ होगा और दूसरा $a^2 - ab + b^2$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ — — — — — V

9 V न० सूत्र की सहायता से उत्पादक विश्लेषण करें :

$8x^3 + 729y^3 = (2x)^3 + (9y)^3$

$= (2x+9y)\{(2x)^2 - 2x \times 9y + (9y)^2\}$ (V सूत्र की सहायता से)-

$= (2x+9y)(4x^2 - 18xy + 81y^2)$

10 V न० सूत्र की सहायता से गुणनफल निर्णय करें :

(i) $(7+3x)(49 - 21x + 9x^2)$

$= (7+3x)\{(7)^2 - 7\times 3x + (3x)^2\}$

$= (7)^3 + (3x)^3 = \square + 27x^3$

(ii) $(x^2+y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

$= (x^2+y^2)\{\square^2 - x^2y^2 + \square^2\}$

$= (x^2)^3 + (y^2)^3$ [(v) न० सूत्र द्वारा]

$= x^6 + y^6$

(iii) $(2a+3)\{(a+2)^2-(a+2)(a+1)+(a+1)^2\}$
$= \{(a+2)+(a+1)\}\{(a+2)^2-(a+2)(a+1)+(a+1)^2\}$
$= (a+2)^3+(a+1)^3$ [(v) न० सूत्र द्वारा]
$= a^3+3\times a^2\times 2+3a\times 2^2+(2)^3+a^3+3a^2\times 1+3a+1$
$= a^3+6a^2+12a+8+a^3+3a^2+3a+1$
$= 2a^3+9a^2+15a+9$

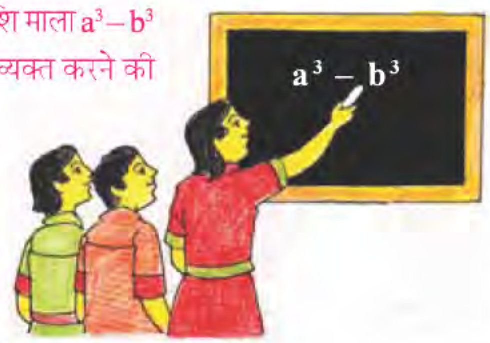
11 हम (v) न० सूत्र की सहायता से निम्नलिखित बीजगणितीय राशियों का उत्पादक विश्लेषण करें।
(i) x^3+125 (ii) p^3q^3+1 (iii) $(a-b)^3x^3+216$
(iv) $8y^3+125z^3$ [स्वयं करें] (v) $a^3b^3+c^3d^3$ [स्वयं करें]

(i) x^3+125
$=(x)^3+(5)^3$
$=(x+5)(x^2-5x+25)$
[(v) न० सूत्र द्वारा]

(i) p^3q^3+1
$=(pq)^3+(1)^3$
$= \square \times \square$
[(v) न० सूत्र द्वारा]

(iii) $(a-b)^3x^3+216$
$= \{(a-b)x\}^3+(6)^3$
$= \{(a-b)x+6\}[\{(a-b)x\}^2-(a-b)x\times 6+(6)^2]$ [(v) न० सूत्र द्वारा]
$= (ax-bx+6)[(a-b)^2x^2-6x(a-b)+36]$
$= (ax-by+6)[a^2x^2-2abx^2+b^2x^2-6ax+6bx+36]$

हमारी कक्षा के ब्लैक बोर्ड पर आकाशी रंग की बीजगणितीय राशि माला a^3-b^3 लिखा। अत: a^3-b^3 को दो राशियों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने की चेष्टा करें।



$(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$
या, $a^3-b^3-3ab(a-b) = (a-b)^3$
या, $a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$
या, $a^3-b^3 = (a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$
या, $a^3-b^3 = (a-b)\{a^2-2ab+b^2+3ab\}$
$\therefore\ a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

पाया, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ — — — (VI)

12 $(27a^3-64)$ का (VI) न० सूत्र की सहायता से उत्पादक ज्ञात करें :
$(27a^3-64) = (3a)^3-(4)^3$
$=(3a-4)\{(3a)^2+3a\times 4+(4)^2\}$ [(VI) न० सूत्र द्वारा]
$=(3a-4)(9a^2+12a+16)$

13 हम (VI) न० सूत्र की सहायता से बीजगणितीय राशियों का गुणनफल ज्ञात करें।

(i) $(p - 2q)(p^2 + 2pq + 4q^2)$
$= (p - 2q)\{p^2 + p \times 2q + (2q)^2\}$
$= (p)^3 - (2q)^3$ [(VI) न० सूत्र द्वारा]
$= (p)^3 - 8q^3$

(ii) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$
$= (x^2 - 1)\{(x^2)^2 + x^2 \times 1 + 1^2\}$
$= \Box^3 - (1)^3$ [(VI) न० सूत्र द्वारा]
$= x^{\Box} - 1$

(iii) $2x\{(4x - 3)^2 + (4x - 3)(2x - 3) + (2x - 3)^2\}$
$= \{(4x - 3) - (2x - 3)\}\{(4x - 3)^2 + (4x - 3)(2x - 3) + (2x - 3)^2\}$
[फलत: $(4x - 3) - (2x - 3)\} = 4x - 3 - 2x + 3 = \Box$]
धरि $4x - 3 = a$ एवं $2x - 3 = b$
$= (a - b)\{a^2 + ab + b^2\}$
$= a^3 - b^3$ [(VI) न० सूत्र द्वारा]
$= (4x - 3)^3 - (2x - 3)^3$ [$a = 4x - 3$ एवं $b = 2x - 3$ लिखकर पाया]
$= \{(4x)^3 - 3.(4x)^2 \times 3 + 3.4x.3^2 - (3)^3\} - \{(2x)^3 - 3(2x)^2\, 3 + 3 \times 2x \times 3^2 - 3^3\}$
$= 64x^3 - 144x^2 + 108x - 27 - \{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27\}$
$= 56x^3 - 108x^2 + 54x$

14 हम (VI) न० सूत्र की सहायता से नीचे के बीजगणितीय राशियों का उत्पादक ज्ञात करे।

(i) $\frac{a^3}{p^3} - c^3$
$= (\frac{a}{p})^3 - c^3$
$= (\frac{a}{p} - c)\{(\frac{a}{p})^2 + \frac{a}{p} \times c + c^2\}$
$= (\frac{a}{p} - c)\{\frac{a^2}{p^2} + \frac{ac}{p} + c^2\}$

(ii) $64\,l^3 - 343$
$= \Box^3 - \Box^3$
$= \Box \times \Box$

(iii) $(x + 2)^3 - (x - 2)^3$
$= \{(x + 2) - (x - 2)\}\{(x + 2)^2 + (x + 2)(x - 2) + (x - 2)^2\}$
$= (x + 2 - x + 2)\{x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4 + x^2 - 4x + 4\}$
$= 4 \times \Box$

15 हम (VI) न० सूत्र की सहायता से नीचे के बीजगणितीय राशियों का उत्पादक ज्ञात करें।

(i) $8m^3 + 12m^2n + 6mn^2 + 2n^3$
$= (2m)^3 + 3(2m)^2 n + 3.2mn^2 + n^3 + n^3$
$= (2m + n)^3 + n^3$
$= \Box \times \Box$

(ii) $a^3 - 9b^3 + (a + b)^3$
$= a^3 - b^3 - 8b^3 + (a + b)^3$
$= a^3 - b^3 + (a+b)^3 - (2b)^3$
$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a + b - 2b) \times \{(a+b)^2 - 2b(a+b) + 4b^2\}$
$= (a-b)\{a^2 + ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 - 2ab - 2b^2 + 4b^2\}$
$= (a - b) \times \Box$

बनाकर देखे — 5.3

1. खाली स्थानों में समझकर लिखे :

प्रथम बीजगणितीय संख्या	द्वितीय बीजगणितीय संख्या	$a^3 + b^3 = \square \times \square$ $a^3 - b^3 = \square \times \square$ सूत्र की सहायता से प्रथम और द्वितीय का गुणनफल
(i) $x + 9$	$x^2 - 9x + 81$	
(ii) $2a - 1$		$8a^3 - 1$ $= (2a)^3 - (1)$ $= (2a-1)\{(2a)^2 + 2a\times1 + (1)^2\}$ $= (2a-1)(4a^2 + 2a + 1)$
(iii) $3 - 5c$		$27 - 125c^3$
(iv) $(a + b + c)$	$(a+b)^2 - (a+b)c + c^2$	
(v) $3x$	$(2x-1)^2 - (2x-1)(x+1) + (x+1)^2$	
(vi) $\frac{x}{y} + 1$	$\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1$	
(vii) $4a - 5b$	$64a^2 + 20ab + 25b^2$	
(viii)	$a^2b^2 + abcd + c^2d^2$	$a^3b^3 - c^3d^3$
(ix) $1 - 4y$		$1 - 64y^3$
(x) $(2p + 1)$		$8(p-3)^3 + 343$
(xi) $(m - p)$	$(m+n)^2 + (m+n)(n+p) + (n+p)^2$	
(xii) $(3a-2b)^2 + (3a-2b) \times (2a-3b) + (2a-3b)^2$	$(a + b)$	

2. सरल करे : [सूत्र की सहायता से]

(i) $(a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

(ii) $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)(a^3 + 8b^3)$

(iii) $(4a^2 - 9)(4a^2 - 6a + 9)(4a^2 + 6a + 9)$

(iv) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) + (y - z)(y^2 + yz + z^2) + (z - x)(z^2 + zx + x^2)$

(v) $(x + 1)(x^2 - x + 1) + (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

3. $x + \frac{1}{x} = -1$ होने से $(x^3 - 1)$ का मान ज्ञात करें।

$x + \frac{1}{x} = -1$

या, $(x + \frac{1}{x})x = -1\ (x)$

या, $x^2 + 1 = -x$

या, $x^2 + x + 1 = 0$ [पक्षान्तर से पाया]

$x^3 - 1$

$= (x - 1) \times \square$ [सूत्र की सहायता से]

$= (x - 1) \times 0 = 0$

4. $a + \frac{9}{a} = 3$ होने से (a^3+27) का मान ज्ञात करें।

5. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$ होने से (a^3+b^3) का मान ज्ञात करें।

6. नीचे की बीजगणितीय राशियों का उत्पादक विश्लेषण करें।

(i) $1000a^3+27b^6$

(ii) $1-216z^3$

(iii) m^4-m

(iv) $192a^3+3$

(v) $16a^4x^3+54ay^3$

(vi) $729a^3b^3c^3-125$

(vii) $\frac{27}{a^3} - \frac{1}{27b^3}$

(viii) $\frac{x^3}{64} - \frac{64}{x^3}$

(ix) $x^3 + 3x^2y+3xy^2+2y^3$

(x) $1+9x+27x^2+28x^3$

(xi) $x^3 - 9y^3 - 3xy\ (x - y)$

(xii) $8 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$

(xiii) $x^6 + 3x^4b^2 + 3x^2b^4 + b^6 + a^3b^3$

(xiv) $x^6 + 27$

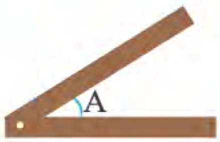
(xv) $x^6 - y^6$

(xvi) $x^{12} - y^{12}$

(xvii) $m^3 - n^3 - m\ (m^2 - n^2) + n(m - n)^2$

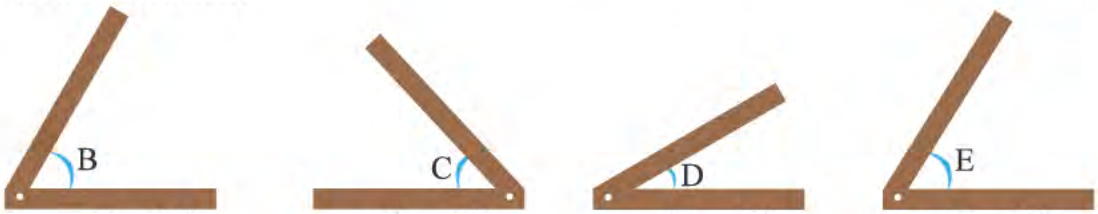
6. पूरक कोण, सम्पूरक कोण और संलग्न कोण

आज घर में रमेन चाचा आकर काठ का काम किया। मैं और मेरा भाई कुछ पतला काठ लेकर एक ही माप की काठी तैयार किया। भाई काठो का एक सिरा काटियों से जोड़कर पाया —



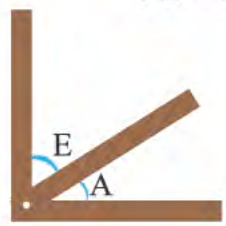
उसे कापी पर बैठाकर चाँद से मापने पर देखते है $\angle A = 32^0$

मै और मेरा मित्र शिउली तथा तपन दो काठो को जोड़कर बहुत से कोण तैयार किया। कोणों को कापी पर बैठाकर चाँद से मापने पर पाया उसे लिखा।



$\angle B = 60^0$ $\angle C = 47^0$ $\angle D = 30^0$ $\angle E = 58^0$

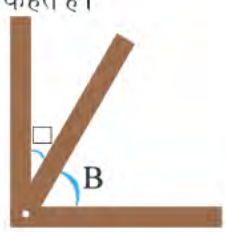
पास के चित्र की तरह शिउली ने एक आनन्दप्रद कार्य किया।



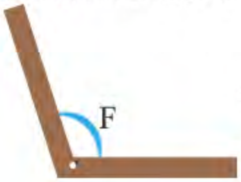
वह $\angle A$ और $\angle E$ पास के चित्र की तरह बैठाकर नया कोण तैयार की।

देखते है $\angle A$ एवं $\angle E$ मिलाकर 90^0 या समकोण पाते है। इस प्रकार दो कोणो को क्या कहेंगे?

ऐसे दो कोण जिनका योग 90^0 होता है उनमे एक को दूसरे का पूरक कोण कहते है।
यहाँ $\angle A$ का पूरक कोण $\angle E$ है और $\angle E$ का पूरक कोण $\angle A$

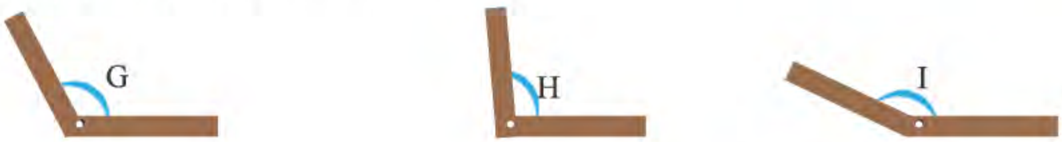


मैं $\angle B$ का पूरक कोण ☐ [$\angle C$/$\angle D$] पाया।
मैं स्वयं $\angle C$ के पूरक कोण का मान लिखा और चाँद की सहायता से बनाया **(स्वयं करें)**
भाई ने निश्चय किया उन काठों से अधिक कोण बनायेंगे। भाई ने किया।—



कोण को कॉपी पर बनाकर चाँद से मापने पर देखते है, $\angle F = 108^0$

हम भी बहुत से अधिक कोण बनाये—



चाँद से मापकर देखते है, $\angle G = 118^0$, $\angle H = 95^0$ और $\angle I = 155^0$
मेरी बहन ने न्यून कोण बनाया।

चाँद से मापकर देखा, $\angle J = 85^0$, $\angle K = 72^0$ और $\angle L = 25^0$

शिउली पुन: $\angle F$ के साथ $\angle K$, $\angle G$ और $\angle L$ नीचे के चित्र की तरह बैठाया तो क्या पाया देखें।

देखते है $\angle F + \angle K = 180^0$ या 2 समकोण पाते हैं। लेकिन $\angle G + \angle L = 180^0$ या 2 समकोण नहीं होते । ऐसे दो कोण जिसका योग 180^0 या 2 समकोण होता है, उन्हे क्या कहते है?

ऐसे दो कोण जिसका योग180^0 होने से एक कोण को दूसरे कोण का सम्पूरक कोण कहते है।
यहाँ $\angle F$ का सम्पूरक कोण $\angle K$ और $\angle K$ का सम्पूरक कोण हैं $\angle F$।

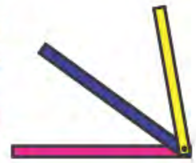
$\angle H$, $\angle I$, $\angle J$ एवं $\angle L$ में से कौन सा जोड़ा सम्पूरक कोण बनाता है। (स्वयं करें)
मैं $\angle G$ के सम्पूरक का मान लिखूँ एवं चाँद की सहायता से अंकन करे। (स्वयं करें)

स्वयं करें — 6.1

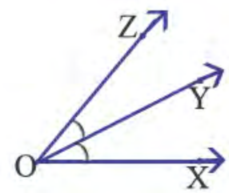
1) निम्न में से कौन सा जोड़ा सम्पूरक कोण बनाता है खोजे और बनायें।

$10^0, 170^0$; $38^0, 52^0$; $35^0, 65^0$; $90^0, 90^0$; $25^0, 165^0$; $45^0, 45^0$

तितली और तीर्थंकर की कहानी की पुस्तक के पेज को पलट रही थी। तितली उसी पुस्तक का पृष्ठ उलटकर चित्रानुसार अधिक कोण तैयार कर दी, उसे ही देखकर तीर्थंकर तीन रंगीन चित्र को पिचबोर्ड के एक सिर को काँटी द्वारा पास में दिये चित्र की तरह जोड़ दिया।



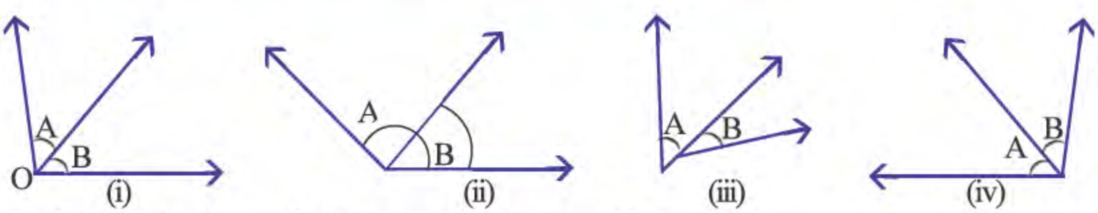
मैं इन तीन पिचबोर्ड द्वारा जो कोण बने उसे कॉपी के पन्ने पर बनाया।
देखते है, दो विशेष प्रकार के कोण ∠XOY और ∠YOZ बने
जिसके — (i) O शीर्ष बिन्दु
(ii) OY एक साधारण भुजा
(iii) दोनो कोण उभयनिष्ठ भुजा के दोनो तरफ ∠ZOY और ∠XOY बने।



इस प्रकार ∠XOY और ∠YOZ दोनो कोणो को क्या कहेंगे?

इस प्रकार ∠XOY और ∠YOZ दोनो कोणो को जिनमें एक भुजा उभयनिष्ठ हैं। उन्हे संलग्न कोण कहते हैं।

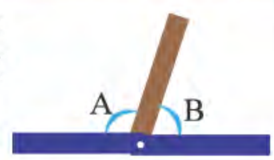
निम्न में से कौन-सा संलग्न कोण एवं कौन संलग्न कोण नहीं है खोजें —



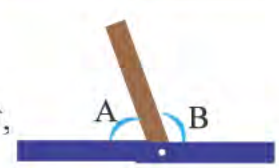
(i) और (iv) नं चित्र में ∠A और ∠B संलग्न कोण है तथा (ii) और (iii) नहीं है।
(ii) और (iii) नं चित्र में ∠A और ∠B संलग्न कोण नहीं है क्यों?

हम अपने मन से सोचे (ii), (iii) और (iv) नं चित्र में ∠A और ∠B संलग्न कोण है कि नहीं समझे। **(स्वयं करे)**

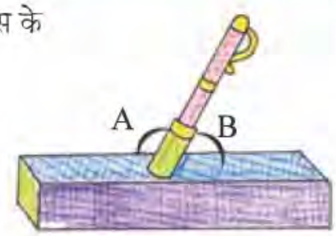
आज स्नेहा और तथागत ने तय किया है कि 2 काठी द्वारा संलग्न कोण तैयार करेंगे। अत: वे दोनो एक लम्बा लाठी के साथ एक छोटे लाठी को जोड़कर पास के चित्रानुसार तैयार किये।



यहां दोनो संलग्न कोण ☐ और ☐ तैयार हुए। मापकर देखते हैं,
$\angle A = 65^0$, $\angle B = 115^0$; फिर ∠A + ∠B = ☐ डिग्री।
तथागत फिर बादामी काठी को हटाकर तैयार किया —
अब देखते है दोनो ☐ कोण ∠A और ∠B तैयार हो गये ∠A= ☐ डिग्री, ∠B = ☐ डिग्री एवं ∠A + ∠B = ☐ डिग्री।

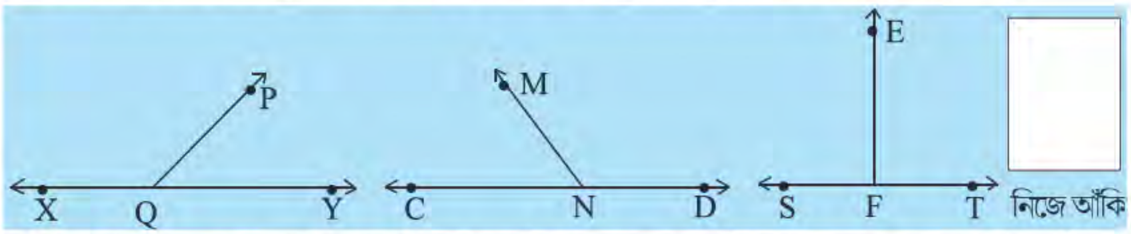


हमारा भाई एक पेन स्टैण्ड में एक पेन रखकर हमारे सामने पास के चित्र की तरह पेन रखा —



देखते है, यहाँ भी दो [ ] कोण $\angle A$ और $\angle B$ तैयार हुआ।
यहाँ मापकर पाते है $\angle A + \angle B =$ [ ] डिग्री

इस बार हम दो काठी द्वारा बहुत से संलग्न कोण तैयार किये एवं कुछ को पुस्तक पर बनायें और पाये —



संलग्न कोणो को मापकर देखते है, $\angle PQY =$ [ ]°, $\angle PQX =$ [ ]° एवं $\angle PQY + \angle PQX =$ [ ]°

पुन: $\angle MND =$ [ ]°, $\angle MNC =$ [ ]° एवं $\angle MND + \angle MNC =$ [ ]°

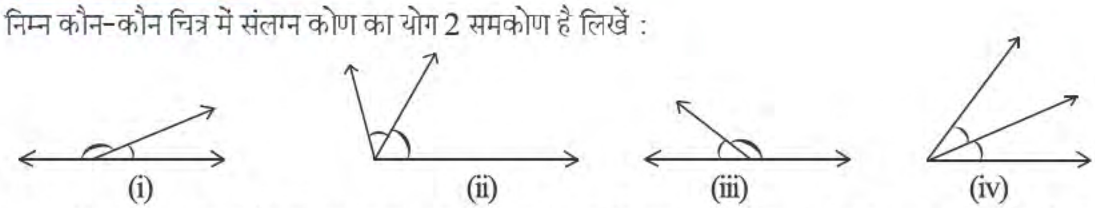
अन्य संलग्न कोणो को स्वयं मापकर देखें।

एक सरल रेखा के ऊपर एक किरण खड़ी होकर जो दो कोण बनाती है उनका योग [ ] या [ ] डिग्री।

AB सरल रेखा, AB किरण, AB सरल रेखा खण्ड और AB सरलरेखा खण्ड की लम्बाई समझने हेतु हम AB लिखते है। कोण ABC और कोण ABC का परिमाप समझाने हेतु $\angle ABC$ लिखते है।

स्वयं: करें — 6.2

निम्न कौन-कौन चित्र में संलग्न कोण का योग 2 समकोण है लिखें :



2) मैंने स्वयं एक सरल रेखा AB लिया। इस AB सरल रेखा के ऊपर एक बिन्दु P लिया। अब AB सरल रेखा के ऊपर P बिन्दु से एक किरण खींचा एवं इससे जो दो संलग्न कोण तैयार हुए उसका माप लिखे एवं इन दोनो संलग्न कोणो के मान का योग करके देखे उनका योगफल 180^0 या 2 समकोण हुआ या नहीं।

इस बार हम तीन रंगीन काठी लेकर एक नया मजेदार खेल खेलेंगे। हम इन तीन रंगीन काठी का एक सिरा जोड़ेगे एवं ऐसा दो संलग्न कोण तैयार करेंगे जिसका योगफल 180^0 या 2 समकोण होगा।

मैंने किया →

काठी द्वारा $\angle A$ और $\angle B$ बनाया,

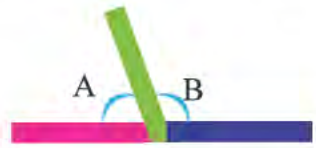
$\angle A = 113^0$ और $\angle B = 67^0 \therefore \angle A + \angle B =$ ______ डिग्री।

$\angle A$ और $\angle B$ दोनो संलग्न कोण उभयनिष्ट भुजा ______ रंग की काठी।

कॉपी में बनाकर देखते है, $\angle A$ और $\angle B$ दोनो कोण अर्थात् लाल और नीले रंग की काठियां एक ही सरल रेखा पर है।

जाकिर ने किया →

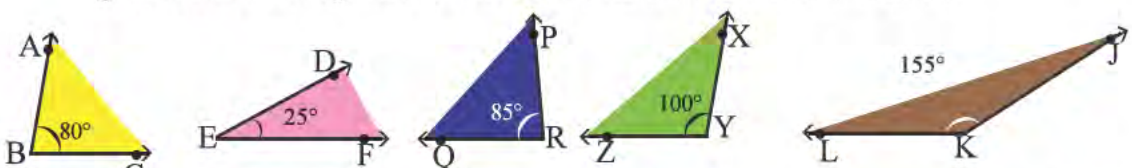
इस बार जाकिर काठी द्वारा $\angle A = 70^0$, $\angle B = 110^0$ तैयार किया।



यहाँ $\angle A$ और $\angle B$ दो संलग्न कोण का उभयनिष्ट भुजा ______ रंग की काठी है। कॉपी पर बनाकर देखते है कि, $\angle A$ और $\angle B$ दो संलग्न कोणो की जो दो भुजाएं उभयनिष्ट नहीं है(दोनो बाहरी भुजाए) अर्थात् लाल और नीले रंग की काठी एक ही सरल रेखा पर है।

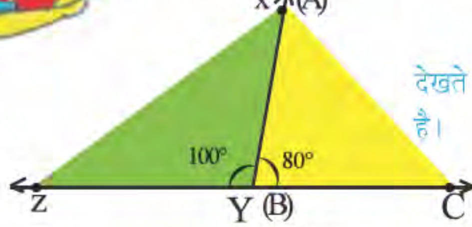
स्वयं से

जुल्फी अपनी कॉपी पर बहुत से कोण बानायी और चाँद द्वारा मापी और कोणो को काट ली।



सिराज ने जुल्फी के बनाये कोणो में से दो ऐसे कोणो को लिया जिसका योग 180^0 या दो समकोण। इसके बाद जो दो संलग्न कोण तैयार करेगा और देखेगे कि संलग्न कोणो की बाहरी भुजाये एक ही सरल रेखा पर है या नहीं।

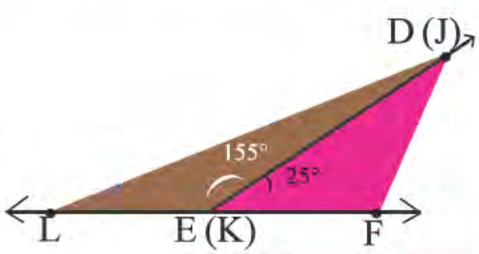
हम यहाँ $\angle ABC = 80^0$ लिए। इस बार 80^0 का सम्पूरक ______ डिग्री या $\angle XYZ$ लिया। $\angle ABC$ की AB भुजा और $\angle XYZ$ की XY भुजा मिलाकर बैठाये।



देखते है YZ और BC सरल रेखा खण्ड एक ही सरल रेखा पर स्थित है।

मैंने 25^0 कोण का सम्पूरक कोण ______ डिग्री का कोण लेकर समान रूप से मिलाकर बैठाये।

देखते है KL और EF दोनो रेखा खण्ड एक ही सरल रेखा पर है।



∠PQR का सम्पूरक कोण बनायें दोनो कोणो द्वारा बने संलग्न कोणों की बाहरी भुजाये एक ही सरल रेखा पर है या नहीं देखें (स्वयं करें)

हम पाये कि यदि संलग्न कोणों का कोण 180° है 2 उनकी बाह्य भुजाए एक ही सरल रेखा पर है।

हम नीचे दिये कोणो द्वारा संलग्न कोण बनायें और देखें कि संलग्न कोणों की बाहरी भुजाए एक ही सरल रेखा पर है या नहीं।

i) $37^0, 113^0$ ii) $41^0, 139^0$ iii) $94^0, 86^0$ iv) $90^0, 90^0$

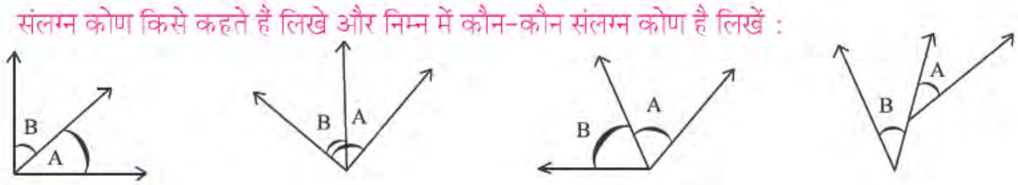
बनाकर देखें - 6

1. मन में सोचे और लिखे :
   (a) दो न्यून कोण एक हो सकते है या नहीं।
   (b) दो न्यून कोण परस्पर सम्पूरक हो सकते हैं या नहीं।
   (c) एक न्यून कोण और एक अधिक कोण परस्पर पूरक होंगे या नहीं दो समकोण परस्पर पूरक हो सकते हैं या नहीं।
   (d) दो अधिक कोण परस्पर सम्पूरक हो सकते हैं या नहीं।
   (e) दो समकोण परस्पर सम्पूरक हो सकते हैं या नहीं।
   (f) एक न्यून कोण और एक अधिक कोण परस्पर सम्पूरक हो सकते हैं या नहीं।
   (g) दो संलग्न कोण परस्पर पूरक हो सकते हैं या नहीं।
   (h) दो संलग्न कोण परस्पर सम्पूरक हो सकते हैं या नहीं।
2. निम्न संलग्न कोणो को बनाये उनमें कौन परस्पर पूरक या सम्पूरक हैं जांच करे :

   $45^0, 45^0; 120^0, 30^0; 70^0, 110^0; 42^0, 48^0; 37^0, 43^0; 85^0, 95^0;$
3. नीचे के कोणो को देखें कौन परस्पर पूरक कोण है।

   $31^0, 47^0, 64^0, 29^0, 43^0, 59^0, 17^0, 26^0$
4. नीचे के कोणों को देखे कौन-कौन परस्पर सम्पूरक कोण है।

   $47^0, 58^0, 69^0, 75^0, 133^0\ 105^0, 122^0, 125^0$
5. संलग्न कोण किसे कहते हैं लिखे और निम्न में कौन-कौन संलग्न कोण है लिखें :



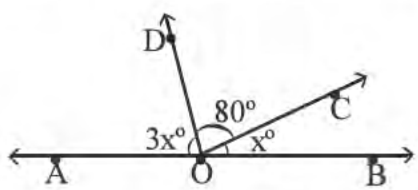
6. स्वयं चाँद की सहायता से संलग्न कोणों को बनायें और उनका योग निकाले—

$35^0, 45^0$; $18^0, 42^0$; $32^0, 90^0$; $73^0, 63^0$

7. सायन्तनी एक सरल रेखा AB बनाई। हम उस सरल रेखा पर किसी बिन्दु P से दूसरी एक किरण PQ बनाया। इसके फलस्वरूप दो संलग्न कोण $\angle PQB$ और $\angle PQA$ बने। चाँद की सहायता से $\angle PQB$ और $\angle PQA$ की परिमाप लिखे एवं $\angle PQB + \angle PQA =$ लिखें।

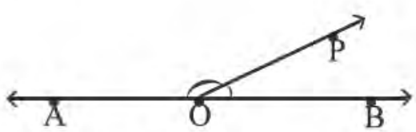
8. शकील दो संलग्न कोण $\angle ABC$ और $\angle ABD$ बनाया जिनका योग 180^0 है; हम भी शकील की तरह $\angle ABC$ और $\angle ABD$ बनाकर देखे कि D, B और C एक ही सरल रेखा पर हैं या नहीं।

9.



पास के चित्र से x का मान निर्णय करें।

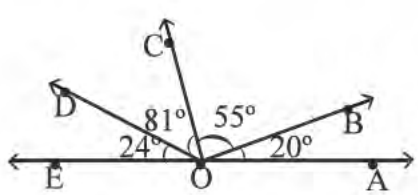
10.



पास के चित्र से $\angle AOP$, $\angle BOP$ से 140^0 अधिक है $\angle AOP$ और $\angle BOP$ का मान निर्णय करें।

11. दो संलग्न कोणों का मान 35^0 और 145^0 है; संलग्न कोणों की बाहर स्थित भुजाये दोनो किस तरह अवस्थित हैं लिखें।

12.



पास के चित्र में OA और OE किस रूप में स्थित हैं? लिखें।

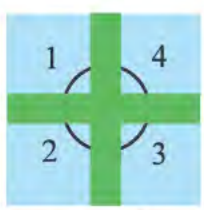
7. सम्मुख कोण की धारणा

आज हम कार्ड तैयार करेंगे। हम आयताकार बहुत से कार्ड काटे हैं। कार्डों पर फीता काटकर विभिन्न रुपों में लगाकर सजायेंगे एवं खाली स्थान में अंकित करेंगे।

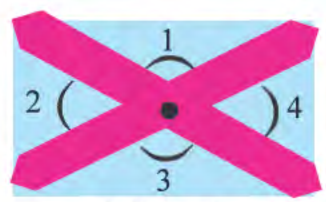
मतिउर ने बनाया →

अन्वेषा ने बनाया →

देखता हूँ मतिउर के कार्ड पर दोनो टुकड़े फीते समान रुप में हैं एवं अन्वेषा के कार्ड पर दोनो टुकड़े दूसरी तरह से है। लेकिन दोनो प्रकार के टुकड़े एक दूसरे को काटकर कुछ कोणो का निर्माण करते है। इन कोणो के बीच सम्बन्ध खोजों।



प्रथम कार्ड



द्वितीय कार्ड

चाँद से मापकर देखते हैं कि प्रथम कार्ड का $\angle 1 =$ □ डिग्री, $\angle 2 =$ □ डिग्री, $\angle 3 =$ □ डिग्री, $\angle 4 =$ □ डिग्री

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 =$ □ डिग्री

चाँद से मापकर देखते है कि द्वितीय कार्ड का $\angle 1 =$ □ डिग्री, $\angle 2 =$ □ डिग्री, $\angle 3 =$ □ डिग्री, $\angle 4 =$ □ डिग्री

चाँद से मापकर देखते है कि $\angle 1 = \angle 3 =$ □ डिग्री एवं $\angle 2 = \angle 4 =$ □ डिग्री

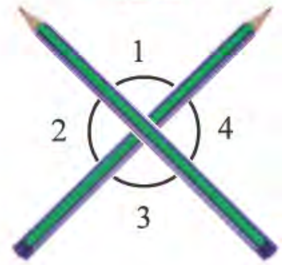
देखते है कि $\angle 1$ और $\angle 2$ संलग्न कोण बनाते हैं लेकिन $\angle 1$ और $\angle 3$ या $\angle 2$ और $\angle 4$ कोण विपरीत दिशाओं में है। इसे क्या कहते हैं?

$\angle 1$ और $\angle 3$ या $\angle 2$ और $\angle 4$ इन विपरीत दिशाओं में बने दोनो कोणो को सम्मुख कोण कहते हैं अर्थात् दो सरल रेखाओं के परस्पर काटने के बाद निर्मित दो जोड़े कोणो की जो एक दूसरे के विपरीत होते हैं उन्हे सम्मुख कोण कहते हैं।

हमारे मित्र की कैंची परस्पर दो जोड़ा सम्मुख कोण बनाती हैं।

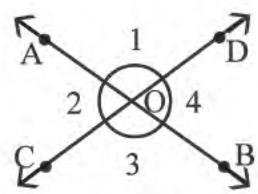
हमारा भाई दो स्केलो को बीच में सूते से बांधकर दो जोड़े सम्मुख कोण का निर्माण किया।

मिता भी उसी तरह दो पेंसिलों को बीच में बांधकर पाया।



मुँह खुली कैंची, दो स्केल या दो पेंसिल को बीच में बांधने से जो दो कोण पाते है, उसे चाँद द्वारा मापकर देखें (स्वयं करें)

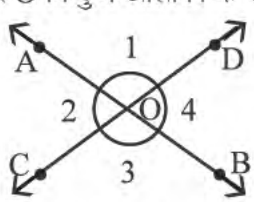
स्वयं से

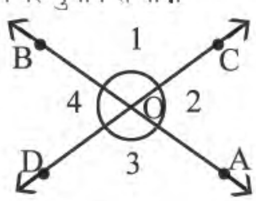


(1) मैंने मोटी कॉपी पर दो परस्पर काटने वाली दो सरल रेखा AB और CD खींचे जो एक दूसरे से O बिन्दु पर छेद करे। चार कोणो के पास $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ और $\angle 4$ लिखा।

(2) कॉपी के ऊपर ट्रेसिंग कागज रखकर ट्रेसिंग कागज पर फिर एक कोण बनाया। इस कापी के पन्ना और ट्रेसिंग कागज को एक बोर्ड ऊपर रखकर O बिन्दु में आलपिन से जोड़ दिया।

(3) इस बार ट्रेसिंग पेपर O बिन्दु में आलपिन के सापेक्ष 180^0 कोण पर घुमाने से पाया —





देखते है, ट्रेसिंग पेपर का (1) नं कोण कॉपी के पन्ने के (3) नं कोण के साथ मिल गया हैं, पुन: ट्रेसिंग पेपर का (3) नं कोण कॉपी के पन्ने के (1) नं कोण के साथ मिल गया हैं। इस तरह (2) नं कोण (4) नं कोण के साथ मिल गया है। अर्थात् $\angle 1 = \angle 3$ एवं $\angle 2 = \angle 4$ पाया।

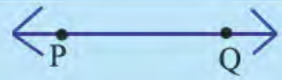
पाया कि दो सरल रेखा एक दूसरे से छेद करने से दो जोड़ा सम्मुख कोण बनते है, वे आपस में बराबर होते हैं।

इस बार मैं और मुक्ता दो परस्पर काटने वाली रेखाये बनायेंगे एवं सोचकर क्रमश: सिद्ध करेंगे कि जो दो जोड़े सम्मुख कोण बने उसका प्रत्येक जोड़ा आपस में बराबर होता हैं।

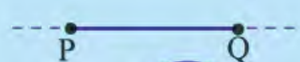
यूक्लिड (325 ई०पू० से 265 ई०पू०) ग्रीस के एक गणितज्ञ थे उन्हें ज्यामिति का जनक कहा जाता हैं। प्राय: 280 ई०पूर्व वे 13 खण्डो से युक्त एक पुस्तक लिखे, जिसका नाम *ELEMENTS* है यूक्लिड ने समतल ऑर घन ज्यामिति से सम्बंधित **467** उपपाद्यो का संग्रह किया, उनमें से कुछ सत्य धारणा पर निर्भर करती हैं। इन धाराणाओ को प्रमाणित करने की आवश्यकता नहीं हैं। इन्हे **स्वीकार्य** *(Postulate)* एवं **स्वयंसिद्ध** *(Axiom)* करते है। यूक्लिड के समान्तराल स्वीकार्य हैं अर्थात् एक सरल रेखा के बाहर स्थित किसी बिन्दु से उसी सरल रेखा के समानान्तर केवल एक ही सरल रेखा खीची जा सकती है। जो बाद में हर जगह जरुरत नहीं होती। इसने परिणाम स्वरुप यूक्लिड ज्यमिति की आवश्यकता होती हैं।

सोचकर प्रमाणित करने से पहले हम लोग कुछ ज्यामितीय सत्यों का विवरण लिखें जो हमारे प्रमाणो के लिये उपाय तैयार करने अथवा अंकन करने हेतु उपयोगी होगी। इन विवरणो की सत्यता हम पहले विभिन्न प्रकार से जाँच कर चुके हैं। इन तत्थों को हम स्वीकार्य कहते हैं।

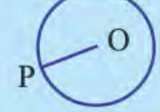
तत्थ **1** दो बिन्दुओं से केवल एक ही सरल रेखा खींची जा सकती हैं।



तत्थ **2** एक सरल रेखा को दोनो तरफ इच्छानुसार बढ़ाया जा सकते हैं।

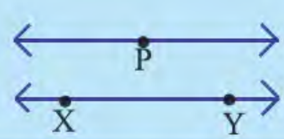


तत्थ **3** किसी बिन्दु को केन्द्र मान के किसी एक अर्द्धव्यास को लेकर केवल एक ही वृत्त अंकित किया जा सकता हैं।



तत्थ **4** किसी दो समकोण का माप बराबर होती हैं।

तत्थ **5** किसी सरल रेखा बाहर स्थित बिन्दु से उस सरल रेखा के समानान्तर केवल एक ही सरल रेखा खींची जा सकती हैं। (प्लेफेयर तत्थ)



कुछ ज्यामितीय सत्य तत्थों को हम युक्ति के साथ क्रमश: प्रमाणित करेंगे। उन्हे **उपसिद्धान्त** कहेंगे। इन उपसिद्धान्त को प्रमाणित करने हेतु कुछ ज्यामितीय सत्य विवरणों की सहायता लेंगे।(जिन्हे हम अभी प्रमाणित नहीं करेंगे) इन ज्यामितीय सत्यों को हम **स्वयं सिद्ध** कहते हैं।

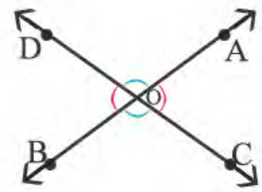
स्वयं सिद्ध 1 एक सरल रेखा के ऊपर एक किरण खड़ी होने पर जो संलग्न कोण बनते हैं उनका योग दो समकोण होता हैं।

स्वयं सिद्ध 2 दो संलग्न कोणो का योग यदि दो समकोण हो, तो उनकी बाहर स्थित भुजाएँ एक ही सरल रेखा में होती हैं।

इस बार हम और मुक्ता उपर्युक्त स्वयं सिद्धियों की सहायता से क्रमशः प्रमाणित करेंगे कि—

उपसिद्धान्त 1 दो सरल रेखाओं के आपस में काटने पर बने दो जोड़े सम्मुख कोण आपस में समान होते है।

प्रदत्त (Given) : AB और CD दो सरल रेखायें एक दूसरे को O बिन्दु पर काटती है। जिसके परिणाम स्वरुप दो जोड़े सम्मुख कोण ∠AOD, ∠BOC एवं ∠AOC तथा ∠BOD बने हैं,



तो सिद्ध करना है कि

∠AOD = ∠BOC एवं ∠AOC = ∠BOD

प्रमाण :

$\angle AOD + \angle AOC = 180^0$ [क्योंकि CD सरल रेखा पर रश्मि OA खड़ी हैं। अत: दोनो संलग्न कोणो का योग — स्वयं करें - 1]

$\angle AOC + \angle BOC = 180^0$ [क्योंकि AB सरल रेखा के ऊपर OC किरण खड़ी है। फलत: संलग्न कोणो का योग □ — स्वयं करें - 1]

$\angle AOD + \angle AOC = \angle AOC + \angle BOC$

फलत: ∠AOD = ∠BOC (दोनो तरफ से ∠AOC घटाने पर)

पुन : उसी प्रकार लिख सकते हैं —

$\angle BOC + \angle BOD = 180^0$ क्योंकि CD सरल रेखा के ऊपर OB किरण खड़ी है।अत: दोनो संलग्न कोणो का योग 2 समकोण होगा।

$\angle BOC + \angle AOC = 180^0$ क्योंकि AB सरल रेखा के ऊपर OC किरण खड़ी है।अत: दोनो संलग्न कोण का योग □ होगा।

$\angle BOC + \angle BOD = \angle BOC + \angle AOC$

फलत: ∠AOC = ∠BOD (दोनो तरफ से ∠BOC घटाने पर)

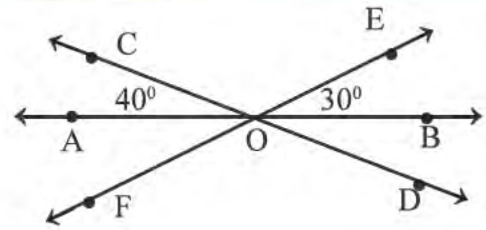
अत: पाया कि AB और CD दो सरल रेखाये एक दूसरे को O पर काटती है तो सम्मुख कोण समान होता है।

अर्थात् ∠AOD = ∠BOC

एवं ∠AOC = ∠BOD प्रमाणित।

इस बार रश्मि ने उपसिद्धान्तों का कुछ प्रयोग दिया हम उनको सिद्ध करने की चेष्टा करें।

प्रयोग — **1** चित्र से $\angle FOD$ का मान ज्ञात करें।



$\angle COE = 180^0 - \angle AOC - \angle BOE$

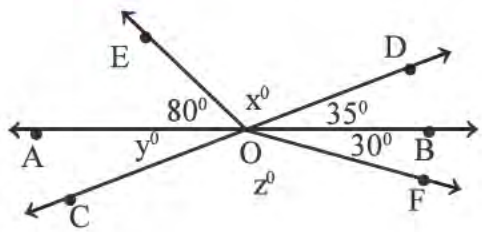
$= 180^0 - 40^0 - 30^0$

$= 110^0$

$\angle COE$ = सम्मुख कोण $\angle FOD$

$\therefore \quad \angle FOD = 110^0$

प्रयोग — **2** चित्र में से x,y,z का मान ज्ञात करें।



$\angle EOD = \angle AOB - \angle AOE - \angle BOD$

$= 180^0 - 80^0 - 35^0$

$= 65^0$

$\therefore \; x^0 = 65^0$

$\angle AOC$ = सम्मुख $\angle BOD$

$\therefore \; y^0 = 35^0$

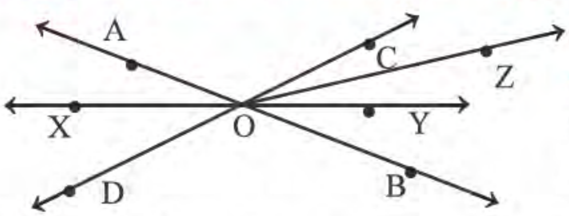
$\angle COF = 180^0 - \angle AOC - \angle BOF$

$= 180^0 - 35^0 - 30^0 = 115^0$

$\therefore \; z^0 = 115^0$

इस तरह पाया कि $x = 65$, $y = 35$ एवं $z = 115$

प्रयोग — **3** दो सरल रेखाये AB एवं CD परस्पर O बिन्दु पर काटती हैं। OX एवं OY क्रमश: $\angle AOD$ तथा $\angle BOC$ की समद्विभाजक है। प्रमाण करना होगा कि OX एवं OY एक सरल रेखा पर स्थित है।



प्रदत्त (Given) : दो सरल रेखाएं AB एवं CD परस्पर O बिन्दु पर काटती हैं। OX, $\angle AOD$ की समद्विभाजक हैं एवं OY, $\angle BOC$ की समद्विभाजक हैं।

तो सिद्ध करना है कि OX एवं OY एक ही सरल रेखा पर स्थित हैं।

रचना : माना XO सरल रेखा बढ़ाने पर OZ दिशा में बढ़ी।

प्रमाण : AB और XZ सरल रेखाएं एक दूसरे को O बिन्दु को काटते है।

$\therefore \; \angle AOX$ = सम्मुख $\angle BOZ$ एवं $\angle DOX$ = सम्मुख $\angle COZ$

जबकि, $\angle AOX = \angle DOX$, फलत: $\angle BOZ = \angle COZ$

$\therefore$ OZ $\angle BOC$ को समद्विभाजित करते हैं। पुन:, OY, $\angle BOC$ को समद्विभाजित करते हैं।

लेकिन OY एवं OZ दोनो ही $\angle BOC$ को समद्विभाजित नहीं कर सकते।

क्योंकि, OY $\angle BOC$ को समद्विभाजित करते हैं, फलत: OY एवं OZ एक ही सरल रेखा पर स्थित है।

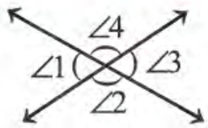
$\therefore$ OX एवं OY एक ही सरल रेखा पर स्थित हैं।

बनाकर देखें — 7.1

1. दो सरल रेखायें PQ एवं RS एक दूसरे को O बिन्दु पर काटती हुई जो सम्मुख कोण बनाती हैं उनका अंकन करे और लिखें।

2. चित्र देखकर कोणो का मान लिखने की चेष्टा करें :

(a)



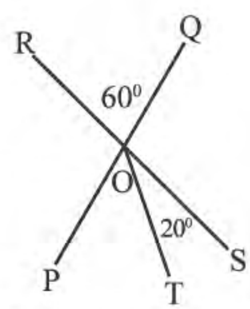
$\angle 1 = 35^0$

$\angle 2 =$ ☐

$\angle 3 =$ ☐

$\angle 4 =$ ☐ लिखे

(b)



$\angle TOS = 20^0$

$\angle ROQ = 60^0$

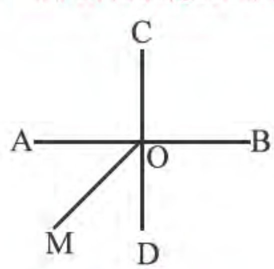
$\angle POT =$ ☐

$\angle ROP =$ ☐

$\angle QOS =$ ☐

3. तीर्थ ने PQ एवं XY दो सरल रेखायें खींची जो एक दूसरे को O बिन्दु पर काटती हैं। मैं चाँद की सहायता से सम्मुख कोणो को मापकर देखूँगा।

4. पास का चित्र देखकर नीचे के प्रश्नो का उत्तर देने की चेष्टा करे :



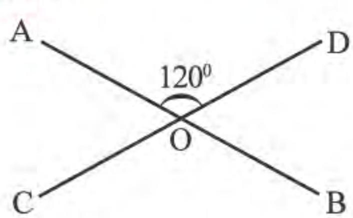
(i) ऐसे दो कोणो का नाम लिखें जो परस्पर पूरक हो।

(ii) ऐसे दो कोणो का नाम लिखें जो परस्पर सम्पूरक हो।

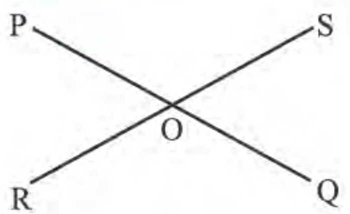
(iii) ऐसे दो कोणो का नाम लिखें जो परस्पर सम्मुख कोण हो।

5. दो सरल रेखायें यदि एक दूसरे को किसी बिन्दु पर काटे तो सम्मुख कोण का मान समान होता है। — तर्क के साथ प्रमाणित करे।

6.



चित्र से, $\angle BOD$, $\angle BOC$ एवं $\angle AOC$ का परिमाप लिखें।

7. 

$\angle POR$ एवं $\angle QOS$ का योग 110^0; $\angle POS, \angle QOS$, $\angle QOR$ एवं $\angle POR$ का परिमाप लिखें।

8. OP, OQ, OR एवं OS एक बिन्दुगामी रेखायें हैं। OP और OR एक ही सरल रेखा पर स्थित हैं। P एवं R बिन्दु O बिन्दु का विपरीत दिशा में स्थित। $\angle POQ = \angle ROS$ एवं $\angle POQ = \angle QOR$ । यदि $\angle POQ = 50^0$ होते तो $\angle QOR$, $\angle ROS$ एवं $\angle POS$ का परिमाप लिखे।

9. चार किरणों किसी एक बिन्दु इस प्रकार मिलती हैं कि जो सम्मुख कोण बनते है वे बराबर हैं। प्रमाणित करें कि इन चार किरणों द्वारा दो सरल रेखाये बनती हैं।

10. एक कोण की अन्त:समद्विभाजक एवं बाह्य समद्विभाजक परस्पर लम्व रुप में स्थित होते हैं— प्रमाणित करें।

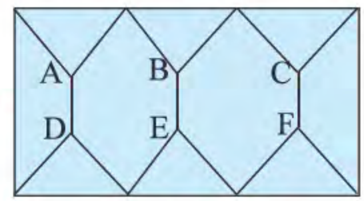
11. दो सरल रेखाओं के आपस में काटने पर जो चार कोण बनते हैं उनका योग चार समकोण होता हैं— प्रमाणित करें।

12. PQR त्रिभुज की $\angle PQR = \angle PRQ$ है QR भुजा को दोनो तरफ बढ़ाया गया है। इन से जो बहिष्कोण बनते हो वे आपस में बराबर होते है—प्रमाण करें।

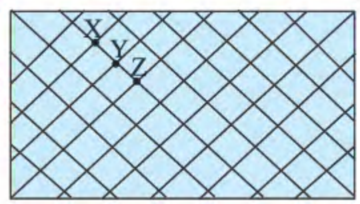
13. दो सरल रेखाये परस्पर यदि एक बिन्दु पर काटती हैं तो इनके समद्विभुजाएं परस्पर दो लम्ब रेखाये होती हैं— प्रमाणित करें।

8. समानान्तर सरल रेखा और तिर्यक रेखा के गुण तिर्यक

आज माधुरी के बरामदे में बैठकर हमलोग जितनी खुशी अनुभव करते हैं पल्लव माधुरी के घर के बरामदा के ग्रिल की डिजाइन को बनाता है। आयशा ने पल्लव द्वारा बनाये गए चित्र के अन्दर कटान बिन्दुओं पर गोल दाग देकर नाम लिखी —



तिन्नी ने उनके रसोई घर के बाहर लगाये गये तार के जाली की डिजाइन बनायी। वहाँ कटान बिन्दुओं को खोजने की चेष्टा करें।

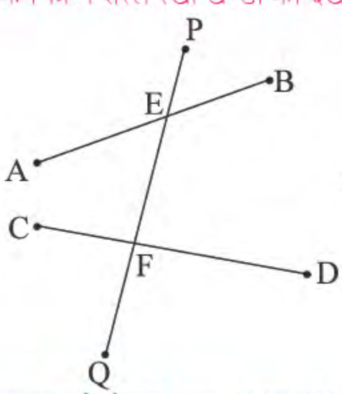


देखते है, पल्लव के चित्र के A, B और C कटान बिन्दुओं एवं तुहिन के चित्र के X, Y और Z कटान बिन्दु दूसरे रूप में पाई। X, Y एवं Z कटान बिन्दु समरेखीय अधीन एक ही सरल रेखा अलग बिन्दु पर काटते हैं। ऐसे सरल रेखा खण्डों को क्या कहेंगे?

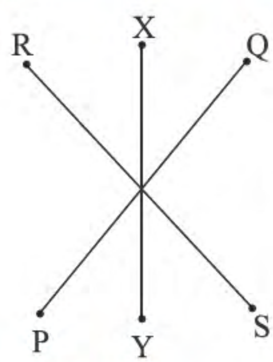
इस प्रकार के सरल रेखा खण्ड को तिर्यक रेखा कहते हैं अर्थात् यदि एक सरल रेखा दो या उससे अधिक सरल रेखाओं को एक से अधिक बिन्दुओं पर काटता है तो उस सरल रेखा को तिर्यक रेखा कहते हैं।

हमारे मुहल्ले के रास्ते या रेल लाइनों में छेदक देखने को मिलते हैं।

नीचे के चित्र में सरल रेखा खण्डो को देखें और उनके तिर्यको को खोजें :



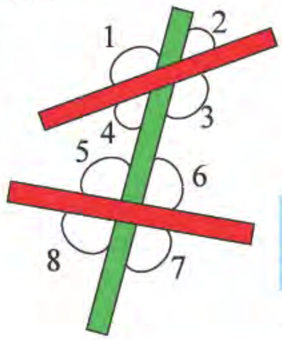
1 न॰ चित्र



2 न॰ चित्र

(1) न॰ चित्र में छेदक ☐ [AB/PQ] लेकिन (2) न॰ चित्र में कोई तिर्यक नहीं हैं।

हमारी बहन की सहेली बहुत पतले-पतले पिचबोर्ड से पिन के द्वारा अटकायें हुए नीचे के चित्र की तरह छेदक या तिर्यक दिया।



उसके परिणाम स्वरूप बहुत से कोण बने। उसके कुछ कोणों के नाम भी दिया। मैं चित्र के कोणों को चाँद की सहायता से मापकर देखती हूँ।

$\angle 1 = \angle 3$ रूप $\angle 2 = \angle 4$; एवं ये ☐ कोण।

पुन:, $\angle 5$ = सम्मुख ☐ एवं $\angle 6$ = सम्मुख ☐

चित्र में छेदक या तिर्यक का अर्थात् हरे रंग के पिचबोर्ड एवं लाल रंग के पिचबोर्ड के बीच के या भीतर के कोण अर्थात् $\angle 4, \angle 3, \angle 6$ और $\angle 5$ को क्या कहा जाता है?

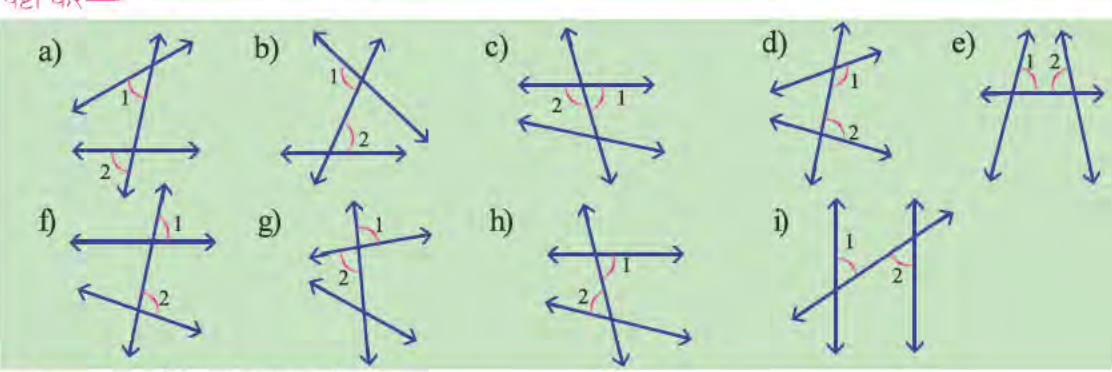
$\angle 4, \angle 3, \angle 6$ और $\angle 5$ कोणों को अन्त: कोण कहते है और बाहर की तरफ के कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 7$ और $\angle 8$ को बहिष्कोण कहते है

अन्त: एवं बहाकोण के बीच तिर्यक रेखा के एक तरफ के कोण एवं तिर्यक रेखा के दूसरी तरफ का कोणों के क्या बिशेष कोई सम्बंध या नाम है?

इस प्रकार पाये गये 8 कोणो के अलग-अलग विशेष नामों को नीचे की तालिका में लिखा—

कोण का नाम	चित्र के कोण
अन्त: कोण	$\angle 4, \angle 3$, ☐, ☐
बहिष्कोण कोण	$\angle 1, \angle 2$, ☐, ☐
चार जोड़े अनुरूप कोण	$\angle 1$ और $\angle 5$, $\angle 2$ और $\angle 6$, $\angle 4$ और $\angle 8$, $\angle 3$ और $\angle 7$
दो जोड़े एकात्तर कोण	$\angle 4$ और $\angle 6$, $\angle 3$ और $\angle 5$
छेदक के एक ही तरफ के अन्तस्थ कोण	$\angle 3$ और $\angle 6$, $\angle 4$ और $\angle 5$

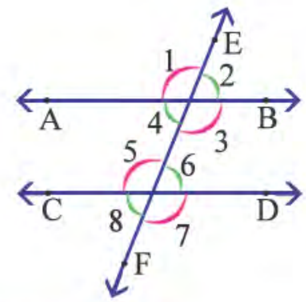
सहेली की तरह पल्लव और माधुरी ने बहुत से कोण बनाये एवं कोणों को चिंहित किया। हम किस कोण को क्या बोलने की चेष्टा करें—



(a) $\angle 1$ और $\angle 2$ अनुरूप कोण

[बाकी कोणों के जोड़े के नाम स्वयं लिखे]

आज हम लोगों ने निश्चय किया है कि हमारे कुछ मित्र कक्षा के श्यामपट्ट पर कुछ समानान्तर एवं तिर्यक रेखा बनायेंगे और कुछ मित्र चाँद द्वारा कोणों को मापकर उनके बीच कुछ सम्बन्ध है कि नहीं खोजेंगे।



मीरा स्केल की सहायता से दो समानान्तर सरलरेखायें AB और CD खीचीं। राना वहीं पर उनकी तिर्यक रेखा EF खीचां। उसके परिणाम स्वरूप उनके बीच 8 कोण $\angle 1, \angle 2, ..., \angle 8$ लिखकर चिन्हित किया।

हम श्यामपट्ट के चित्र के अनुरुप कोणों को चाँद की सहायता से मापें और लिखे

4 जोड़े कोण हुए ($\angle 1$ और $\angle 5$), ($\angle 2$ और ☐), ($\angle 4$ और $\angle 8$) और ($\angle 3$ और ☐)

चाँद की सहायता से मापकर देखे हैं, $\angle 1 =$ ☐ और $\angle 5 =$ ☐

[स्वयं समान्तर सरल रेखायें एवं उनकी तिर्यक या छेदक रेखा खीचें और संगत कोणों को मापें और लिखे]

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 5$

पुन: $\angle 2 =$ ☐ और $\angle 6 =$ ☐ [स्वयं कोणों को मापें और लिखें]

$\therefore \quad \angle 2 = \angle 6$

इसी तरह अन्य संगत कोणों को मापकर देखते हैं,

मीरा द्वारा खीचीं गयी समानान्तर को तिर्यक रेखा के एक ही तरह के दो जोड़कर करके कुल चार जोड़े संगत कोण बनते है एवं प्रत्येक जोड़े संगत कोण की माप बराबर होती है।

प्रीतम, सोनाली, सुमन्त एवं मेहर प्रत्येक ने अपनी कॉपी पर कोई दो समान्तर सरल रेखा एवं उनकी तिर्यक रेखाये खींचा एवं चाँद की सहायता से अनुरूप कोणों को मापकर देखा कि सभी संगत कोण बराबर हैं।

[स्वयं बनाकर जाँच करें]

स्वयं सिद्ध **3** दो समानान्तर सरल रेखा को यदि कोई तिर्यक रेखा काटती है तो संगत कोणों की परिमाप बराबर होती है।

सिराज श्यामपट्ट पर खीचे चित्रों के एकान्तर कोणो को मापकर देखेगा कि उनमें कुछ सम्बन्ध है या नहीं।

श्यामपट्ट पर खीचें गये चित्र के 2 जोड़े एकान्तर कोण हुआ ($\angle 4$ और $\angle 6$), ($\angle 3$ और $\square$)

चाँद की सहायता से मापकर देखते हैं कि, $\angle 4 = \square$ और $\angle 6 = \square$

[स्वयं समानान्तर सरल रेखा और उसकी छेदक रेखा खीचें एक एकान्तर कोणो को मापकर लिखे]

$\therefore \quad \angle 4 = \angle 6$

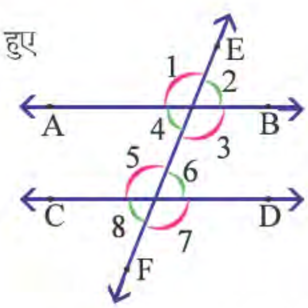
पुन: $\angle 3 = \square$ और $\angle 5 = \square$ $\quad \therefore \quad \angle 3 \; \square \; \angle 5$ (= / ≠ बैठायें)

हम 4 मित्रों में से प्रत्येक ने अपनी कॉपी पर दो समानान्तर सरल रेखा और उनकी दो छेदक रेखायें खीचा। 2 जोड़ा एकान्तर कोणो का नाम लिखकर चाँद की सहायता से उनकी माप लिखकर देखते हैं एकान्तर कोणों का परिमाप बराबर है। [स्वयं बनाये और जाँच करें]

पाया, दो समानान्तर सरल रेखाओं को एक तिर्यक सरल रेखा द्वारा काटने पर तिर्यक रेखा के विपरीत दिशा के अन्त:कोण 2 जोड़े एकान्तर कोण बनते हैं प्रत्येक जोड़ा कोणों का परिमाप $\square$ (समान/असमान) होती है।

हम बोर्ड पर बनाये गये अन्त:स्थ विपरीत कोणो का माप लेगें एवं उनके बीच कुछ सम्बंध है कि नहीं देखेंगे।

चित्र के 2 जोड़े, तिर्यक रेखा के एक ही तरफ के अन्त:स्थित कोण हुए



($\angle 3$ और $\angle 6$) एवं ($\angle 4$ और $\square$)

चाँद की सहायता से मापकर देखते हैं कि

$\angle 3 = \square$ और $\angle 6 = \square$ एवं

$\angle 4 = \square$ और $\angle 5 = \square$

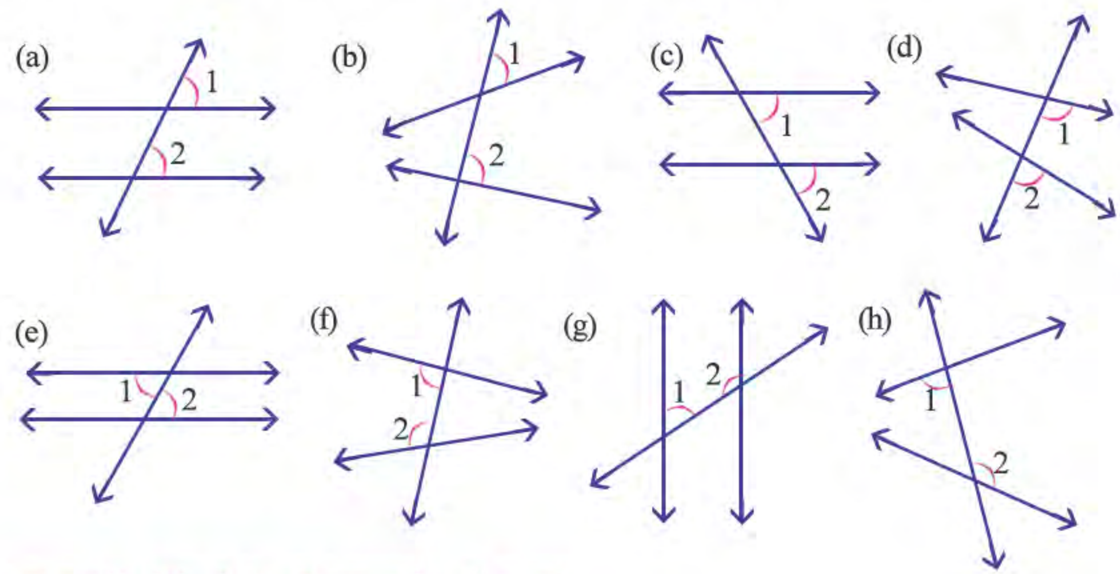
[स्वयं समानान्तर दो सरल रेखायें और एक तिर्यक रेखा खींचकर तिर्यक रेखा के एक ही तरफ के अन्त:स्थ कोणो को चाँद की सहायता से मापे]

देखते है कि, $\quad \angle 3 + \angle 6 = 180^0 \quad$ एवं $\quad \angle 4 + \angle 5 = \square$

हम अपनी कॉपी पर और चार एक ही जैसा चित्र बनायें और उनकी तिर्यक रेखा खींचकर तिर्यक रेखा के एक ही तरफ के अन्त:स्थ कोणो को मापकर उनका योग करने से क्या पाते हैं देखे। [स्वयं करें]

पाया, दो समानान्तर सरल रेखाओं को एक तिर्यक सरल रेखा द्वारा काटने पर तिर्यक रेखा के एक ही तरफ बने दोनों अन्त: कोणो का योग $\square$ समकोण होता है।

नीता कई जोड़ा समानान्तर रेखायें एक असमानान्तर रेखायें खींची। हम उनके एक-एक तिर्यक रेखा खींचे। फल स्वरुप बने संगत कोण, एकान्तर कोण, तिर्यक रेखा के ही तरफ दो अन्त कोण तैयार हुए।



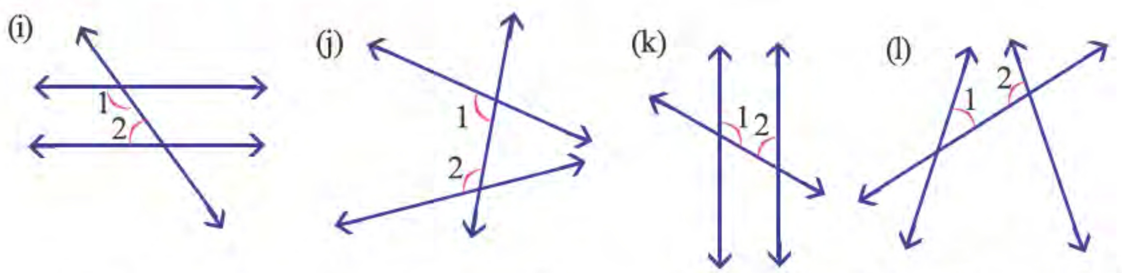
रमिता ऊपर के कोणों को चाँद की सहायता से मापने पर पायी,

(a) $\angle 1 = \angle 2$ (b) $\angle 1 \neq \angle 2$ (c) $\angle 1 \square \angle 2$ (= / ≠)

(d) $\angle 1 \square \angle 2$ (=/≠) (e) $\angle 1 \square \angle 2$ (= / ≠) (f) $\angle 1 + \angle 2 = \square$ डिग्री

(g) $\angle 1 + \angle 2 = \square$ डिग्री (h) $\angle 1 + \angle 2 = \square$ डिग्री

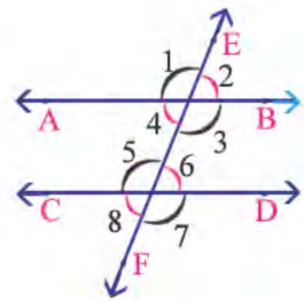
मैने कुछऔर चित्र बनाये और क्या पाये देखें।



$\angle 1 + \angle 2 = \square$ $\angle 1 + \angle 2 = \square$ $\angle 1 + \angle 2 = \square$ $\angle 1 + \angle 2 = \square$

उपसिद्धान्त **2** दो समानान्तर सरल रेखाओं को कोई दूसरी तिर्यक रेखा यदि काटे तो एकान्तर कोणों की माप बराबर होती है एवं तिर्यक रेखा के एक ही तरफ के दोनों अन्त: कोणों का योग 180^0 होता है। (इस उपसिद्धान्त को स्वयं सिद्ध 3 की सहायता से प्रमाणित कर सकते है)।

स्वयं से



(1) एक ड्राइंग बोर्ड पर एक सादा कागज फिट किया।

(2) स्केल की सहायता से इस सादे कागज पर दो समान्तर सरल रेखायें AB और CD खींचा।

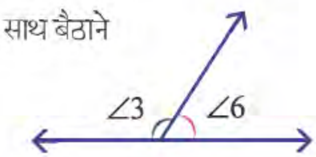
(3) AB और CD समान्तर सरल रेखा की एक तिर्यक रेखा EF खींचा।

(4) जो कोण बने उनमें 8 के नाम दिये और काट लियें।

(5) इस बार संगत कोण $\angle 1$ और $\angle 5$ को एक के ऊपर एक बैठाकर जाँच करें और देखे कि $\angle 1 = \angle 5$ हुआ की नहीं।

(6) इस बार एकान्तर कोणों को काटकर एक के ऊपर बैठाकर देखा कि $\angle 4 = \angle 6$ हुआ या नहीं।

(7) छेदक रेखा एक ही तरफ के दोनो अन्त: कोणों $\angle 3$ और $\angle 6$ को पास में एक साथ बैठाने पर देखते है कि $\angle 3 + \angle 6 = \square$ हुआ या नहीं।



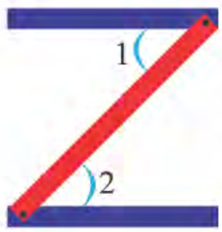
इस बार स्वयं से जो पाया नीचे की तालिका में लिखों।

क्रम संख्या	कोण	कोण का प्रकार	समान/असमान/सम्पूरक	सिद्धान्त
1.	$\angle 1$ और $\angle 5$ $\angle 4$ और $\angle 8$ $\angle 2$ और $\angle 6$ $\angle 3$ और $\angle 7$	संगत कोण	बराबर	एक जोड़ी समान्तर सरल रेखा के क्षेत्र में संगत कोण बराबर होते हैं।
2.	$\angle 4$ और $\angle 6$ $\angle 3$ और $\angle 5$			
3.	$\angle 3$ और $\angle 6$ $\angle 4$ और $\angle 5$		$\angle 3 + \angle 6 = \square$ $\angle 4 + \angle 5 = \square$	

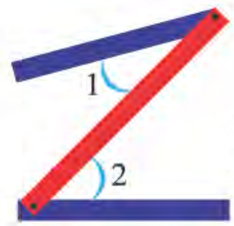
आज हमलोग दूसरे प्रकार का पिचबोर्ड खेल खेलेंगे। मेहर ने बहुत से पिचबोर्ड के बने विभिन्न रंगों के छोटे-बड़े पतले एक ही तरह को चौड़े दण्डे तैयार किये।

हमारा भाई विपुल इसी प्रकार के तीन रंगीन दण्डो को पिन से जोड़कर विभिन्न आकार के अंग्रेजी अक्षर 'Z' बनाने की चेष्टा किया।

उसने किया →



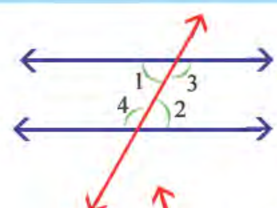
(i)



(ii)

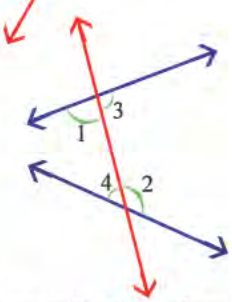
मैं विपुल द्वारा बनाये नं.(i) और (ii) नं पिचबोर्ड के Z के जो दो एकान्तर कोण बने मापकर देखा तो नं. (i) चित्र में $\angle 1 = \angle 2$ लेकिन (ii) नं चित्र में $\angle 1 \neq \angle 2$

स्केल बैठाकर देखते है (i) नं Z की नीली दोनों भुजायें परस्पर समान्तर है लेकिन (ii) नं Z की नीली दोनो भुजायें परस्पर समानान्तर नहीं है।



इस बार मैं कॉपी पर दो सरल रेखायें और उसकी एक तिर्यक रेखा बनाया। इस बार एकान्तर कोणों को चाँद की सहायता से मापा।

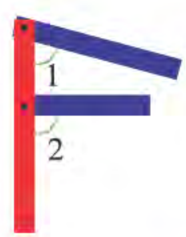
देखता हूँ कि जब एकान्तर कोणों की माप बराबर होती है तो सरल रेखायें ☐ [समान्तर / समान्तर नहीं] [स्वयं बनाये और जाँच करके लिखें]



पाया कि जब दो सरल रेखाओं को एक सरल तिर्यक रेखा काटती है और यदि एकान्तर कोण की माप बराबर होती है तो दोनों सरल रेखाये समान्तर होती हैं।

मैं भी मेहर द्वारा बनाये गये छोटे-बड़े एक ही प्रकार के चौड़े तीन पिचबोर्ड द्वारा अंग्रेजीं का 'F' तैयार करने की चेष्टा किया।

(i)



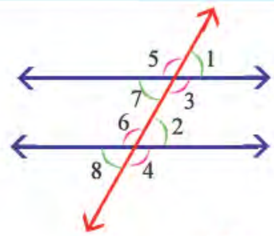
(ii)

चाँद की सहायता से (i) नं और (ii) नं के 'F' के संगत कोणों को मापकर देखते हैं कि

(i) नं का $\angle 1 = \angle 2$ लेकिन (ii) नं का $\angle 1 \neq \angle 2$.

सुशोभन स्केल बैठाकर (i) नं. और (ii) नं० के 'F' के नीली भुजाये समान्तर है कि नहीं देखता है।

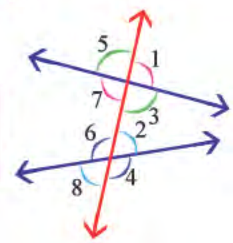
देखते है (i) नं. के 'F' की नीली भुजायें परस्पर समानान्तर। लेकिन (ii) नं 'F' के नीली भुजायें परस्पर समानान्तर होती नहीं हैं।



मैं अपनी कॉपी पर दो सरल रेखाये एक तिर्यक रेखा बनाया और संगत कोणों को चाँद की सहायता से मापा।

और देखा की जब संगत कोणों की माप बराबर होती है तो दोनो सरल रेखायें

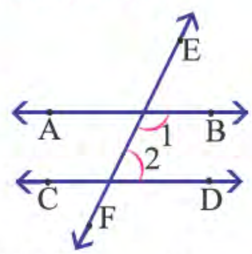
[ ] [समान्तर / असमान्तर] [स्वयं करें]



स्वयं सिद्ध 4 दो सरल रेखाओं को एक सरल रेखा के काटने से यदि एक जोड़ा संगत कोण की माप बराबर हो तो दोनो सरल रेखायें समान्तर होती है

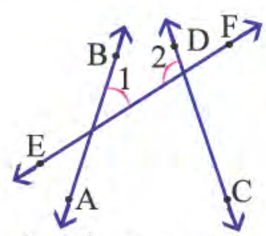
प्रिया श्यामपट्ट पर एक-एक जोड़कर सरल रेखायें एवं उनकी तिर्यक रेखायें खीची। इसके परिणाम स्वरुप बहुत से अन्त: कोण निर्मित हुए।

मैं चाँद की सहायता से मापकर देखा तिर्यक रेखा के एक ही तरफ के अन्त: कोण परस्पर सम्पूरक है कि नहीं। अर्थात् तिर्यक रेखा के एक हीं तरफ के अन्त: कोणों का योग 2 समकोण है या नहीं।



मापकर देखते है $\angle 1 + \angle 2 =$ [ ]

स्केल से मापने पर देखा है कि प्रथम चित्र के AB और CD परस्पर [ ] [समान्तर / असमान्तर]।



मापकर देखते है $\angle 1 + \angle 2 =$ [ ]

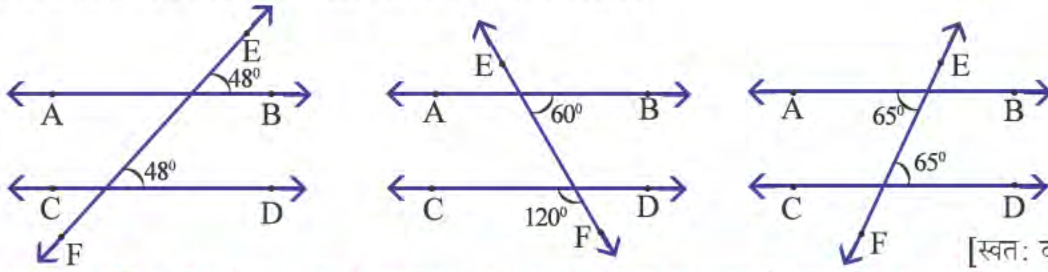
द्वितीय चित्र का AB और CD परस्पर [ ] [समान्तर/असमान्तर]।

पाया कि दो सरल रेखाओं को कोई तिर्यक रेखा के काटने से तिर्यक रेखा के एक ही तरफ के कोणों का योग यदि 2 समकोण है तो दोनों सरल रेखायें परस्पर समानान्तर होती है।

उपपाद्य 3 दो सरल रेखाऐ एक तिर्यक रेखा के काटने से यदि (i) एक जोड़ा एकान्तर कोण बराबर हो (ii) तिर्यक रेखा के एक ही तरफ बने दो अन्त: कोणों का योग 2 समकोण हो तो इन [(i) और (ii)] दोनों के लिए दोनो सरल रेखाएं समानान्तर होती हैं।

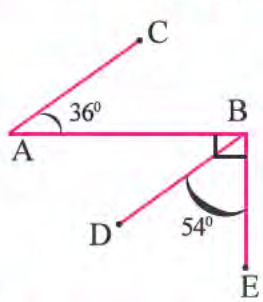
(इस उपपाद्य को स्वयं सिद्ध 4 की सहायता से सिद्ध कर सकते हैं)।

कोण की परिमाप देखकर AB और CD समानान्तर है कि नहीं लिखें।



[स्वत: करें]

प्रयोग : **1** चित्र में BE सरल रेखा खण्ड AB सरल रेखा खण्ड पर लम्ब है। दिखाये कि AC और BD परस्पर समानान्तर सरल रेखा खण्ड हैं।



प्रमाण : $\angle ABE = 90^0, \angle DBE = 54^0$

$\therefore \quad \angle ABD = \angle ABE - \angle DBE$

$= 90^0 - 54^0$

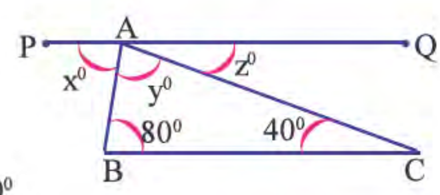
$= 36^0$

पुन:, $\angle CAB = 36^0$

$\therefore \angle ABD = \angle CAB$; लेकिन ये एकान्तर कोण हैं।

$\therefore$ AC और BD परस्पर समान्तर सरल रेखा खण्ड हैं।

प्रयोग : **2** चित्र में PQ|| BC; x^0, y^0 और z^0 के मान लिखे



प्रमाण : PQ|| BC एवं AB उन्हें काटती है।

$\therefore \angle PAB$ = एकान्तर $\angle ABC$.

फलत: $\angle ABC = 80^0$, $\therefore \angle PAB = 80^0$;फलत:, $x^0 = 80^0$

पुन: PQ|| BC एवं AC उन्हें काटती है।

$\therefore \quad \angle QAC$ = एकान्तर $\angle ACB$.

जैसा कि $\angle ACB = 40^0$, फलत:, $\angle QAC = 40^0$. $\therefore\ z^0 = 40^0$

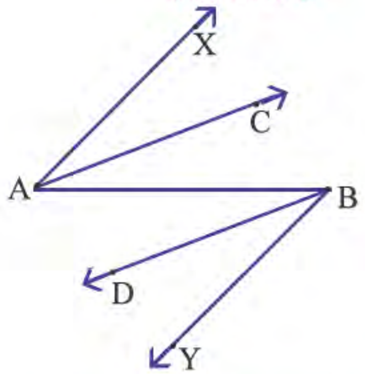
$\angle PAB + \angle BAC + \angle QAC = 180^0$

वा, $80^0 + \angle BAC + 40^0 = 180^0$

वा, $\angle BAC = 180^0 - 120^0 \therefore\ \angle BAC = 60^0 \quad \therefore y^0 = 60^0$

फलत:, $x^0 = 80^0$, $y^0 = 60^0$ एवं $z^0 = 40^0$

प्रयोग: **3** AB सरल रेखा खण्ड के A एवं B बिन्दुओं से AB सरल रेखा खण्ड विपरीत तरफ $\angle BAX$ और $\angle ABY$ दो बराबर कोण बनते है। प्रमाण करें कि, $\angle BAX$ एवं $\angle ABY$ के समद्विभाजक परस्पर समानान्तर होंगे।



प्रदत्त : AB सरल रेखा खण्ड के A एवं B बिन्दु से AB सरल रेखा विपरीत दिशाओं में $\angle BAX$ और $\angle ABY$ दो बराबर कोण बनते है।

अर्थात् $\angle BAX = \angle ABY$

BC और BD क्रमश: $\angle BAX$ और $\angle ABY$ की समाद्विभाजक हैं तो सिद्ध करना है कि—

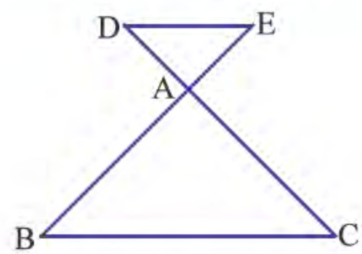
प्रमाण : AC|| BD

प्रमाण : $\angle BAX = \angle ABY$;

फलत: $\frac{1}{2}\angle ABX = \frac{1}{2}\angle ABY$;

$\therefore \angle BAC = \angle ABD$; लेकिन ये एकान्तर कोण है $\therefore$ AC|| BD

प्रयोग : **4** ABC त्रिभुज की BA एवं CA भुजाओं को क्रमश: E एवं D तक इस प्रकार बढ़ाया गया कि DE एवं BC परस्पर समानान्तर हों। सिद्ध करें कि ΔABC और ΔADE बराबर कोणिक त्रिभुज हैं।



प्रदत्त : ΔABC के BA एवं CA भुजाएं क्रमश: E और D तक इस प्रकार बढ़ायी गयी है कि DE|| BC को सिद्ध करना है कि

प्रमाण : ΔABC और ΔADE बराबर कोण की हैं।

प्रमाण : ΔADE और ΔABC में

$\angle AED$ = एकान्तर $\angle ABC$ ($\because$ DE|| BC एवं EB एक तिर्यक है)

$\angle ADE$ = एकान्तर $\angle ACB$ ($\because$ DE|| BC एवं DC एक तिर्यक है)

$\angle DAE$ = सम्मुख $\angle BAC$

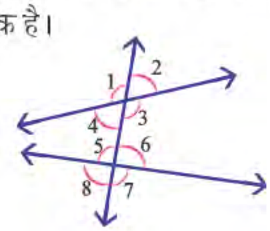
$\therefore \Delta ABC$ एवं ΔADE बराबर कोण की हैं।

> एक Δ के तीनों कोण दूसरे Δ के तीनो कोणों के बराबर हो तो दोनो त्रिभुज बराबर कोणिक होते है

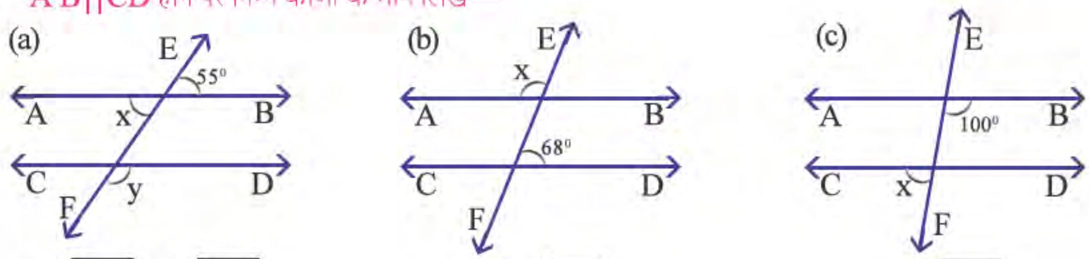
बनाकर देखें — 8.1

1. चन्दा ने लाइन खीचा कॉपी का पन्ना लिया। दोनों लाइनों के बीच एक तिर्यक रेखा खींची। इसके परिणाम स्वरुप 4 जोड़ी संगत कोण 2 जोड़े एकान्तर कोण एवं 2 जोड़े एक ही तरफ के दो-दो अन्त: कोण बने। उन्हे खोजकर उनके नाम लिखें। चाँद की सहायता से जाँच करे कि (i) संगत कोण आपस में बराबर है, (ii) एकान्तर कोण आपस में बराबर है (iii) एक ही तरफ के अन्त: कोणों का योग समकोण अर्थात् और सम्पूरक है।

2. पास के चित्र के कोणों को देखें और संगत कोण, एकान्तर कोण और तिर्यक रेखा के एक ही तरफ के अन्त: कोणों को लिखें।

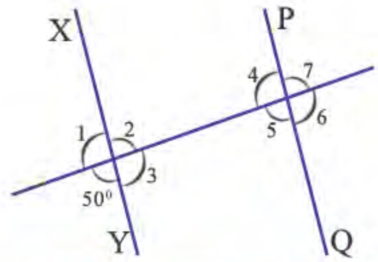


3. A B||CD होने पर निम्न कोणों के मान लिखें—

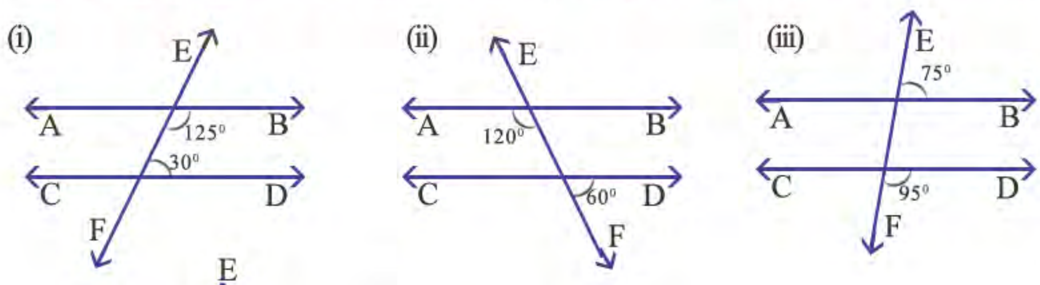


(a) x = ☐, y = ☐ (b) x = ☐ (c) x = ☐

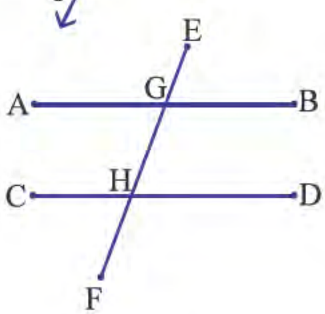
4. पास के चित्र में XY||PQ होने पर शेष 7 कोणों के मान लिखें



5. नीचे की AB एवं CD सरल रेखायें आपस में समान्तर हैं या नहीं कोणों का मान देखकर तर्क के साथ लिखें।

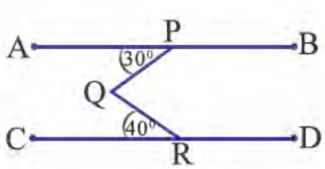


6.

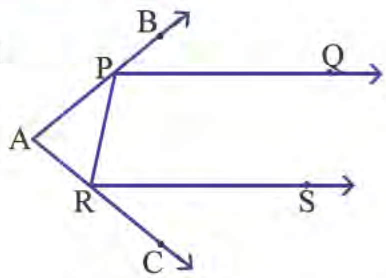


चित्र में AB||CD एवं ∠EGB = 50°; ∠AGE, ∠AGH, ∠BGH, ∠GHC, ∠GHD, ∠CHF एवं ∠DHF का मान लिखें।

7.



चित्र में AB||CD तो ∠PQR का मान लिखें।

8. 

चित्र में PQ||RS, $\angle BPQ = 40^0$, $\angle BPR = 155^0$ एवं $\angle CRS = 70^0$; ΔAPR के कोणों की माप लिखें।

9. AB एवं CD दो समानान्तर सरल रेखाओं के बीच में O एक बिन्दु है। OP तथा OQ क्रमश: AB और CD समानान्तर रेखाओं पर लम्ब है तो सिद्ध करें कि P, O, Q तीनो सम रेखाए बिन्दु हैं।

10. दो कोणों की प्रति जोड़ा भुजायें परस्पर समानान्तर है तो सिद्ध करना है कि दोनों कोण बराबर अथवा परस्पर सम्पूरक हैं।

11. ABCD समानान्तर चतुर्भुज का विकर्ण AC $\angle BAD$ को समद्विखण्डित करता है प्रमाणित करें कि AC विकर्ण $\angle BCD$ को भी समद्विखण्डित करेगा।

12. प्रमाणित करें कि यदि किसी समानान्तर चतुर्भुज का कोई एक कोण समकोण हैं तो उसके प्रत्येक कोण ही समकोण होगें।

9. त्रिभुज की दो भुजायें एवं उनके विपरीत कोणो का सम्बंध

साबिना ने एक ही प्रकार के पतले-पतले रंगीन चौड़े पिचबोर्ड तैयार किया। वह तीन पिचबोर्डो के अन्तिम सिरे को मिलाकर उन्हें पिन से जोड़कर एक सीमाबद्ध चित्र तैयार करने की चेष्टा करती हैं।

उसने किया —

☐ त्रिभुज ☐ त्रिभुज ☐ त्रिभुज

मैं साबिना द्वारा तैयार पिचबोर्डो के द्वारा विभिन्न आकार के छोटे-बड़े समद्विबाहु त्रिभुज तैयार करें।

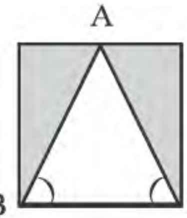
हमारी बहन चाँद की सहायता से उस समद्विबाहु त्रिभुज के कोण को मापी।

देखते है कि प्रत्येक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर लम्बाई की भुजाओं के सामने के कोण का परिमाप ☐ [समान/असमान] [स्वयं चाँद की सहायता से मापकर देखे और लिखे]

तृषा सादे कागज पर ऊपर की तरह विभिन्न आकार के समद्विबाहु त्रिभुज बनायी और काट ली। इस बार इस त्रिभुज को बराबर माप को दोनो भुजाओ में से एक भुजा के साथ दूसरे भुजा को मिलाने पर क्या पायी देखे।

देखता हूँ बराबर भुजाओं के विपरीत दोनो कोण एक दूसरा से पूर्ण रुप से मिल जाता है। (स्वयं करें)

स्वयं से



(1) एक काठ के बोर्ड पर मोटा एक सादा कागज चिपकाया।

(2) उस सादे मोटे कागज पर समद्विबाहु त्रिभुज बनाया एवं नाम लिखा ABC जिसकी $AB = AC$

(3) ट्रेसिंग पेपर $\triangle ABC$ के ऊपर बैठाकर वैसा ही त्रिभुज बना लिया।

(4) ट्रेसिंग पेपर को त्रिभुज ABC काट लिया।

(5) मोड़कर B बिन्दु के साथ C बिन्दु को मिलाकर देखते हैं कि $\angle ABC$ औ $\angle ACB$ दोनो कोण परस्पर पूर्ण रुप से मिल जाते हैं।

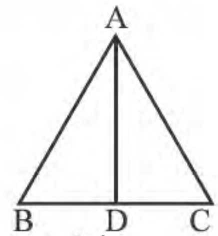
इस प्रकार पाया कि $\angle ABC = \angle ACB$ या त्रिभुज की बराबर लम्बाई वाली भुजाओं के विपरीत कोण परस्पर बराबर होते है।

प्रयोग से पाया कि किसी त्रिभुज के दो भुजा की लम्बाई बराबर होने पर उनके विपरीत बने कोण भी आपस में बराबर माप के होते हैं।

इस बार हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता की शर्तों को और एक बार स्मरण करें।

स्वयं सिद्ध : 5 दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की कोई दो भुजाएं और उनके बीच के कोण का परिमाप दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाई और उनके बीच के कोण की माप के बराबर हो तो दोनो त्रिभुज आपस में सर्वांगसम होते है। (SAS)।

उपपाद्य 4 इस बार हमलोग तर्क के साथ क्रमश: प्रमाणित करने की चेष्टा करें कि— किसी त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाई बराबर होने पर उनके विपरीत के कोण की माप बराबर होते है।



प्रदत्य : ABC एक त्रिभुज जिसमें AB = AC

तो सिद्ध करना है कि : $\triangle$ ABC की लम्बाई बराबर
भुजा AB और AC के विपरीत कोण का परिमाप बराबर अर्थात् $\angle ABC = \angle ACB$

रचना : $\triangle$ ABC के $\angle BAC$ की समद्विभाजक रेखा AD खींचा जो BC भुजा को D बिन्दु पर काटते है।

प्रमाण : $\triangle$ ABD और $\triangle$ ACD के बीच, AB = AC (प्रदत्त)

$\angle BAD = \angle CAD$ [$\because$ AD, $\angle BAC$ की समद्विभाजक]

AD उभयनिष्ट है।

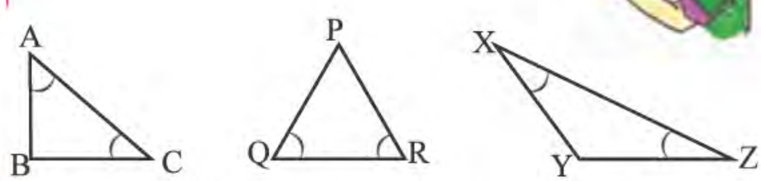
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ [त्रिभुज की भुजा-कोण बाह्य या S-A-S सर्वांगसमता से — स्वयं सिद्ध 5]

$\therefore \angle ABD = \angle ACD$ [सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण]

इसलिए $\angle ABC = \angle ACB$ (प्रमाणित)

तपन MAT एक त्रिभुज बनाया जिसमें MA=MT; हम तर्क के साथ क्रमश: प्रमाणित करें कि $\triangle$MAT की $\angle MAT = \angle MTA$ **[स्वयं करें]**

इस बार हम लोग ऐसे दो त्रिभुज बनायेंगे जिनके दो कोणों की परिमाप बराबर हो। उसकी भुजाओं की लम्बाई स्केल से मापकर देखे।



स्केल से मापकर देखते हैं।

$\triangle$ ABC की AB = ☐, BC = ☐ और CA = ☐

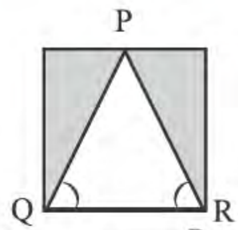
$\triangle$ PQR की PQ = ☐, QR = ☐ और RS = ☐

$\triangle$ XYZ की XY = ☐, YZ = ☐ और ZX = ☐

देखते है त्रिभुज की बराबर परिमाप के कोणो की विपरीत भुजाओं की लम्बाई ☐ [समान/असमान]

उपपाद्य 5 तर्क के साथ स्वयं सिद्ध की सहायता से प्रमाणित कर सकते हैं कि — (i) दो त्रिभुज में एक त्रिभुज के दो कोणो की माप एवं एक भुजा की लम्बाई के बराबर होने पर दोनो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे [AAS]। (ii) दो त्रिभुजो में यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई दूसरे त्रिभुज की तीनो भुजाओं की लम्बाई के अलग-अलग बराबर हो तो दोनो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं [SSS]। (iii) दो समकोण त्रिभुजों। एक त्रिभुज के कोण एवं किसी एक भुजा की लम्बाई दूसरे त्रिभुज के कर्ण एवं किसी एक भुजा की लम्बाई के बराबर होता तो दोनो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं [RHS]।

स्वयं से

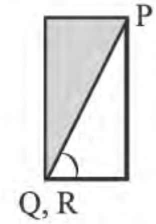


(1) प्रमाणित साइज के बोर्ड पर एक सादा और मोटा कागज चिपकाया।

(2) इस सादे कागज पर $\triangle$ PQR बनाया जिसमे $\angle PQR = \angle PRQ$

(3) एक ट्रसिंग कागज पर $\triangle$ PQR के ऊपर बैठाकर और एक त्रिभुज $\triangle$PQR बनाया।

(4) ट्रेसिंग पेपर पर बने त्रिभुज $\triangle$ PQR को काट लिया।



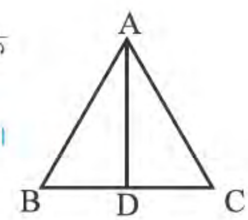
(5) काटे गये $\triangle$ PQR शीर्ष बिन्दु P को उस प्रकार जोड़े कि $\angle PQR$, $\angle PRQ$ को साथ पूर्ण रुप से मिल जाए।

देखते है कि, $\triangle$ PQR के भुजा PQ भुजा PR के साथ पूर्ण रुप से मिल गयी हैं।

$\therefore$ प्रयोग से देखते हैं, PQ = PR

$\therefore$ स्वयं से पाया, एक त्रिभुज के दो कोणो का मान बराबर होने पर उनके विपरीत भुजाओं की लम्बाई बराबर होती हैं।

उपपाद्य 6 तर्क के साथ प्रमाणित करें कि एक त्रिभुज के दो कोणो की माप बराबर होने पर उनकी विपरीत भुजाओं की लम्बाई भी बराबर होती हैं।



प्रदत्त : ABC त्रिभुज में $\angle ABC = \angle ACB$

तो सिद्ध करना है कि $\triangle$ABC के बराबर परिमाप का दो कोण $\angle ABC$ और $\angle ACB$ के विपरीत भुजा की लम्बाई बराबर, अर्थात् AB = AC

रचना : $\angle BAC$ के समद्विभाजक AD खींचा जो BC भुजा को D बिन्दु पर काटती है।

प्रमाण : $\triangle$ABD और $\triangle$ACD के बीच,

$\angle BAD = \angle CAD$ [कारण AD, $\angle BAC$ के समद्विविभाजक हैं]

AD उभयनिष्ट हैं

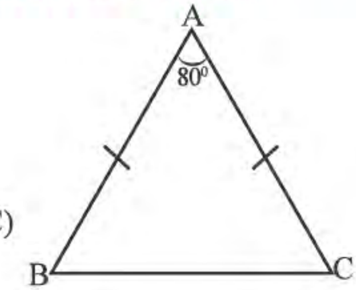
$\angle ABD = \angle ACD$ (प्रदत्त)

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ [(A-A-S) अर्थ त्रिभुज की कोण-भुजा-कोण सर्वांगसम की

$\therefore$ AB = AC संगत भुजायें बराबर होगी] प्रमाणित

सीमा एक $\triangle$ CAT बनाई जिसमे $\angle CAT = \angle CTA$; हम तर्क के साथ क्रमश: प्रमाणित करें कि $\triangle$ CAT की CA = CT

प्रयोग : **1** चित्र में $AB = AC$ एवं $\angle BAC = 80^\circ$; $\angle ABC$ और $\angle ACB$ की माप ज्ञात करें।



प्रमाण : $\angle BAC = 80^\circ$ एवं $AB = AC$

फलत: $\angle ABC = \angle ACB$

$\triangle ABC$ में $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

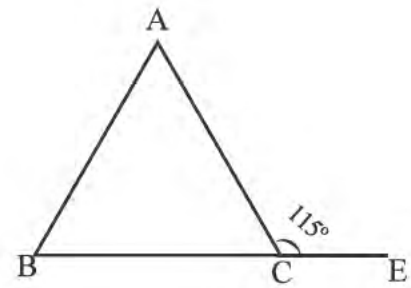
या $\angle ABC + \angle ABC + 80^\circ = 180^\circ$ $(\because \angle ACB = \angle ABC)$

या $2\angle ABC = 180^\circ - 80^\circ$

या $2\angle ABC = 100^\circ$ $\therefore \angle ABC = 50^\circ$

$\angle ABC = \angle ACB$ $\therefore \angle ACB = 50^\circ$

प्रयोग - **2** चित्र में $AB = AC$ एवं $\angle ACE = 115^\circ$, $\triangle ABC$ के कोणों की माप लिखे।



प्रमाण : $\angle ACB + \angle ACE = 180^\circ$

$\angle ACB = 180^\circ - \angle ACE$

$= 180^\circ - 115^\circ$

$= 65^\circ$

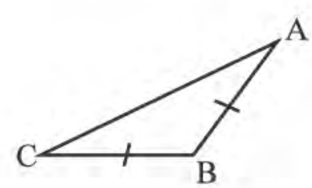
$\angle ABC = \angle ACB \therefore \angle ABC = 65^\circ$

या $65^\circ + 65^\circ + \angle BAC = 180^\circ$

या $\angle BAC = 180^\circ - 130^\circ$ $\therefore \angle BAC = 50^\circ$

फलत: $\angle ABC = \angle ACB = 65^\circ$ एवं $\angle BAC = 50^\circ$

प्रयोग - **3** एक अधिक कोणों के समद्विबाहु त्रिभुज के सूक्ष्म कोण की परिमाप अधिक कोण की परिमाप का $\frac{1}{3}$ भाग है तो त्रिभुज के प्रत्येक कोण का माप लिखे।



प्रमाण : $\triangle ABC$ में $AB = CB$; $\therefore \angle BAC = \angle ACB$

माना, $\angle ACB = x^\circ$

फलत: $\angle BAC = x^\circ$ एवं $\angle ABC = 3x^\circ$

$\triangle ABC$ में $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$

या $3x^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$

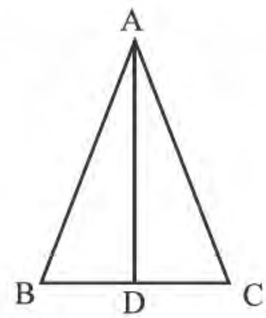
या $5x^\circ = 180^\circ$ $\therefore x^\circ = 36^\circ$

$\therefore$ $3x^\circ = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$

फलत: $\angle ABC = 108^\circ$, $\angle BAC = 36^\circ$, $\angle ACB = 36^\circ$

प्रयोग : **4** सिद्ध करें कि किसी समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष कोण की समद्विभाजक आधार के समकोण पर समद्विभाजित करती हैं। ABC में AB = AC एवं ∠BAC की समद्विभाजक AD आधार को BC पर D बिन्दु पर काटती हैं।

BD = CD एवं ∠ADB = ∠ADC = 90°



प्रमाण : △ABC में AB = AC;

△ABD और △ACD के बीच AB = AC (प्रदत्त)

∠BAD = ∠CAD (∵ AD, ∠BAC की समद्विभाजक)

AD उभयनिष्ठ भुजा

∴ △ABD ≅ △ACD [भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता]

फलत : BD = CD (संगत भुजा)

∠ADB = ∠ADC (संगत भुजा)

∠ADB + ∠ADC = 180°

या, ∠ADB + ∠ADB = 180° (∵ ∠ADB =∠ADC)

या, 2 ∠ADB = 180°

∴ ∠ADB = 90°

फलत : ∠ADC = 90°

∴ समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष कोण की समद्विभाजक आधार को समकोण पर समद्विभाजित करती हैं।

प्रयोग : **5** ABC समकोणीय त्रिभुज में ∠BAC = 90° एवं D, BC विकर्ण पर स्थित एक ऐसे बिन्दु है कि BD = AD; तो सिद्ध करे कि D, BC का मध्य बिन्दु है।

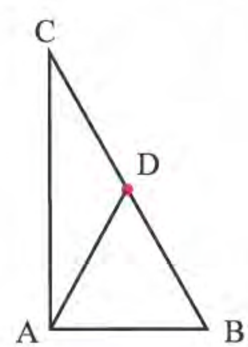
प्रदत्त : △ABC में ∠BAC = 90° एवं D, BC भुजा पर स्थित ऐसा एक बिन्दु है कि AD = BD

तो सिद्ध करना है कि D, BC भुजा का मध्य बिन्दु। अर्थात् DB = CD

प्रमाण : △ABC -में AD = BD ∴ ∠DAB = ∠ABD

△ABC में ∠BAC = 90°; फलत : ∠DAC = ∠BAC – ∠DAB = 90° – ∠DAB

△ABC में ∠BAC = 90°; फलत : ∠ABC + ∠ACB = 90°



अर्थात्, ∠ABD + ∠ACD = 90°

या ∠ACD = 90° – ∠ABD

∴ ∠ACD = 90° – ∠DAB (∵∠ABD =∠DAB)

पुनः, ∠DAC = 90° - ∠DAB

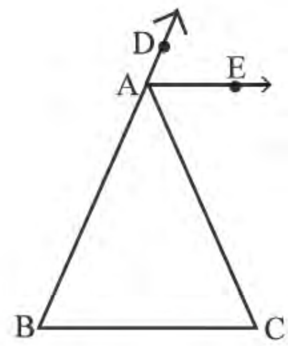
∴ ∠ACD = ∠DAC ; फलत : AD = CD

पुनः, AD = BD ∴ BD = CD

फलत : D, BC भुजा का मध्य बिन्दु हैं।

प्रयोग : **6** प्रमाणित करे कि किसी समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु से आधार के समानान्तर खींची गयी सरल रेखा शीर्ष कोण की बहि: समद्विभाजक होती है।

प्रदत्त : $\triangle ABC$ में $AB = AC$ एवं $AE \parallel BC$



तो सिद्ध करना है कि $\angle DAE = \angle CAE$ अर्थात् AE, शीर्षकोण $\angle BAC$ की बहि: समद्विभाजक

प्रमाण : $\triangle ABC$ में $AB = AC$ फलत: $\angle ABC = \angle ACB$

$AE \parallel BC$ एवं AC छेदक है। फलत: $\angle CAE$ = एकान्तर $\angle ACB$

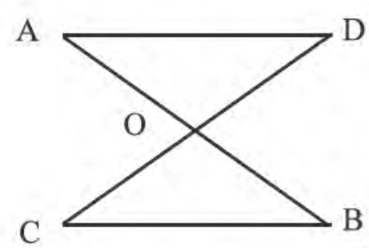
$AE \parallel BC$ एवं BD छेदक है। फलत: $\angle DAE$ = संगत $\angle ABC$

अत: $\angle ABC = \angle ACB$, फलत: $\angle DAE = \angle CAE$ (प्रमाणित)

प्रयोग : **7** दो सरल रेखा AB एवं CD एक दूसरे से O बिन्दु पर समद्विभाजित होते है तो सिद्ध करना है कि $\triangle AOD \cong \triangle BOC$.

प्रदत्त : AB एवं CD दो सरल रेखा एक दुसरे को O बिन्दु पर समद्विभाजित करती है।

अर्थात्, $AO = BO$ एवं $CO = DO$



तो सिद्ध करना है कि $\triangle AOD \cong \triangle BOC$.

प्रमाण : $\triangle AOD$ एवं $\triangle BOC$ में

$AO = BO$

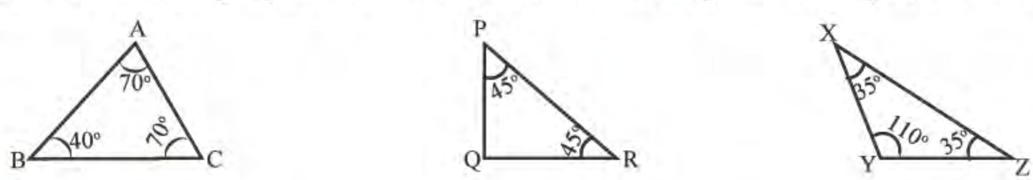
$\angle AOD$ = सम्मुख $\angle BOC$

$DO = CO$

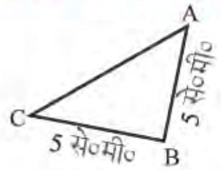
$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC$. (भुजा-कोण-भुजा या S-A-S अनुसार)

बनाकर देखे — 9

1. नीचे के समद्विबाहु त्रिभुजों को देखे और बिना माप के दिखाये कि त्रिभुज की कौन दो भुजाएं बराबर होगी?



2. निम्न समद्विबाहु त्रिभुज को देखें। मापे बिना लिखे कि प्रत्येक त्रिभुज के कौन से दो कोण बराबर होंगे :



3. AB और CD सरल रेखा खण्ड एक दूसरे को O बिन्दु पर समद्विभाजित करते हैं। प्रमाणित करें कि AC और BD सरल रेखा खण्ड एक दूसरे के समानान्तर हैं। ACBD चतुर्भुज किस प्रकार का चतुर्भुज होगा लिखे

4. AB और CD दो समानान्तर सरल रेखाओं के ऊपर E एवं F दो बिन्दु हैं। EF सरल रेखा खण्ड के मध्य बिन्दु O; O बिन्दु से कोई सरल रेखा खण्ड खींचा गया जो AB और CD सरल रेखाओं को क्रमश: P और Q बिन्दुओं पर काटता है। प्रमाणित करे कि, PQ सरल रेखा खण्ड O बिन्दु पर समद्विभाजित होगा।

5. प्रमाणित करें कि किसी समद्विबाहु त्रिभुज के आधार को दोनो तरफ बढ़ाने पर जो दो बहिष्कोण बनते है वे आपस में बराबर होते है।

6. प्रमाणित करें कि समबाहु त्रिभुज की तीनो मध्यिकाओं की लम्बाई बराबर होती है।

7. ABCD समलम्ब चरर्भुज में AD || BC एवं $\angle ABC = \angle BCD$; प्रमाणित करे कि, ABCD एक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज है।

8. ABC समकोण समद्विबाहु त्रिभुज का AB कर्ण है। $\angle BAC$ की समद्विभाजक AD, BC भुजा को D बिन्दु पर काटती हो । सिद्ध करे कि, $AC + CD = AB$

9. ABC एवं DBC दो समद्विबाहु त्रिभुजों BC भुजा के विपरीत दिशा में स्थित हैं। प्रमाणित करे कि, AD, BC भुजा को समकोण पर समद्विभाजित करती है।

10. दो सरल रेखा खण्ड PQ एवं RS एक दूसरे को X बिन्दु पर उस प्रकार काटते हो कि XP = XR एवं $\angle PSX = \angle RQX$ । प्रमाणित करें कि $\triangle PXS \cong \triangle RQX$.

10. त्रिराशिक (समानुपात)

1 अभी हमारे खेती की जमीन में 18 लोग हल चलाते हैं। आगामी कल से हमारे जमीन में 30 लोग हल चलाते है। 18 लोग यदि 12 बीघा जमीन हल से जोत सकते है तो 30 लोग कितने बीघा जमीन को हल से जोत सकते है हिसाब करें।

गणित की भाषा में समस्या होगी,

लोगों की संख्या	जमीन का परिमाण (बीघा)
18	12
30	?

सम्पर्क होता है— लोगों की संख्या बढ़ने पर खेती की जमीन का परिमाण बढ़ेगा एवं लोगों की संख्या कम होने पर खेती की जमीन का परिमाण कम होगा। अत: लोगों की संख्या एवं जमीन का परिमाण सरल समानुपाती होगा।

$\therefore$ 18:30::12:?

निर्णित जमीन का परिमाण = $\frac{\overset{4}{\cancel{12}} \times \overset{5}{\cancel{30}}}{\underset{2}{\cancel{18}}}$ बीघा = 20 बीघा

द्वितीय राशि का अनिर्णित मान = द्वितीय राशि का निर्णित मान × $\frac{\text{प्रथम राशि का एक मान}}{\text{प्रथम राशि का दूसरा मान}}$

दो संपर्कयुक्त चल राशियों के तीन राशियों का मान मालूम रहने पर चतुर्थ चल राशि का मान सहज ही निर्णय कर लिया जायेगा। इसीलिए इस पद्धति को त्रिराशिक पद्धति कहा जाता है।

2 मेरे मित्र राजिया के घर एक कार्यक्रम हो रहा है अत: 7 दिनो से खाने-पीने की व्यवस्था की गई है। 15 लोगों के लिए 7 दिन खाने की व्यवस्था की गई है, लेकिन 21 लोग आ गए है। हिसाब करके देखे उस खाने को 21 आदमी कितने दिनों तक खायेंगे।

गणित की भाषा में समस्या हुई,

मित्रों की संख्या (लोग)	समय (दिन)
15	7
21	?

सम्पर्क होगा— मित्रों की संख्या बढ़ने पर निर्दिष्ट परिमाण का खाना कम दिनों तक चलेगा। अत: लोगों की संख्या तथा दिनों की संख्या व्यस्त समानुपाती होगा।

अत: 15:21 :: ?:7

या, $\frac{15}{21} = \frac{?}{7}$ $\therefore$ समय (?) = $\frac{\overset{5}{\cancel{15}} \times \cancel{7}}{\underset{3}{\cancel{21}}}$ दिन = 5 दिन

$\therefore$ वह खाना 21 लोग कुल 5 दिन खायेंगे।

3 मैं अपने मुहल्ले के बनर्जी बुक स्टाल से 1 दर्जन कॉपी 90 रुपये में खरीदा हूँ। उस प्रकार के 8 कॉपी का मूल्य कितना होगा। त्रिराशिक सूत्र से हिसाब करें।

गणित की भाषा में समस्या हूई,

कॉपी की संख्या (कितनी)	कॉपी का मूल्य (रुपये)
1 दर्जन = 12	90
8	?

सम्पर्क होगा— कॉपी की संख्या बढ़ने पर दाम ____ कॉपी की संख्या कम होने पर दाम ____ (बढ़ेगा / घटेगा)।

$\therefore$ 12:8::90:?

या, कॉपी का दाम (?) = ____ × $\frac{____}{____}$ रुपये $\therefore$ 8 कॉपी का दाम = ____ रुपये।

मैं पाया, ____ राशि ____ मान = ____ राशि ____ मान × $\frac{\text{____ राशि ____ मान}}{\text{____ राशि ____ मान}}$

4 7 हल बनाने में 1771 रुपये खर्च हुआ तो 12 हल बनाने में कितने रुपये खर्च होगा। त्रिराशिक पद्धति से हिसाब करके लिखो।

अधिक संख्या में हल बनाने में ____ (अधिक / कम) रुपये लगेगा।

हल की संख्या और खर्च का परिमाण ____ (सरल / व्यस्त) समानुपाती होगा (स्वयं करें)

5 जिस परिमाण का भोजन 24 लोगों में 20 दिन चलता है, उसी परिमाण का भोजन 40 लोगों में कितना दिन चलेगा। त्रिराशिक सूत्र से हिसाब करें।

एक ही परिमाण का भोजन अधिक लोगों में ____ (अधिक / कम) दिन चलेगा

अत: लोगों की संख्या और दिनों की संख्या ____ (सरल / व्यस्त) समानुपाती होगा (स्वयं करें)

बनाकर देखे — 10.1

1. आज मेरे पिताजी 390 रुपयें में 15 कि० ग्रा० चावल खरीदकर लाये। अगर पिताजी वही चावल 17 कि० ग्रा० खरीदते तो कितने रुपये लगते त्रिराशिक पद्धति से हिसाब करके लिखों।
2. वेंकट मामा ने 20 मीटर छिट के कपड़े से एक ही माप के 4 फ्राक बनाये। इसी प्रकार 12 फ्राक बनाने में कितना कपड़ा लगेगा, त्रिराशिक सूत्र से हल करों।
3. बकूलतला गाँव में एक तालाब को काटने में 30 लोगों को 15 दिनों का समय लगता है। यदि 25 आदमी उस तालाब को काटते तो कितने दिन में काम खत्म होता। त्रिराशिक सूत्र से हल करें।
4. मेरी चाची 40 कि०मी० वेग से गाड़ी चलाकर 5 घंटे में मामा के घर गयी। यदि चाची 50 कि०मी० के वेग से गाड़ी चलाती तो मामा के घर जाने में कितना समय लगता। त्रिराशिक सूत्र से हल करों।
5. मंगलपुर गाँव के एक आश्रय शिविर में 4000 लोगों केलिए 9 दिन का खाना था। 3 दिन के बाद 1000 लोग दूसरे जगह चले गऐ। जो लोग बच गऐ वो लोग बचे हुए भोजन को कितने दिन खायेंगे। त्रिराशिक पद्धति से हल करके लिखें।
6. नसीरपुर गाँव के एक फार्म के 42 सदस्य 24 दिन में फार्म के समस्त जमीन को जोत सकते है। लेकिन 6 सदस्य अचानक अस्वस्थ हो गए। फार्म के समस्त जमीन को जोतने में बचे हुए लोगों को कितने दिन लगेंगे। त्रिराशिक सूत्र से हल करें।
7. एक कारखाने में 1000 यंत्रों को बनाने में 16 मशीनों को 27 दिन का समय लगता है। यदि उस कारखाने में और दो मशीन लगा दिए जाय तो उसी संख्या में यंत्रों को बनाने में कितने दिन लगेंगे। त्रिराशिक सूत्र से हल करके लिखें।
8. नीचे के पारस्परिक सम्पर्कों को देखें, गणित की भाषा में लिखे तथा त्रिराशिक पद्धति से हल करें।

(a)

कलम की संख्या	कुल कलम का दाम (रुपये)
25	112.5
12	?

(b)

वेग (कि०मी०/घंटा)	दूरी (कि०मी०)
9	112.5
12	?

(c)

पम्प की संख्या	सिचाई युक्त जमीन का परिमाण (बीघा)
6	31.2
13	?

(d)

प्रति छात्र पर दैनिक अनाज की मात्रा (ग्रा०)	छात्रों की संख्या
306	425
?	458

6 बापन के घर और पाँचिल की दीवार को गांथना होगा। अत: राजमिस्त्रियों ने दीवार गांथने का काम शुरु किया। यदि 5 राजमिस्त्री 4 दिन में 128 वर्ग मीटर दीवार गांथ सकते है, तो 10 राजमिस्त्री को 320 वर्ग मीटर दीवार गांथने में कितने दिन लगेंगे त्रिराशिक पद्धति से बनाकर लिखें।

गणित की भाषा में समस्या हुई,

प्रथम चरण		द्वितीय चरण	
राजमिस्त्री की संख्या	समय (दिन)	दीवार गांथने का परिमाण (वर्ग मीटर)	समय (दिन)
5	4	128	प्रथम चरण
10	?	320	?

यहाँ तीन विषय है, (i) राजमिस्त्री की संख्या, (ii) समय, (iii) काम का परिमाण।

प्रथम दो चरण में सम्पर्क खोजें

प्रथम चरण— एक ही काम करने के लिए राजमिस्त्री की संख्या बढ़ने पर समय ☐ (अधिक / कम) लगेगा। एवं राजमिस्त्री की संख्या घटने पर समय ☐ (अधिक / कम) लगेगा। राजमिस्त्री की संख्या एवं समय ☐ (व्यस्त/सरल) समानुपाती है।

$\therefore$?:4::5:10

निर्णित समय = $\overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{10}_{\cancel{2}}}$ दिन = 2 दिन।

द्वितीय चरण— राजमिस्त्री की संख्या एक ही रहने पर अधिक परिमाण में काम करने के लिए ☐ (अधिक / कम) समय लगेगा एवं काम का परिमाण कम होने पर ☐ (अधिक / कम) समय लगेगा। राजमिस्त्री की संख्या और काम का परिमाण ☐ (सरल / व्यस्त)समानुपाती है।

अत:, ?:2::320:128

निर्णित समय = $\cancel{2} \times \frac{\cancel{320}^{5}}{\cancel{128}_{64}}$ दिन = 5 दिन।

अत: दोनों चरण एक साथ करने पर पाते है,

$\therefore$ निर्णित समय = $\cancel{4} \times \frac{5}{\cancel{10}} \times \frac{\cancel{320}}{\cancel{128}_{32}}$ दिन। = 5 दिन।

पाते है, $\frac{\text{द्वितीय समय (?)}}{\text{प्रथम समय (4)}} = \frac{\text{प्रथम राजमिस्त्री की संख्या}}{\text{द्वितीय राजमिस्त्री की संख्या}} \times \frac{\text{द्वितीय काम का परिमाण}}{\text{प्रथम काम का परिमाण}}$

(काम का परिमाण एक ही रहने पर राजमिस्त्री की संख्या का समय के साथ व्यस्त समानुपात होगा) (राजमिस्त्री की संख्या एक ही रहने पर काम के परिमाण का समय के साथ सरल समानुपात में होगा)

त्रिराशिक पद्धति में तीन या उससे अधिक राशियों के रहने पर समस्या के समाधान के समय

$$\text{ज्ञातव्य विषय का निर्णय मान} = \text{ज्ञातव्य विषय का ज्ञात मान} \times \frac{\text{प्रथम विषय का एक}}{\text{प्रथम विषय का दूसरा मान}} \times \frac{\text{द्वितीय विषय का एक मान}}{\text{द्वितीय विषय का दूसरा मान}} \times\text{------ इत्यादि}$$

7 रसिदपुर के महेश ग्वाला ने अपने 8 गायों को 15 दिन में 4 बंडल पुआल खिलाया। इसी हिसाब से वर्षा के दिन में 10 गायों को 72 दिन खिलाने के लिए कितने बंडल पुआल लगेंगे। त्रिराशिक पद्धति से हिसाब करके लिखें।

गणित को भाषा में समस्या हुई,

गायों की संख्या	समय (दिन)	कुल परिमान (बंडल)
8	15	4
10	72	?

विषयों में सम्पर्क खोजें

प्रथम चरण— एक ही समय में गायों की संख्या बढ़ने पर पुआल का परिमाण ☐ (बढ़ेगा/घटेगा) एवं गायों की संख्या कम होने पर पुआल का परिमाण ☐ (बढ़ेगा/कम होगा)।

∴ गायों की संख्या के साथ पुआल के परिमाण का सरल सम्पर्क है।

द्वितीय चरण— गायों की संख्या एक ही रहने पर समय के बढ़ने पर पुआल का परिमाण ☐ (बढ़ेगा/घटेगा) एवं समय के घटने पर पुआल का परिमाण ☐ (बढ़ेगा/घटेगा)।

∴ समय के साथ पुआल का परिमाण ☐ (व्यस्त/सरल) सम्पर्क है।

कुल पुआल का परिमाण = $\cancel{4} \times \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{8}_{2}} \times \frac{\cancel{72}^{24}}{\cancel{15}_{3}}$ बंडल = 24 बंडल

पाते है, द्वितीय पुआल का परिमाण = प्रथम पुआल का परिमाण × $\frac{\text{द्वितीय समय}}{\text{प्रथम समय}}$ × $\frac{\text{द्वितीय गायों की संख्या}}{\text{प्रथम गायों की संख्या}}$

(गायों की संख्या एक ही रहने पर समय और पुआल के परिमाण के साथ सरल समानुपात होगा)

(समय एक ही रहने पर गायों की संख्या और पुआल का परिमाण सरल समानुपात में है)

बनाकर देखें — 10.2

1. गाँव के रास्ते को पक्का करने का काम शुरु होगा। तय किया गया कि14 लोग दैनिक 4 घंटा काम करेंगे तो काम 15 दिन में पूरा कर लेंगे। लेकिन 24 लोग दैनिक 7 घंटा काम करना शुरु किए तो काम कितने दिन में पूरा कर लेंगे। त्रिराशिक पद्धति से हल करें।

2. सुभाष चाचा के हाथों लिखी एक 105 पन्ने की पुस्तक के प्रत्येक पन्ने में 25 लाईन है एवं प्रत्येक लाईन में समान रुप से 8 शब्द है। इस पुस्तक को उस प्रकार छपवाये जिससे प्रत्येक पृष्ठ में 30 लाईन रहे एवं प्रत्येक लाईन में समान रुप से10शब्द रहें, तो उस छापी गई पुस्तक में कितने पन्ने होगें त्रिराशिक सूत्र से बताये।

3. एक कृषि फार्म में 540 बीधा जमीन को14 दिन में जोतने होगें। प्रथम 4 दिन में 5 ट्रक्टर 120 बीधा जमीन जोत सकते है। समय पर जोतने का काम खत्म करने के लिए और कितने ट्रक्टर लगेंगे त्रिराशिक सूत्र से हल करके लिखे।

4. 30 लोगों ने 15 दिन में एक गांव के रास्ते का $\frac{3}{7}$ हिस्सा मरम्मत करते है। यदि और 10 लोगों की काम सम्मलित कर लिया जायेगा तो बाकी हिस्से के रास्ते को मरम्मत करने में कितने दिन लगेंगे त्रिराशिक पद्धति से हल करें।

5. 5 हार्सपावर सम्पन्न एक पम्प 8 घंटे में 36000 लीटर जल उठा सकता है। 7 हार्सपावर सम्पन्न पम्प को 63000 लीटर पानी को उठाने के लिए कितने घंटे लगेंगे त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

6. एक कारखाने में 5 हार्सपावर और 3 हार्सपावर के दो मोटर है। 5 हार्सपावर का मोटर को 8 घंटे चलाने पर 20 यूनिट विद्युत खर्च होता है। 3 हार्सपावर के मोटर को 10 घंटा चलाने पर कितने यूनिट विद्युत खर्च होगा त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

7. गोपालनगर के एक तांत कारखाना में 14 तांती 12 दिन में 210 साड़ी बुनते है। पूजा के समय 10 दिन में 300 साड़ी देने का आर्डर मिला। समय से साड़ी देने के लिए और कितने तांती को काम पर रखना पड़ेगा। त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

8. एक संस्था को जहाज से 10 दिन में माल को खाली करने का आर्डर मिला है। इस काम के लिए संस्था ने 280 लोगों को काम पर रखा। 3 दिन में देखा गया कि काम का $\frac{1}{4}$ हिस्सा ही पूरा हुआ हो। तो समय से काम खत्म करने के लिए और कितने लोगों को काम पर रखना होगा। त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

9. एक यंत्र चालित तांत की क्षमता एक हस्त चालित तांत की क्षमता से 2 $\frac{1}{4}$गुणा है। 12 हस्त चालित तांत 1080 मीटर लम्बाई के कपड़े की 18 दिन में बनाते है। 2700 मीटर लम्बे कपड़े को 15 दिनों में पूरा करने के लिए कितने यंत्र चालित तांत लगेगे। त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

10. 25 कृषक एक समवाय समिति के 2400 बीघा जमीन को 36 दिनों में जोत सकते है। समिति ने एक ट्रक्टर खरीदकर देखा कि जमीन को 30 दिन में जोता जा सकता है। तो एक ट्रक्टर की क्षमता कितने कृषकों की क्षमता के बराबर है। त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

11. एक जहाज को कोलकाता से कोचीन जाने में 25 दिन लगता है। जहाज पर 36 नाविकों में से प्रत्येक के लिए 850 ग्रा० खाने की व्यवस्था करके यात्रा शुरु की गयी। लेकिन 13 दिन के बाद इस जहाज पर एक डूबते जहाज के 15 नाविकों को उद्धार करके जहाज पर ले लिया गया तथा जहाज का वेग बढ़ा दिया गया जिससे जहाज 10 दिन में कोचीन पहुँच जाये। अब प्रत्येक नाविक प्रतिदिन कितने परिमाण में खाना खाये कि उस बचे खाने को खाकर सुरक्षित कोचीन पहुँच जाये तथा उस समय खाना भी खत्म हो जाये। त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

12. एक गाँव के 36 लोग प्रतिदिन 6 घंटा काम करके 8 दिन में 120 मीटर रास्ता बनाते है और 6 लोग आकर शामिल हो गए तथा दैनिक काम के परिमाण को और 2 घंटा बड़ा दिए। अब 9 दिन में कितना रास्ता बनाये जा सकते है। त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

13. 250 लोग 50 मीटर लम्बे, 35 मीटर चौड़े एवं 5.2 मीटर गहरे एक तालाब को प्रतिदिन 10 घंटा काम करके 18 दिन में खोद सकते है। 65 मीटर लम्बे, 40 मीटर चौड़े एवं 5.6 मीटर गहरे एक तालाब को 300 लोग प्रतिदिन 8 घंटा काम करके कितने दिन में खोद सकते है। त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

14. नीचे के पारस्परिक संबंधो को देखकर गणित की भाषा में लिखकर त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

(a)

क्षमता(हार्सपावर)	समय (घंटा)	विद्युत खर्च (यूनिट)
5	8	20
3	10	?

(b)

खेत मजदूर की संख्या (लोग)	समय (दिन)	जमीन का परिमाण (बीघा)
5	15	18
10	10	?

11. प्रतिशत

आज खदिनान गाँव के मेले में जायेंगे। भैया के साथ मैं और बहन जायेंगे। भैया के पास 75 रूपये, मेरे पास 50 रूपये एवं बहन के पास 35 रूपये हैं।

1.1 मुझसे भैया के कितने प्रतिशत अधिक है। हिसाब करें।

मुझसे भैया के पास अधिक हैं, 75 रूपये – 50 रूपये = 25 रूपये।

भैया के पास मुझसे अधिक रूपये का प्रतिशत = $\frac{25}{\cancel{50}} \times \overset{2}{\cancel{100}}$ = 50 रूपये।

भैया के पास मुझसे 50% अधिक रूपये है।

> दूसरे तरीके से,
> 50 रूपये में अधिक है 25 रूपये।
> 1 रूपये में अधिक है $\frac{25}{50}$ रूपये।
> 100 रूपये में अधिक है $\frac{25}{50} \times 100$ रूपये = 50 रूपये।

1.2 भैया से मेरा कितना प्रतिशत कम है हिसाब करें।

भैया के 75 रूपये की तुलना में मेरे पास कम है 25 रूपये।

1 रूपये की तुलना में मेरे पास कम है $\frac{\square}{\square}$ रूपये।

100 रूपये की तुलना में मेरे पास कम है $\frac{25}{75} \times 100$ रूपये = $33\frac{1}{3}$ रूपये

भैया से मेरे पास $33\frac{1}{3}$ % कम है।

हम तीनों के पास कुल रूपये है = ($\square$ + $\square$ + $\square$) रूपये = $\square$ रूपये

भैया ने हिसाब करके देखा, मेला जाने के रास्ते में कुल रूपये का 10% खर्च हुआ है।

1.3 हिसाब करके देखें, मेला जाने के रास्ते में हमारे कितने रूपये खर्च हुए।

$10\% = \frac{10}{100}$ भाग $= \frac{1}{10}$ भाग।

$\therefore$ कुल रूपये का $\frac{1}{10}$ भाग मेला जाने के रास्ते में खर्च हुआ।

अत: 160 रूपये का 10% = $(160 \times \frac{10}{100})$ रूपये = $\square$ रूपये

$\therefore$ मेला जाने के रास्ते में 16 रूपये खर्च हुआ।

मेला में मेरे मित्र सुमित से मुलाकात हुई।

हम 4 लोग झुले पर चढ़े। इसलिए हमारा 40 रूपये खर्च हुआ।

1.4 हिसाब करके देखें झुले पर चढ़ने के लिए हमारे कुल रूपये का कितना प्रतिशत खर्च हुआ।

160 रूपये में खर्च हुआ $\square$ रूपये

1 रूपये में खर्च हुआ $\frac{\square}{\square}$ रूपये

$\square$ रूपये में खर्च हुआ $\frac{40}{160} \times 100$ रूपये =25 रूपये

$\therefore$ कुल रूपये का 25% झुला झुलने मे खर्च हुआ।

हमने तय किया कि हमारे कुल रूपये का 35% मेला में खाने-पीने पर खर्च करेगें।

1.5 हिसाब करके देखे मेले में कितना खर्च हुआ

160 रूपये का 35% = $(\square \times \frac{\square}{\square})$ रूपये = $\square$ रूपये

$\therefore$ मेला में खाने-पीने में $\square$ रूपये खर्च हुआ।

मैने 24 रूपये में कांच की चूड़ी खरीदा।

1.6 हिसाब करके देखें चूड़ी खरीदने में कुल रूपये का कितना प्रतिशत खर्च किए।

160 रूपये में से कांच की चूड़ी खरीदने पर खर्च किया $\square$ रूपये।

1 रूपये में से कांच की चूड़ी खरीदने पर खर्च किया $\frac{\square}{\square}$ रूपये।

100 रूपये में से कांच की चूड़ी खरीदने पर खर्च किया $\square$ रूपये (स्वयं करें)।

$\therefore$ कांच की चूड़ी खरीदाने के लिए कुन रूपये दिया $\square$% खर्च किया।

1.7 मेरे भैया ने 20 रूपये की 1मिट्टी का फूलदानी खरीदा। मिट्टी की फूलदानी खरीदने में भैया ने कुल रूपये का कितना प्रतिशत खर्च किया हिसाब करें। (स्वयं करें)

पश्चिम पाड़ा मैदान में हम फुटबाल खेलते है। वहाँ एक लम्बा बाँस का 30% हिस्सा मिट्टी के नीचे गाड़ा गया है।

2.1 बाँस का कितना भाग मिट्टी के नीचे है हिसाब करके देखें।

बाँस का 30% मिट्टी के नीचे है।

$\therefore$ मिट्टी के नीचे है बाँस का 30% $=\frac{30}{100}$ हिस्सा $=\frac{3}{10}$ हिस्सा

2.2 नसरीन ने बाँस के $\frac{1}{20}$ भाग को सफेद रंग से रंग दिया। नसरीन बाँस का कितना भाग सफेद रंग से रंग किया देखे।

$\therefore$ नसरिन बाँस का 5 भाग या 5% सफेद रंग किया।

2.3 मैं बाँस की कुल लम्बाई का 15% लाल एवं $\frac{1}{5}$ हिस्सा हरे रंग से रंगा।

$\therefore$ मैं बाँस की कुल लम्बाई का $\frac{\square}{\square}$ हिस्सा लाल रंग किया, लेकिन बाँस की कुल लम्बाई का कितना प्रतिशत पीला रंग से रंग किया हिसाब करके देखें। [स्वयं करें]

2.4 बाँस अगर 2 मीटर लम्बा है और 38 से०मी० पीला रंग करते है तो बाँस की कुल लम्बाई का कितना प्रतिशत पीला रंग किया, हिसाब करके बताओं। (स्वयं करें)

3 हावड़ा स्टेशन से ट्रेन वर्द्धमान जायेगी। कार्ड लाइन में हावड़ा से वर्द्धमान की दूरी 85 कि० मी० है। लेकिन मेन लाईन से वह दूरी 5% अधिक है। मेन लाईन में हावड़ा से वर्द्धमान की दूरी समानुपात की सहायता से निकालो।

मेन लाईन से वह दूरी 5% अधिक है।

अर्थात्, कार्ड लाईन की दूरी 100 कि० मी० होने पर मेन लाइन की दूरी 5 कि० मी०अधिक है।

अर्थात्, मेन लाईन की दूरी होगा (100 + 5) कि० मी० = 105 कि० मी०।

गणीत की भाषा में समस्या हुई,

कार्ड लाईन में दूरी (कि० मी०)	मेन लाइन में दूरी (कि० मी०)
100	100 + 5 = 105
85	?

हावड़ा से वर्द्धमान कार्ड लाइन की दूरी बढ़ने/छटने पर मेन लाईन की दूरी क्रमश: $\square$ या $\square$।

कार्ड लाईन की दूरी और मेन लाईन की दूरी $\square$ (सरल/व्यस्त) संपर्क है।

अत: 100 : 85 : : 105 : ?

$\therefore$ मेन लाईन की दूरी $=\frac{\overset{17}{\cancel{85}}\times\overset{21}{\cancel{105}}}{\underset{4}{\cancel{100}}_{\cancel{20}}}$ कि० मी० = 89.25 कि० मी०।

दूसरे तरीके यानी ऐकिक नियम से,—

कार्ड लाईन की दूरी 100 कि० मी० होने पर मेन लाईन की दूरी 105 कि० मी०

कार्ड लाईन की दूरी 1 कि० मी० होने पर मेन लाईन की दूरी $\frac{105}{100}$ कि० मी०

कार्ड लाईन की दूरी 85 कि० मी० होने पर मेन लाईन की दूरी होगी $\square \times \frac{\square}{\square}$ कि० मी० = $\square$ कि०मी०

4 फरीदपुर के नियामत चाचा अपने जमीन में अधिक फलनशील धान का बीज बोया। इसके फलस्वरुप धान के फसल में 30% की वृद्धि हुई लेकिन इसके लिए खर्च में 35% की वृद्धि हुई। आगे जिस जमीन में 450 रूपये खर्च करके 1220 रूपये का फसल मिलता है, अब उसी जमीन पर नियामत चाचा की आय पहले की तुलना में कितना अधिक होगा हिसाब करें।

अधिक फलनशील धान बीज व्यवहार के कारण खेती में कितना खर्च बढ़ा है त्रिराशिक पद्धति से हिसाब करके लिखें।

गणित की भाषा में समस्या हुई,

अधिक फलनशील धान बीज का उपयोग करने के पहले का खर्च (रू०)	अधिक फलनशील धान बीज करने पर वर्तमान खर्च (रू०)
100	135
450	?

अधिक फलनशील धान बीज व्यवहार करने के आगे का खर्च और वर्तमान खर्च परस्पर $\square$ (सरल / व्यस्त) सम्पर्क है।

∴ अधिक फलनशील धान बीज व्यवहार करने से वर्तमान खर्च = 135 × $\frac{450}{100}$ रूपये

= $\square$ रूपये।

दूसरे तरीके यानी ऐकिक नियम से बनाकर देखें —

अधिक फलनशील धान बीज व्यवहार करने के आगे,

100 रूपये खर्च करने पर वर्तमान खर्च 135 रूपये।

1 रूपये खर्च करने पर वर्तमान खर्च $\frac{\square}{\square}$ रूपये।

450 रूपये खर्च करने पर वर्तमान खर्च $\frac{135 \times \cancel{450}^{9}}{\cancel{100}_{2}}$ रूपये = $\square$ रूपये

अधिक फलनशील धान बीज व्यवहार करने पर धान का कितना अधिक फलन हुआ त्रिराशिक पद्धति से हिसाब करके लिखें।

धान के फसल में 30% बढ़ा है अर्थात् आगे धान का फलन 100 रूपये की होने पर अब हुआ है। (100 + 30) रूपये = 130 रूपये।

गणित की भाषा में समस्या हुई,

अधिक फलनशील धान बीज के व्यवहार के आगे का फलन (रूपये)	अधिक फलनशील धान बीज व्यवहार करने पर वर्तमान फलन(रूपये)
100	130
1220	?

अधिक फलनशील धान बीज व्यवहार करने के पहले धान के फलन के साथ वर्तमान धान के फलन में $\square$ (सरल / व्यस्त) सम्पर्क है।

जबकि आगे के धान के फलन के परिमाण में बढ़ोत्तरी हुई है (अर्थात् 100 रूपये से 1220 रूपये हुआ है)

अत: वर्तमान धान के फलन के परिमाण भी $\square$ (बढ़ेगा / घटेगा)।

अधिक फलनशील धान बीज व्यवहार करने पर वर्तमान फलन होगा = $\square \times \frac{1220}{100}$ रूपये =1586 रूपये।

दूसरे तरीके यानी ऐकिक नियम से बनाकर देखें—

अधिक फलनशील धान बीज व्यवहार करने के पहले,

100 रूपये का फसल होने पर वर्तमान फलन होगा 130 रूपये का

1 रूपये का फलन होने पर वर्तमान फलन होगा $\frac{130}{100}$ रूपये का

1220 रूपये के फलन पर वर्तमान फलन होगा = $\frac{130 \times 1220}{100}$ रूपये का

= $\square$ रूपये का।

अधिक फलनशील धान बीज के व्यवहार करने से पहले नियामत चाचा की आय 1220 रूपये – 450 रूपये

= $\square$ रूपये।

अब आय होगा = ($\square$ – $\square$) रूपये।

आय अधिक होगा = ($\square$ – $\square$) रूपये।

5 पहलमपुर की उमा देवी ने अपने जमीन पर अधिक फलनशील धान का बीज व्यवहार किया है। जिससे धान के फलन में 20% वृद्धि हुई। लेकिन इनके लिए धान की खेती पर 25% खर्च बढ़ गया। पहले वे 600 रूपये खर्च करके 1560 रूपये का धान पाती थी। अभी अधिक फलनशील धान बीज का व्यवहार करके पहले की तुलना में कितना अधिक आय करेंगे हिसाब करके देखें — (स्वयं करें)।

6 आज मैं अपने घर से स्टेशन जल्दी पहुँचुगा। यदि घर से स्टेशन जाने के समय में 20% कम करना चाहता हूँ तो मेरे गाड़ी का वेग कितना बढ़ाना होगा।

माना, मेरे घर से स्टेशन की दूरी 100 इकाई/सेकेण्ड वेग से जाने पर 100 सेकेण्ड समय लगेगा।

$\therefore$ गणित की भाषा में समस्या हुई,

समय (सेकेण्ड)	वेग (इकाई / सेकेण्ड)
100	100
100 – 20 = 80	?

एक ही दूरी कम समय मेंय करने के लिए वेग ☐ (बढ़ाना / घटाना) होगा।

निर्धारित दूरी जाने के लिए समय के साथ वेग का ☐ (सरल / व्यस्त) सम्पर्क होगा।

त्रिराशिक पद्धति से हिसाब करे ☐ 80 सेकेण्ड में पहुँचने के लिए गाड़ी का वेग होगा ☐ (इकाई / सेकेण्ड)।

ऐकिक नियम से देखें—

100 सेकेण्ड में पहुँचने के लिए गाड़ी का वेग होगा 100 इकाई/सेकेण्ड

1 सेकेण्ड में पहुँचने के लिए गाड़ी का वेग होगा 100 × 100 इकाई/सेकेण्ड

80 सेकेण्ड में पहुँचने के लिए गाड़ी का वेग होगा $\frac{{}^{25}\cancel{100} \times \cancel{100}^{5}}{\cancel{80}_{4}}$ इकाई/सेकेण्ड

= 125 इकाई/सेकेण्ड

∴ घर से स्टेशन जाते समय 20% कम करने के लिए गाड़ी का वेग बढ़ेगा

(125 इकाई/सेकेण्ड – 100 इकाई/सेकेण्ड) = 25 इकाई/सेकेण्ड

अर्थात् वेग 25% बढ़ाना होगा

यह दूरी जाने के समय में 10% समय कम करने के लिए मेरी गाड़ी का वेग कितना बढ़ाना होगा हिसाब करे। **[स्वयं करें]**

7 प्याज के दाम में 20% की वृद्धि हुई है। रमेन बाबू ने तय किया है कि वे अपने घर के मासिक प्याज के खर्च को अपरिवर्तित रखेंगे। अत: वे प्रति महीने प्याज का व्यवहार कितना प्रतिशत कम करेंगे।

माना, रमेन बाबू पहले प्रति माह 100 रुपये में 100 इकाई प्याज पर खर्च करते थे।

अब प्याज का दाम 20% बढ़ गया है अर्थात् वर्तमान में 120 रुपये में 100 इकाई प्याज खरीदेंगे।

गणित की भाषा में समस्या हुई,

प्याज का खर्च (रु०)	प्याज का परिमाण (इकाई)
120	100
100	?

ऐकिक नियम से बनाकर देखे—

अभी 120 रु० में मिलता है 100 इकाई प्याज

अभी 1 रु० में मिलता है $\frac{100}{120}$ इकाई प्याज

अभी 100 रु० में मिलता है $\frac{{}^{25}\cancel{100} \times \cancel{100}^{10}}{\cancel{120}\ \cancel{12}_{3}}$ इकाई प्याज

$= 83\frac{1}{3}$ इकाई प्याज

प्रत्येक महीने रमेन बाबू प्याज का व्यवहार कम करेंगे = 100 इकाई – $83\frac{1}{3}$ इकाई = $(100 - 83\frac{1}{3})$इकाई

$= 16\frac{2}{3}$ इकाई

रमेन बाबू प्याज का व्यवहार कम करेंगे $16\frac{2}{3}$ %

यदि रमेन बाबू प्याज का मासिक व्यवहार 20% कम करें तब उनकी मासिक प्याज खर्च कितना प्रतिशत कम होगा। देखे:

गणित की भाषा में समस्या,

प्याज का परिमाण (इकाई)	प्याज का मूल्य(रुपये)
100	120
20% कम पर खर्च (100 − 20) = 80	?

(स्वयं करें)

बनाकर देखें — 11

1. मेरे पास 50 रुपये है। 50 रुपये का12% मैंनें कलम खरीदने पर खर्च किया। तो मैं कितने रुपये की कलम खरीदा निकाले।
2. विदेश से एक मशीन यहाँ लाने पर 120% टैक्स देना पड़ता है। यदि मशीन का मूल्य विदेश में 3,00,000 रुपये हो तो कर देने के बाद यहाँ मशीन का दाम कितना होगा।
3. हिसाब करके मान लिखों :

   (i) 80 रुपये का 15% (ii) 215 रुपये का 12% (iii) 37.8 मीटर का 110% (iv) 480 ग्राम का 200%
4. (i) 2.25 रुपये, 5 रुपये का कितना प्रतिशत है।

   (ii) 85 ग्राम , 17 कि०ग्रा० का कितना प्रतिशत है।

   (iii) 2 कि०ग्रा० 250 ग्रा०, 0.72 क्विंटल का कितना प्रतिशत है।
5. नीचे की तालिका पूर्ण करें :

प्रतिशत	भिन्न	दशमलव भिन्न
15	$\frac{3}{20}$	0.15
$22\frac{1}{3}$		
	$2\frac{1}{3}$	
	$\frac{1}{5}$	
		0.12
		3.125
125		

6. जल में हाइड्रोजन और आक्सीजन का अनुपात 2 : 1 है। जल के कुल परिमाण में हाइड्रोजन और अक्सीजन का प्रतिशत कितना होगा लिखे।
7. हृदयपुर के एक कारखाने में पहले दैनिक 1500 बोतल बनता था। अभी दैनिक 1695 बोतलें बनती हो तो उस शीशे के कारखाने में उत्पादन कितना प्रतिशत बढ़ा है, लिखे।

8. साधारणत: वायु में नाइट्रोजन, आक्सीजन और कार्बन-डाई-अक्साइड गैस का परिमाण क्रमश: 75.6%, 23.04% और 1.36%; 25 मीटर वायु में कौन सा गैस कितना है हिसाब करके लिखे।

9. तृषा ने मिलन दादा के पुस्तक की दुकान से एक पुस्तक खरीदा। पुस्तक के ऊपर लिखे मूल्य पर क्रमश (एक के बाद) 10% और 5% की छूट दिया। पुस्तक का मूल्य 200 रुपये हो तो तृषा ने मिलन दादा को कितने रुपये दिया।

10. एक वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुजा की लम्बाई 10% बढ़ाया। उस वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना प्रतिशत बढ़ा। त्रिराशिक सूत्र से हल करें।

11. समय पर विद्युत बिल जमा करने पर 15% छूट मिलता है। समय पर बिल देकर मेरी चाची 54 रुपये का छूट पायी। विद्युत बिल कितने रुपये का था निकलें।

12. चीनी का मूल्य 20% बढ़ गया है। अत: चीनी का मासिक खर्च अपरिवर्तित रखकर चीनी का मासिक व्यवहार का परिमाण कितना कम करना होगा। हिसाब करके बताओ।

13. जल जमकर बर्फ बनने से आयतन में 10% की बढ़ोतरी होती है। यदि वह वर्फ गलकर पानी बन जाये तो उसके आयतन में कितने प्रतिशत की कमी आयेगी हिसाब करके लिखें।

14. उत्पल बाबू अधिक फलनशील धान के बीज का व्यवहार करके धान के फलन में 55% की वृद्धि पाते है। लेकिन उसके लिए खेती के खर्च में 40% की वृद्धि होती है। पहले उत्पल बाबू अपने खेती पर 1200 रुपये खर्च करके 3000 रुपये का धान पाते थे। अब अधिक फलनशील बीज व्यवहार करके उनकी आमदनी का परिमाण बढ़ेगा या कम होगा। हिसाब करके लिखें।

15. एक विधान सभा केन्द्र के 80% वोट दाताओं ने वोट दिया है। विजयी प्रार्थी ने प्रदत्त वोटो का 65% वोट पाया है। तो उन्होंने कुल वोट का कितना प्रतिशत पाया है बताओं।

16. इस वर्ष नन्दलाल उच्च माध्यमिक विद्यालय के 85% परीक्षार्थियों ने हिन्दी में, 70% गणित में एवं 65% दोनो विषयों में A+ पाये है। पराक्षार्थियों की संख्या यदि 120 हो तो हिसाब करके देखें कितने परीक्षार्थी—

(i) दोनो विषयों में A+ पाये हैं

(ii) केवल गणित में A+ पाये हैं

(iii) केवल हिन्दी में A+ पाये हैं

(iv) दोनो विषयों में A+ नहीं पाये हैं

17. अमीना बीबी का वेतन पहले 20% बढ़ गया पिर 20% कम हो गया। अमीना बीबी का वतन कितना प्रतिशत परिवर्तन हुआ हिसाब करके लिखे।

18. एक आयत क्षेत्र की लम्बाई को 15% बढ़ाया गया तथा चौड़ाई 15% कम किया गयाा। तो आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल कितने प्रतिशत बढ़ा या घटा हिसाब करके बताएँ।

19. एक घर की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 15 मी०, 10 मी० एवं 5 मी० है। यदि लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई में से प्रत्येक को 10% बढ़ा दिया गया तो चार दीवारों का क्षेत्रफल कितने प्रतिशत बढ़ेगा हिसाब करके देखों।

20. वार्षिक क्रीड़ा प्रतियोगिता में 20% छात्र 100 मीटर दौड़, 15% छात्र 200 मीटर दौड़ एवं 10% छात्र लम्बी कूद में भाग लिये। 5% छात्रों ने तीनों खेल में भाग लिया। विद्यालय के छात्रों की संख्या 780 हो तो कितने छात्रों ने किसी भी खेल में भाग नहीं लिए, बताएं। (किसी भी विद्यार्थी ने एक साथ दो खेलों में भाग नहीं लिया था।)

12. मिश्रण

हमारे मुहल्ले के मोड़ पर नीलमणि काका की चाय की दुकान है। मैं और मेरा भाई छुट्टी के दिन अपनी पढ़ाई पूरी करके काका के दुकान पर कभी-कभी जाते है। हम काका बाबू को विभिन्न रुप से सहायता करते है।

आज रविवार है, हम काका के साथ दुकान पर गए। हमने देखा कि काका ने 1 नं० डिब्बे में कुछ दार्जिलिंग चाय के साथ आसाम चाय को मिलाये।

लेकिन इस तरह क्यों मिलाते है ?

बहुत से लोग इसी मिश्रित चाय को खरीदते है। इसीलिए 1 नं० डिब्बे में दार्जिलिंग और आसाम चाय मिलाकर रखता हूँ।

तो 2 नं० डिब्वे में किस प्रकार की चाय है

यहाँ भी दार्जीलिंग और आसाम चाय को दूसरे अनुपात में मिलाकर रखा है।

1 न० चाय के डिब्बे में आसाम चाय और दार्जिलिंग चाय के परिमाण का अनुपात 5 : 2

2 न० चाय के डिब्बे में आसाम चाय और दार्जिलिंग चाय के परिमाण का अनुपात 2 : 1

इन विभिन्न गुण और मान के चाय के विभिन्न परिमाण में मिलाकर किस किस्म की चाय पाया ? इस प्रकार के मिलावट को क्या कहते है ?

विभिन्न गुणों और मान के चाय को विभिन्न परिमाण में मिलाकर क्या नये किस्म की चाय ? इस प्रकार की मिलावट को क्या कहते है ?

समझा, 1 न० डिब्बे के मिश्रित चाय में आसाम चाय के परिमाण का आनुपातिक भाग = $\frac{\square}{\square + \square} = \frac{5}{7}$

1 न० डिब्बे के मिश्रित चाय में दार्जिलिंग चाय के परिमाण का आनुपातिक भाग = $\frac{\square}{\square}$

2 न० डिब्बे के मिश्रित चाय में आसाम चाय के परिमाण का आनुपातिक भाग = $\frac{\square}{\square + \square} = \frac{2}{3}$

2 न० डिब्बे के मिश्रित चाय में दार्जिलिंग चाय के परिमाण का आनुपातिक भाग = $\frac{\square}{\square}$

1 1 न० डिब्बे में 21 किग्रा० मिश्रित चाय में किस परिमाण में आसाम चाय और दार्जिलिंग चाय है हिसाब करें।

1 न० डिब्बे में 21 किग्रा० चाय में आसाम चाय $= \overset{3}{\cancel{21}}$ किग्रा० $\times \frac{5}{\cancel{7}}$

= 15 किग्रा०

एवं दार्जिलिंग चाय $= \overset{3}{\cancel{21}}$ किग्रा० $\times \frac{2}{\cancel{7}}$

= ☐ किग्रा०।

2 2 न० डिब्बे के 21 किग्रा० चाय में कितना आसाम चाय और कितना दार्जिलिंग चाय है हिसाब करके लिखें।

2 न० डिब्बे में 21 किग्रा० चाय में आसाम चाय = ☐ $\times \frac{2}{3}$ किग्रा०

= ☐ किग्रा०

एवं दार्जिलिंग चाय = ☐ $\times \frac{1}{3}$ किग्रा०

= ☐ किग्रा०

3 3 न० डिब्बे में आसाम चाय और दार्जिलिंग चाय के परिमाण का अनुपात 3:2 हो, तो 25 किग्रा० मिश्रित चाय में कितना किग्रा० आसाम चाय और दार्जिलिंग चाय है लिखे। [स्वयं बनायें]

4 3 न० डिब्बे में 25 किग्रा० मिश्रित चाय में यदि और 7 किग्रा आसाम चाय को मिलाया जाय तो 3 न० डिब्बे के मिश्रित चाय में आसाम चाय और दार्जिलिंग चाय के परिमाण का अनुपात कितना होगा हिसाब करके लिखें।

3 न० डिब्बे के मिश्र चाय में आसाम चाय है = 15 किग्रा०

एवं दार्जिलिंग चाय है = 10 किग्रा०

7 किग्रा० आसाम चाय मिलाने पर कुल आसाम चाय का परिमाण = 15 किग्रा० + 7 किग्रा०

= ☐ किग्रा०।

अब 3 न० डिब्बे में मिश्रित चाय का परिमाण : दार्जिलिंग चाय का परिमाण

= 22:10 = 11:5

5 यदि 3 न० डिब्बे में मिश्रित चाय में 7 किग्रा० आसाम चाय न मिलाकर 2 किग्रा० दार्जिलिंग चाय मिलाया जाता तब नये मिश्रित चाय में आसाम चाय और दार्जिलिंग चाय के परिमाण का अनुपात कितना होता हिसाब करके लिखो। [स्वयं बनायें]

6 1 न० डिब्बे के मिश्रित चाय में कितना दार्जिलिंग चाय मिलाने पर मिश्रित चाय और दार्जिलिंग चाय के परिमाण का अनुपात 5:3 होगा लिखो।

माना x किoग्राo दार्जिलिंग चाय मिलाया जायेगा।

$\therefore$ x किoग्राo दार्जिलिंग चाय मिलाने पर कुल दार्जिलिंग चाय का परिमाण $= (6 + x)$ किoग्राo

अब नए मिश्रित चाय में आसाम चाय का परिमाण : दार्जिलिंग चाय का परिमाण $= 15 : (6 + x)$

प्रश्नानुसार, $\frac{15}{6+x} = \frac{5}{3}$

या, $5(6 + x) = 3 \times 15$

या, $30 + 5x = 45$

या, $5x = 45 - 30$

या, $5x = 15$

या, $x = \frac{15}{5}$ $\therefore x = 3$

$\therefore$ 1 न० डिब्बे में मिश्रित चाय में और 3 किoग्राo दार्जिलिंग चाय मिलाने पर नए मिश्रण में आसाम चाय एवं दार्जिलिंग चाय के परिमाण का अनुपात 5 : 3 होगा।

7 2 न० डिब्बे में मिश्रित चाय में कितने किoग्राo दार्जिलिंग चाय मिलाने पर नए मिश्रित चाय में आसाम चाय और दार्जिलिंग चाय के परिमाण का अनुपात 7 : 4 होगा हिसाब करके लिखों। [स्वयं करें]

8 मैनें घर पर दो प्रकार का शर्बत बनाया है। इस दो प्रकार के शर्बत में सिरप और जल का परिमाण क्रमश: 2:7 एवं 1:5 है। प्रथम प्रकार के शर्बत में 27 लीटर के साथ द्वितीय प्रकार के शर्बत का 18 लीटर मिलाने पर नए मिश्रित शर्बत में सिरप और जल के परिमाण का अनुपात कितना होगा हिसाब करके लिखों।

प्रथम प्रकार के शरबत में सिरप के परिमाण का अनुपातिक भाग $= \frac{2}{2+7} = \frac{\square}{\square}$

एवं जल के परिमाण के अनुपात का भाग $= \frac{\square}{\square}$

$\therefore$ प्रथम प्रकार के 27 लीटर शर्बत में सिरप का परिमाण $= \frac{2}{\cancel{9}} \times \cancel{27}^{3}$ लीटर

$= 6$ लीटर

एवं जल के परिमाण $= \frac{7}{9} \times 27$ लीटर

$= 21$ लीटर

इसी प्रकार द्वितीय प्रकार के शर्बत में सिरप के परिमाम का अनुपातिक भाग $= \frac{\square}{\square}$

एवं जल के परिमाण का अनुपातिक भाग = $\frac{\square}{\square}$

$\therefore$ द्वितीय प्रकार के 18 लीटर शर्बत में सिरप का परिमाण = □ लीटर

एवं जल का परिमाण = □ लीटर

$\therefore$ नए मिश्रण में सिरप का परिमाण = 6 लीटर + 3 लीटर = □ लीटर

एवं जल का परिमाण = 21 लीटर + 15 लीटर = □ लीटर

$\therefore$ नए मिश्रण में सिरप का परिमाण : जल का परिमाण = 9 : 36 = 1 : 4

9 ऊपर के दोनो प्रकार के शर्बत को किस परिमाण में मिलाने पर सिरप और जल के परिमाण का अनुपात 5:21 होगा हिसाब करके लिखने की कोशिश करें।

माना x लीटर प्रथम प्रकार के शर्बत के साथ y लीटर द्वितीय प्रकार का शर्बत मिलाया गया।

$\therefore$ प्रथम प्रकार x लीटर शर्बत में सिरप है $= \frac{2}{9} \times x$ लीटर

$= \frac{2x}{9}$ लीटर

एवं जल $= \frac{\square}{\square} \times \square$ लीटर

$= \frac{7x}{9}$ लीटर

द्वितीय प्रकार y लीटर शर्बत में सिरप $= \frac{1}{6} \times y$ लीटर

$= \frac{y}{6}$ लीटर

एवं जल $= \frac{5}{6} \times y$ लीटर

$= \frac{5y}{6}$ लीटर

$\therefore$ नए मिश्रण में सिरप का परिमाण $= \frac{2x}{9}$ लीटर $+ \frac{y}{6}$ लीटर

$= (\frac{2x}{9} + \frac{y}{6})$ लीटर

एवं जल का परिमाण $= \frac{7x}{9}$ लीटर $+ \frac{5y}{6}$ लीटर

$= (\frac{7x}{9} + \frac{5y}{6})$ लीटर

शर्तानुसार, $$\frac{\frac{2x}{9}+\frac{y}{6}}{\frac{7x}{9}+\frac{5y}{6}} = \frac{5}{21}$$

या, $21\left(\frac{2x}{9}+\frac{y}{6}\right) = 5\left(\frac{5y}{6}+\frac{7x}{9}\right)$

या, $21\left(\frac{4x+3y}{18}\right) = 5\left(\frac{14x+15y}{18}\right)$

या, $21(4x+3y) = 5(14x+15y)$

या, $84x+63y = 70x+75y$

या, $84x-70x = 75y-63y$

या, $14x = 12y$

या, $\frac{x}{y} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ $\therefore$ $x : y = 6 : 7$

$\therefore$ 6 : 7 अनुपात में दोनों प्रकार के शर्बत को मिलाने पर नए मिश्रण में सिरप और जल का अनुपात 5 :21 होगा।

10 मेरे भाई ने एक जग में 3 : 1 अनुपात में सिरप और जल मिलाकर एक प्रकार का शर्बत बनाया। इस शर्बत के कितने भाग को निकालकर उस परिमाण में जल मिला देने पर जल और सिरप के परिमाण का अनुपात 2 : 1 होगा हिसाब करें।

माना जग में x इकाई शर्बत है। इसके y इकाई शर्बत निकालकर उसी परिमाण में जल मिलाया।

x इकाई शर्बत में सिरप $= \frac{3}{4} \times x$ इकाई

$= \frac{3x}{4}$ इकाई

एवं जल $= \frac{\square}{\square}$ इकाई

फिर, y इकाई शर्बत में सिरप $= \frac{3}{4} \times y$ इकाई

$= \frac{3y}{4}$ इकाई

एवं जल $= \frac{y}{4}$ इकाई

x इकाई शर्बत से y इकाई निकाल लेने पर,

बचे शर्बत में सिरप $= \left(\frac{3x}{4}-\frac{3y}{4}\right)$ इकाई

एवं जल $= \left(\frac{x}{4}-\frac{y}{4}\right)$ इकाई

फिर, y इकाई जल मिलाया। $\therefore$ अब जल का परिमाण $= \left(\frac{x}{4}-\frac{y}{4}+y\right)$ इकाई

शर्तानुसार, $\dfrac{\frac{x}{4} - \frac{y}{4} + y}{\frac{3x}{4} - \frac{3y}{4}} = \dfrac{2}{1}$

या, $\frac{x}{4} - \frac{y}{4} + y = \frac{6x}{4} - \frac{6y}{4}$

या, $\frac{x}{4} - \frac{6x}{4} = \frac{y}{4} - y - \frac{6y}{4}$

या, $\frac{x - 6x}{4} = \frac{y - 4y - 6y}{4}$

या, $-\frac{5x}{4} = -\frac{9y}{4}$

या, $5x = 9y$

या, $y = \frac{5x}{9}$

$\therefore$ कुल शर्बत के $\frac{5}{9}$ भाग निकालकर उसी परिमाण में जल मिलाने पर जल और सिरप का परिमाण का अनुपात 2 : 1 होगा।

11. इस 3 : 1 अनुपात में सिरप और जल मिलाए शर्बत में से कितना हिस्सा निकाल करके उसके बदले में उतना जल मिलाने पर सिरप और जल के परिमाण का अनुपात बराबर होगा हिसाब करें। [स्वयं करें]

बनाकर देखें — 12

1. 36 लीटर डिटोल जल बनाया जिसमें जल और डिटोल के परिमाण का अनुपात 5:1 है, उस डिटोल जल में और कितना डिटोल मिलाने पर जल और डिटोल के परिमाण का अनुपात 3:1 होगा, हिसाब करके लिखों।
2. एक प्रकार के पीतल में तांबा और जस्ता के परिमाण का अनुपात 5:2 है, इस प्रकार के 28 कि०ग्रा० पीतल में 4 कि०ग्रा० तांबा मिलाने तांबा और जस्ता का परिमाण कितना होगा स्वंय करें।
3. बिजन बाबू ने फिनाइल और जल 2:23 अनुपात में मिलाकर 60 लीटर फिनाइल का मिश्रण तैयार किया। इस फिनाइल के मिश्रण में और कितना लीटर फिनाइल मिलाने पर फिनाइल और जल के परिमाण का अनुपात 9:46 होगा हिसाब करें।
4. अमीना बीबी ने 7:1 अनुपात में बालू और सिमेंट मिलाकर एक मशाला बनाया है। लेकिन काम समाप्त हो जाने पर देखा गया की अभी भी 72 कि०ग्रा० मशाला बचा है। उस मशाला में और कुछ सीमेंट मिलाकर बालू और सीमेंट के परिमाण का अनुपात 6:1 करके मशाला बनाया गया। तो कितना कि०ग्रा० सीमेंट मिलाया गया था हिसाब करके बताओ।
5. एक प्रकार के जर्मन सिल्वर में तांबा, जस्ता और निकेल के परिमाण का अनुपात 4:3:2 है, इस प्रकार के 54 कि०ग्रा० जर्मन सिल्वर में कितना कि०ग्रा० जस्ता मिलाया जाय कि तीनों के परिमाण का अनुपात 6:5:3 हो जायेगा बताओं।
6. दो प्रकार के गुड़ा-साबुन में सोडा और गुड़ा साबुन के परिमाण का अनुपात क्रमश: 2:3 एवं 4:5 है। यदि प्रथम प्रकार के 10 कि०ग्रा० के साथ द्वितीय प्रकार के 18 कि०ग्रा० को मिलाया गया, तब नए गुड़ा साबुन में कितना हिस्सा गुड़ा साबुन रहेगा, बताओ।

7. दो समान आयतन वाले पात्र में क्रमशः $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ हिस्से में फल का रस था। दोनों पात्र के खाली हिस्सों को जल से भरकर एक पात्र में ढाल दिया गया। नये पात्र में फल के रस और जल के परिमाण का अनुपात कितना होगा हिसाब करों।

8. रेशमी खातुन तीन बराबर माप के ग्लास को शरबत से भर दिया। इन तीनों ग्लास के शरबत में जल और सिरप का अनुपात क्रमश:3:1, 5:3 एवं 9:7 है। मैने तीनों ग्लास के शरबत को एक बड़े पात्र में ढाल दिया। हिसाब करके देखे कि नये पात्र में जल और सिरप के परिमाण का अनुपात कितना है।

9. दो प्रकार के पीतल में तांबा और जस्ता के परिमाण का अनुपात क्रमशः 8:3 एवं 15:7 है इस दो प्रकार के पीतल को 5:2 अनुपात में मिलाने पर जिस नये प्रकार का पीतल मिलेगा, उसमें तांबा और जस्ता के परिमाण का अनुपात कितना होगा, हिसाब करके बताओ।

10. दो प्रकार के स्टेनलेश स्टील में क्रोमियाम और स्टील के परिमाण का अनुपात क्रमशः 2:11 एवं 5:21 है, इस दो प्रकार के स्टेनलेश स्टील को किस अनुपात में मिलाया जाय कि नए स्टेनलेश स्टील में क्रोमियाम और स्टील की अनुपात 7:32 होगा बताओ।

11. एक पात्र के शरबत में 5:2 अनुपात में सिरप और जल मिलाया गया है। इस शरबत के कितने अंश को निकालकर उसके बदले में बराबर परिमाण में जल मिलाने पर सिरप और जल का परिमाण एक बराबर होगा, हिसाब करों।

12. नीचे के घरों को देखें और गणित की भाषा में लिखकर उसका हल करें:

क्रमिक न०	दो मिश्रण के प्रत्येक उपादानों के परिमाण के अनुपात	नये मिश्रण में मिश्रित दोनों के परिमाण का अनुपात	नए मिश्रण में दोनों उपादान के परिमाण का अनुपात
1	5 : 4 एवं 3 : 2	दोनों मिश्रण को बराबर परिमाण में लेकर	
2	4 : 5 एवं 5 : 1		5 : 4
3	3 : 4 एवं 9 : 5	1 : 2 अनुपात में	
4	2 : 3 एवं 5 : 4		1 : 1
5	4 : 3 एवं 5 : 2		9 : 5

13. 700 लीटर के एक मिश्रण में तीन प्रकार के तरल में से प्रथम और द्वितीय प्रकार के परिमाण का अनुपात 2:3 एवं द्वितीय और तृतीय प्रकार के परिमाण का अनुपात 4:5 है। उस मिश्रण में प्रथम और द्वितीय प्रकार के तरल को किस परिमाण में मिलाने पर नये मिश्रण में तीनों प्रकार के तरल के परिमाण का अनुपात 6:5:3 होगा हिसाब करके बताओं।

14. एक प्रकार के सिरप में जल एवं अवशिष्टांश के परिमाण का अनुपात 89:11 है। इसी प्रकार के 22 लीटर सिरप में और कितना जल मिलाया जाय की जल व अवशिष्टांश के परिमाण का अनुपात 90:10 होगा, हिसाब करों।

15. तीन बोतलों के आयतनों के परिमाण का अनुपात 5:3:2 है एवं तीनों बोतलों में फिनाइल और जल का मिश्रण भरा हुआ है। तीनों बोतलों में फिनाइल और जल के परिमाण का अनुपात क्रमशः 2:3, 1:2 एवं 1:3 है, प्रथम बोतल का $\frac{1}{3}$ भाग, द्वितीय बोतल का $\frac{1}{2}$ भाग एवं तृतीय बोतल में $\frac{2}{3}$ भाग को एक साथ मिलाया गया। नए मिश्रण में फिनाइल और जल के परिमाण का अनुपात कितना होगा।

13. बीजगणितीय संख्या राशियों का उत्पादक में विश्लेषण

आज हमलोगों ने स्कूल में विभिन्न प्रकार के रंगीन छोटे-बड़े पिच बोर्ड का आयत क्षेत्र और वर्ग क्षेत्र बनाया है।

पापिया और तथागत ने उस आयत क्षेत्र और वर्ग क्षेत्र को बड़े मोटे चार्ट पेपर पर चिपका दिए एवं उसके नीचे बीजगणितीय संख्या राशियों में उनका क्षेत्रफल लिखा।

हमलोगों ने तय किया है कि प्रत्येक बीजगणितीय संख्या राशियों का उत्पादक विश्लेषण करके आयत क्षेत्र या वर्ग क्षेत्र की भुजा कितनी होगी लिखेंगे।

(i)	(ii)	(iii)	(iv)
क्षेत्रफल (वर्ग इकाई) ↓	क्षेत्रफल (वर्ग इकाई) ↓	क्षेत्रफल (वर्ग इकाई) ↓	क्षेत्रफल (वर्ग इकाई) ↓
$49x^2+70xy+25y^2$	$81a^2-72ab+16b^2$	$64m^2-121n^2$	$x^2+7x+12$

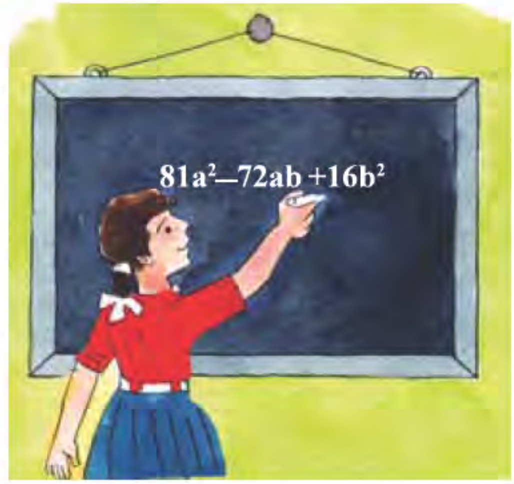
1 अपने स्कूल के ब्लैकबोर्ड पर ($49x^2+70xy+25y^2$) का उत्पादक विश्लेषण करें।

$$49x^2+70xy+25y^2 = \square^2 + 2\times\square\times\square + \square^2$$

$$= (\square + \square)^2$$

पाया, $49x^2+70xy+25y^2 = (9x+5y)\times(9x+5y)$

(i) न० वर्गक्षेत्र के प्रत्येक भुजा की लम्बाई (इकाई में) $\square$।



2 हमलोग $(81a^2-72ab+16b^2)$ का उत्पादक विश्लेषण करके देखते है —

(ii) न० वर्ग क्षेत्र की प्रत्येक भुजा की लम्बाई (इकाई में) $\square$ । [स्वयं करें]

3 रेहाना$(64m^2-121n^2)$ का उत्पादक निकाली।

वह पायी, $64m^2-121n^2$

$= (8m+11n)\times\square$

(iii) न० आयत क्षेत्र की एक भुजा की लम्बाई (इकाई में) $\square$ एवं दूसरे भुजा की लम्बाई (इकाई में) $(8m-11n)$

4 लेकिन सिराज $(125a^3+8b^3)$ का उत्पादक विश्लेषण किया।

$$125a^3+8b^3 = \square^3 + \square^3$$
$$= (5a+2b)\{\square - \square \times \square + 4b^2\}$$
$$= (5a+2b)(25a^2-10ab+4b^2)$$

5 उत्पल $(27x^3-34y^3)$ का उत्पादक विश्लेषण किया।

$$27x^3-343y^3 = \square^3 - \square^3$$
$$= (3x-7y)(\square)$$

मैं $(x^2+7x+12)$ का उत्पादक विश्लेषण करुगा। लेकिन किस प्रकार से $(x^2+7x+12)$ को दो बीजगणितीय संख्या राशियों के गुणा के आकार में लिखूंगा।

पहले जिन अभेदों को जानता हूँ लिखूँ, जो उत्पादक विश्लेषण में सहायता करते हैं।

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ---------------- (I)

$(a-b)^2 = \square$ ---------------- (II)

$a^2 - b^2 = \square \times (a-b)$ ---------------- (III)

$a^3 + b^3 = (a+b) \times \square$ ---------------- (IV)

$a^3 - b^3 = (a-b) \times \square$ ---------------- (V)

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ ---------------- (VI)

$(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$ [विच्छेद नियम]
$= x^2 + ax + xb + ab$ [विच्छेद नियम]
$= x^2 + ax + bx + ab$ [विच्छेद नियम]
$= x^2 + (a + b)x + ab$ [विच्छेद नियम]

6 VI न० अभेद की सहायता से $(x^2 + 7x + 12)$ का उत्पादक निकालो।

VI न० अभेद के बराबर चिन्ह (=) के दाहिने पक्ष के साथ $x^2 + 7x + 12$ की तुलना करके पाते है।

$(a + b) = 7$ एवं $a \times b = 12$

क्योंकि $a \times b = 12 = 1 \times 12$
$= 2 \times 6$
$= 4 \times 3$

$\therefore$ $a = 1, b = 12$ या $a = 2, b = 6$ या $a = 4, b = 3$

लेकिन $a + b = 7$ होना चाहिए। $\therefore$ $a = 4$ और $b = 3$

VI न० अभेद के बराबर चिन्ह (=) के बायें तरफ से पाते है।

$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$

उत्पादक में विश्लेषण करके पाते हैं —

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + (4 + 3)x + 4 \times 3$$
$$= x^2 + 4x + 3x + 4 \times 3$$
$$= x(x + 4) + 3(x + 4)$$
$$= (x + 4)(x + 3)$$

7 मै VI न० अभेद की सहायता से $(x^2 + 7x - 18)$ इस बीजगणितीय संख्या राशि को उत्पादक में विश्लेषण करने की कोशिश करुँ।

$x^2 + 7x - 18$

यहाँ $a + b = 7$ एवं $a \times b = -18$

$-18 = 1\times(-18) = (-1)\times(18) = (-2)\times 9 = 2\times(-9) = (-3)\times 6 = 3 \times (-6)$ एवं $7 = 9 + (-2)$

$\therefore$ यहाँ, $a = 9$ और $b = \square$

$\therefore$ VI न० अभेद से पाते है —

$$x^2 + 7x - 18 = (x + 9)\{x + (-2)\}$$
$$= (x + 9)(x - 2)$$

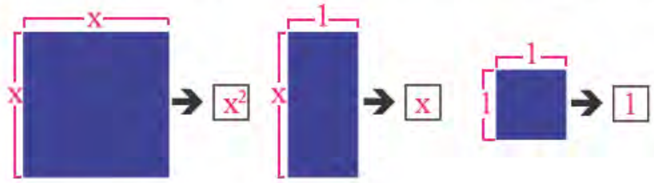
उत्पादक विश्लेषण से पाते है,

$$x^2 + 7x - 18 = x^2 + (9-2)x - 18$$
$$= x^2 + 9x - 2x - 18$$
$$= x(x + 9) - 2(x + 9)$$
$$= (x + 9)(x - 2)$$

स्वयं से

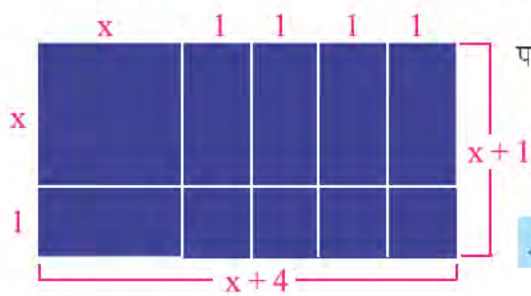
स्वयं से x^2+5x+4 का उत्पादक विश्लेषण करें।

(1) पहले नीचे के चित्रों की तरह नीले रंग का बड़ा वर्ग क्षेत्र, आयताकार क्षेत्र और छोटे-छोटे वर्ग क्षेत्र टुकड़ों को बनाया।



(2) x^2+5x+4 समझने के लिए लिया —

(2) नीचे के चित्रों की तरह आयताकार क्षेत्र को सजाकर पाते है —



पास के चित्र आयत क्षेत्र की एक भुजा की लम्बाई $(x+4)$ इकाई।

दूसरे भुजाओं की लम्बाई $(x+1)$ इकाई।

$\therefore$ आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = $(x+4)(x+1)$ वर्ग इकाई।

$\therefore$ पाये, $x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$

इसी प्रकार स्वयं से $x^2+7x+12$ का उत्पादक विश्लेषण करे। [स्वयं करे]

देखते है कि, $x^2+7x+12$ और $x^2+7x-18$ का उत्पादक विश्लेषण (VI) के बाँये तरफ के मध्यपद के सहग अर्थात् [(a+b) का] विश्लेषण के ऊपर निर्भर करता है। इस पद्धति से उत्पादक विश्लेषण को क्या कहा जाता है।

मध्य पद विश्लेषण पद्धति कहा जाता हैं।

8 $(a^2 - 11a + 30)$ और $(m^2 - 4m - 12)$ का उत्पादक विश्लेषण करें।

$a^2 - 11a + 30$

$30 = 1\times\square = 2\times\square = 3\times\square = 5\times\square$

$30 = \square \times 6,\ 11 = \boxed{5} + \square$

$a^2 - 11a + 30$

$= a^2 - (5+6)a + 30$

$= a^2 - 5a - 6a + 30$

$= a(a-5) - 6(a-5)$

$= (a-5)(a-6)$

$m^2 - 4m - 12$

$-12 = (-1)\times\square = 1\times\square = (-2)\times\square$

$= 2\times\square = 3\times\square = (-3)\times\square$

$-12 = \square \times \boxed{6},\ 4 = \square + \square$

$m^2 - 4m - 12$

$= m^2 - (6-2)m - 12$

$= m^2 - 6m + 2m - 12$

$= m(m-6) + 2(m-6)$

$= (m-6)(m+2)$

∴ हम पाये, $x^2 + px + q$ इस द्विघात (बीजगणितीय संख्या राशि के चल का सर्वाधिक घात 2) बीजगणितीय संख्या राशि को उत्पादक विश्लेषण के लिए दो संख्या a और b खोजेंगे जहाँ,

$a+b = p$ एवं $a \times b = \square$ होगा।

∴ इस तरह बीजगणितीय संख्या राशि होगी

$x^2 + (a+b)x + ab$

$= x^2 + ax + bx + ab$

$= x(x+a) + b(x+a)$

$= (x+a)(x+b)$

9 $(x^2 - x - 20)$ और $(b^2 - 10b + 16)$ का उत्पादक निकालने की कोशिश करें

$x^2 - x - 20$

$-20 = \square \times \square$

एवं $1 = \square - \square$

$x^2 - x - 20$

$= x^2 - (5-4)x - 20$

$= x^2 - 5x + 4x - 20$

$= x(x-5) + 4(x-5)$

$= (x-5)(x+4)$

$b^2 - 10b + 16$

$\square = \square \times \square$

एवं $10 = \square + \square$

$b^2 - 10b + 16$

$= b^2 - (\square + \square)b + 16$

$= b^2 - 8b - 2b + 16$

$= b(b-8) - 2(b-8)$

$= (b-8)(b-2)$

स्वयं करें — 13.1

नीचे के बीजगणितीय संख्या राशियों का उत्पादक विश्लेषण करें।

(i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $x^2 + x - 6$ (iii) $x^2 - x - 6$ (iv) $y^2 + 23y + 102$ (v) $a^2 + a - 132$ (vi) $p^2 + 3p - 18$

10 मध्यपद के सहग विश्लेषण पद्धति से $(x + y)^2 - (x+y) - 6$ एवं $a^8 - a^4 - 2$ का उत्पादन विश्लेषण करें।

$(x + y)^2 - (x+y) - 6$

$= a^2 - a - 6$ [माना, $x + y = a$]

$= a^2 - (3-2)a - 6$

$= a^2 - 3a + 2a - 6$

$= a(a-3) + 2(a-3)$

$= (a-3)(a+2)$

$= (x+y-3)(x+y+2)$ [$a = x+y$ रखकर पाते है]

$a^8 - a^4 - 2$

$= (a^4)^2 - a^4 - 2$

$= x^2 - x - 2$ [माना, $a^4 = x$]

$= x^2 - (2-1)x - 2$

$= x^2 - 2x + x - 2$

$= x(x-2) + 1(x-2)$

$= (x-2)(x+1)$

$= (a^4-2)(a^4+1)$ [$x = a^4$ रखकर पाते है]

11 $(x^2 + 20xy - 96y^2)$ और $(1 - 5x - 36x^2)$ का उत्पादक विश्लेषण करें।

$(x^2 + 20xy - 96y^2)$ का प्रत्येक पद ही चल है। सर्वप्रथम शेष पद के चल को वर्जित करें।

$x^2 + 20xy - 96y^2$

$= \left(\frac{x^2}{y^2} + \square \quad \square\right) \times y^2$ [जहाँ $y^2 \neq 0$]

$= \left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 20\left(\frac{x}{y}\right) - 96\right\} \times y^2$

$= (a^2+20a-96)y^2$ [माना, $\frac{x}{y} = a$]

$= (a^2+24a-4a-96)y^2$ [$96 = \square \times \square$ एवं $20 = \square - \square$]

$= \{a(a+24) - 4(a+24)\}y^2$

$= (a+24)(a-4)y^2$

$= \left(\frac{x}{y}+24\right)\left(\frac{x}{y}-4\right)y^2$ [$a = \frac{x}{y}$ रखने पर]

$= \left(\frac{x+24y}{y}\right)\left(\frac{x-4y}{y}\right)y^2$

$= \frac{(x+24y)(x-4y)}{\cancel{y^2}} \times \cancel{y^2}$

$= (x + 24y)(x - 4y)$

दूसरे तरीके से पाते है,

$x^2+20xy - 96y^2$

$= x^2+(24y - 4y)x - 24y \times 4y$

$= x^2+24xy - 4xy - 24y \times 4y$

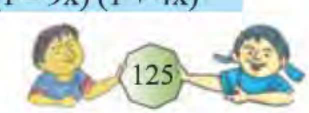
$= x(x + 24y) - 4y(x + 24y)$

$= \square \times \square$

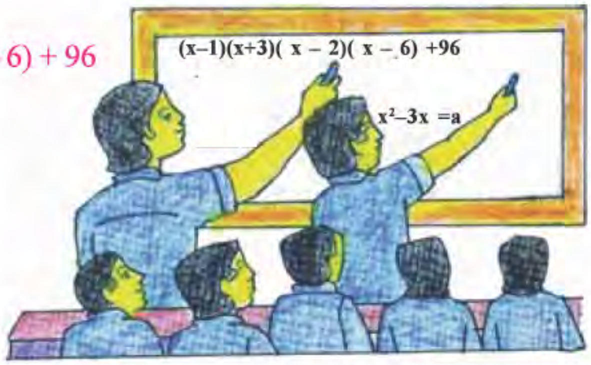
12 $(1 - 5x - 36x^2)$ का उत्पादक विश्लेषण करने की कोशिश करें।

$1 - 5x - 36x^2$ $= 1 - (\square - \square)x - \square \times \square \times x^2$

$= 1 - 9x + 4x - 9 \times 4 \times x^2 = 1(1 - 9x) + 4x(1 - 9x) = (1 - 9x)(1 + 4x)$



13 अब हम दो आदमी $(x-1)(x+3)(x-2)(x-6)+96$ का उत्पादक विश्लेषण करने की कोशिश करें।



लेकिन किस अभेद की सहायता लूंगा एवं किस प्रकार से उत्पादक विश्लेषण करुंगा?

$x-1, x+3, x-2$ एवं $x-6$ इन चार संख्या राशियों के किसी दो जोड़ी राशियों के गुणनफल के x युक्त पद के सहग का योगफल बराबर होगा खोजे।

$-1-2=\square$ एवं $+3-6=-3$

अत: $(x-1)(x-2)$ –गुणनफल x का सहग -3 एवं $(x+3)(x-6)$ के गुणनफल के x का सहग (-3)

अत: $(x-1)(x+3)(x-2)(x-6)+96$

$=(x-1)(x-2)(x+3)(x-6)+96$

$=(x^2-x-2x+2)(x^2+3x-6x-18)+96$

$=(x^2-3x+2)(x^2-3x-18)+96$

$=(a+2)(a-18)+96$ [माना, $x^2-3x=a$]

$=a^2+2a-18a-36+96$

$=a^2-16a+60$

$=a^2-(10+6)a+60$

$=a^2-10a-6a+60$

$=a(\square)-6(\square)$

$=(a-10)(a-6)$

$=(x^2-3x-10)(x^2-3x-6)$ [$a=x^2-3x$ बैठाने पर पाते है]

$=(x^2-5x+2x-10)(x^2-3x-6)$

$=\{x(\square)+2(\square)\}(x^2-3x-6)$

$=(x-5)(x+2)(x^2-3x-6)$

14 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+50$ का उत्पादक निकालो [स्वयं करों]

15 $x^2 + x - (a+1)(a+2)$ इस बीजगणितीय संख्या राशियों का उत्पादक में विश्लेषण करो।

x के चल एवं a के ध्रुवक रखकर x^2+px+q के साथ तुलना करें

$q = -(a+1)(a+2)$ एवं $p = 1 = (a+2) - (a+1)$ लिखें।

$x^2 + x - (a+1)(a+2)$

$= x^2 + \{(a+2) - (a+1)\}x - (a+1)(a+2)$

$= x^2 + (a+2)x - (a+1)x - (a+1)(a+2)$

$= x\{x+(a+2)\} - (a+1)\{x+(a+2)\}$

$= \{x+(a+2)\}\{x - (a+1)\}$

$= (x + a + 2)(x - a - 1)$

16 $x^2 + 3x - (p+5)(p+2)$ इस बीजगणितीय संख्या राशियों का उत्पादक में विश्लेषण करो। **[स्वयं करे]**

बनाकर देखें — 13.1

1. नीचे के बीजगणितीय संख्या राशियों को $x^2 + (p+q)x + pq = (x+p)(x+q)$ के अभेदो के साथ तुलना करके p एवं q का मान खोजे एवं लिखे तथा उत्पादक निकाले।

बीजगणितीय संख्या राशियाँ	p और q का मान	उत्पादक विश्लेषण
$x^2 - 8x + 15$	$p = -5, q = -3$	$(x-5)(x-3)$
$x^2 - 40x - 129$		
$m^2 + 19m + 60$		
$x^2 - x - 6$		
$(a+b)^2 - 4(a+b) - 12$		
$(x-y)^2 - x + y - 2$		

2. उत्पादक विश्लेषण करें

(i) $(a+b)^2 - 5a - 5b + 6$

(ii) $(x^2 - 2x)^2 + 5(x^2 - 2x) - 36$

(iii) $(p^2 - 3q^2)^2 - 16(p^2 - 3q^2) + 63$

(iv) $a^4 + 4a^2 - 5$

(v) $x^2y^2 + 23xy - 420$

(vi) $x^4 - 7x^2 + 12$

(vii) $a^2 + ab - 12b^2$

(viii) $p^2 + 31pq + 108q^2$

(ix) $a^6 + 3a^3b^3 - 40b^6$

(x) $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6) + 24$

(xi) $(x+1)(x+9)(x+5)^2+63$

(xii) $x(x+3)(x+6)(x+9)+56$

(xiii) $x^2 - 2ax + (a+b)(a-b)$

(xiv) $x^2 - bx - (a+3b)(a+2b)$

(xv) $(a+b)^2 - 5a - 5b + 6$

(xvi) $x^2 + 4abx - (a^2 - b^2)^2$

(xvii) $x^2 - (a + \frac{1}{a})x + 1$

(xviii) $x^6y^6 - 9x^3y^3 + 8$

$3x^2 + 14x + 8$

$6x^2 - x + 15$

सहाना ने हरे आयताकार बोर्ड के नीचे क्षेत्रफल(वर्ग इकाई) लिखा है $3x^2 + 14x + 8$

17 हमलोग $3x^2 + 14x + 8$ इस बीजगणितीय संख्या राशि का उत्पादक विश्लेषण की कोशिश करें और उस हरे आयत क्षेत्र की भुजाओं की लम्बाई (इकाई) क्या क्या हो सकती है लिखे।

हमलोगों ने $x^2 + px + q$ बीजगणितीय संख्या राशि का उत्पादक विश्लेषण किया है। लेकिन $mx^2 + px + q$ इस तरह के द्विघात संख्या राशियों का उत्पादक किस प्रकार पायेंगे देखे :

पहले $mx^2 + px + q$ को $x^2 + px + q$ आकार में सजायें।

$$mx^2 + px + q = \frac{m^2x^2 + pmx + qm}{m}$$

$$= \frac{1}{m}(y^2 + py + qm) \text{ [माना, } mx = y\text{]}$$

अब उस प्रकार की दो संख्या a एवं b को खोजेंगे जिससे $a \times b = qm$ एवं $a + b = p$ हो।

18 $3x^2 + 14x + 8$

$$= \frac{9x^2 + 42x + 24}{3}$$

$$= \frac{(3x)^2 + 14 \times 3x + 24}{3}$$

$$= \frac{y^2 + 14y + 24}{3} \quad \text{[माना } 3x = y\text{]}$$

$$= \frac{y^2 + 12y + 2y + 24}{3}$$

$$= \frac{y(y+12) + 2(y+12)}{3}$$

$$= \frac{(y+12)(y+2)}{3}$$

$$= \frac{(3x+12)(3x+2)}{3} \quad \text{[}y = 3x \text{ बैठने पर पाते है]}$$

$$= \frac{\cancel{3}(x+4)(3x+2)}{\cancel{3}}$$

$$= (x+4)(3x+2)$$

दूसरे तरह से लिखे

$3x^2 + 14x + 8$

a एवं b दो संख्या खोजें जिससे

$a + b = 14$ व $a \times b = 3 \times 8 = 24$

$= \square \times \square$ एवं

$14 = \boxed{12} + \square$ हो।

$3x^2 + 14x + 8$

$= 3x^2 + (12+2)x + 8$

$= 3x^2 + 12x + 2x + 8$

$= 3x(x + 4) + 2(x + 4)$

$= (x + 4)(3x + 2)$

देखते है कि पीले रंग का आयताकार बोर्ड का क्षेत्रफल (वर्ग इकाई) $6x^2 - x - 15$

19 $6x^2 - x - 15$ का उत्पादक विश्लेषण करें एवं पीले रंग के आयताकार बोर्ड के भुजाओं की लम्बाई (इकाई में) क्या-क्या हो सकता है लिखे।

$6x^2 - x - 15$

a एवं b दो संख्या खोजें जहाँ $a+b = -1$ एवं $a \times b = 6\times(-15) = -90$

$\therefore -90 = \square \times \square$ एवं $-1 = \square + \square$

$6x^2 - x - 15$

$= 6x^2 - (10 - 9)x - 15$

$= 6x^2 - 10x + 9x - 15$

$= \square(3x - 5) + 3(3x - 5)$

$= (3x - 5)\square$

20 हमलोग $x^2 + 13x - 48$ और $6y^2 - y - 15$ इन दो बीज गणितीय संख्या राशियों को दो वर्ग के अन्तर के रुप में करें एवं $a^2 - b^2 = (a+b)(a+b)$ इस अभेद की सहायता से उत्पादक विश्लेषण करने की कोशिश करें।

$x^2 + 13x - 48$

$= x^2 + 2.x.\frac{13}{2} + (\frac{13}{2})^2 - (\frac{13}{2})^2 - 48$

$= (x + \frac{13}{2})^2 - \frac{169}{4} - 48$

$= (x + \frac{13}{2})^2 - (\frac{169}{4} + 48)$

$= (x + \frac{13}{2})^2 - \frac{169 + 192}{4}$

$= (x + \frac{13}{2})^2 - \frac{361}{4}$

$= (x + \frac{13}{2})^2 - (\frac{19}{2})^2$

$= (x + \frac{13}{2} + \frac{19}{2})(x + \frac{13}{2} - \frac{19}{2})$

$= (x + \frac{13 + 19}{2})(x + \frac{13 - 19}{2})$

$= (x + 16)(x - 3)$

मध्यपद का सहग विश्लेषण करके $(x^2 + 13x - 48)$ का उत्पादक विश्लषण करें।

$x^2 + 13x - 48$

$= x^2 + 16x - 3x - 48$

$= x(x+16) - 3(x+16)$

$= (\square)(\square)$

$6y^2 - y - 15$

$= 6(y^2 - \frac{y}{6} - \frac{15}{6})$

$= 6\{y^2 + 2.y.\frac{1}{12} + (\frac{1}{12})^2 - (\frac{1}{12})^2 - \frac{15}{6}\}$

$= 6\{(y - \frac{1}{12})^2 - \frac{1}{144} - \frac{15}{6}\}$

$= 6\{(y - \frac{1}{12})^2 - \frac{1 + 360}{144}\}$

$= 6\{(y - \frac{1}{12})^2 - \frac{361}{144}\}$

$= 6\{(y - \frac{1}{12})^2 - (\frac{19}{12})^2\}$

$= 6(y - \frac{1}{12} + \frac{19}{12})(y - \frac{1}{12} - \frac{19}{12})$

$= 6(y + \frac{19}{12} - \frac{1}{12})(y - \frac{1 + 19}{12})$

$= 6(y + \frac{3}{2})(y - \frac{5}{3})$

$= \overset{3}{\cancel{6}}(\frac{2y+3}{\cancel{2}}) \times (\frac{3y-5}{\cancel{3}})$

$= (2y+3)(3y-5)$

मध्यपद का सहग विश्लेषण करके (**$6y^2 - y - 15$**) का उत्पादक विश्लेषण करें।

$6y^2 - y - 15$

$= 6y^2 - 10y + 9y - 15$

$= 2y(3y - 5) + 3(3y - 5)$

$= (3y - 5)(2y+3)$

21 हमलोग $x^2 + ax - (6a^2 - 5ab + b^2)$ एवं $2(a^2 + \frac{1}{a^2}) - (a - \frac{1}{a}) - 7$ बाजगणितीय संख्या राशियों का उत्पादक विश्लेषण करने की कोशिश करें,

$x^2 + ax - (6a^2 - 5ab+b^2)$

$= x^2+ax - (2a - b)(3a - b)$ [**स्वयं करें**]

$= x^2+\{(3a - b) - (2a-b)\}x - (2a-b)(3a-b)$

$= x^2+(3a - b)x - (2a - b)x - (2a - b)(3a-b)$

$= x\{x+3a - b\} - (2a - b)\{x+3a - b\}$

$= (x + 3a - b)(x - 2a+b)$

$2(a^2 + \frac{1}{a^2}) - (a - \frac{1}{a}) - 7$

$= 2\{(a - \frac{1}{a})^2 + 2.\cancel{a}.\frac{1}{\cancel{a}}\} - (a - \frac{1}{a}) - 7$

$= 2\{(a - \frac{1}{a})^2 + 2\} - (a - \frac{1}{a}) - 7$

$= 2(a - \frac{1}{a})^2 + 4 - (a - \frac{1}{a}) - 7$

$= 2(a - \frac{1}{a})^2 - (a - \frac{1}{a}) - 3$

$= 2x^2 - x - 3$ [माना $(a - \frac{1}{a}) = x$]

$= (2x - 3)(x+1)$ [मध्यपद का सहग विश्लेषण करें स्वयं करें]

$= \{2(a - \frac{1}{a}) - 3\}\{a - \frac{1}{a} + 1\}$

$= (2a - \frac{2}{a} - 3)(a - \frac{1}{a} + 1)$

$= (2a - 4 + 1 - \frac{2}{a})(a - \frac{1}{a} + 1)$

$= (2a - 4 + \frac{a}{a} - \frac{2}{a})(a - \frac{1}{a} + 1)$

$= \{2(a - 2) + \frac{1}{a}(a - 2)\}(a - \frac{1}{a} + 1)$

$= (a - 2)(2 + \frac{1}{a})(a - \frac{1}{a} + 1)$

स्वयं करें — 13.2

1) $(a^2 - a - 72)$ ও $(2x^2 - x - 1)$ बीजगणितीय संख्या राशियों को दो वर्ग के रुप में प्रकाशित करके उत्पादक निकालें।

बनाकर देखें — 13.2

1. उत्पादक विश्लेषण करें —

(i) $2a^2 + 5a + 2$ **(ii)** $3x^2 + 14x + 8$ **(iii)** $2m^2 + 7m + 6$

(iv) $6x^2 - x - 15$ **(v)** $9r^2 + r - 8$ **(vi)** $6m^2 - 11mn - 10n^2$

(vii) $7x^2 + 48xy - 7y^2$ **(viii)** $12 + x - 6x^2$ **(ix)** $6 + 5a - 6a^2$ **(x)** $6x^2 - 13x + 6$

(xi) $99a^2 - 202ab + 99b^2$ **(xii)** $2a^6 - 13a^3 - 24$ **(xiii)** $8a^4 + 2a^2 - 45$

(xiv) $6(x - y)^2 - x + y - 15$ **(xv)** $3(a+b)^2 - 2a - 2b - 8$ **(xvi)** $6(a+b)^2 + 5(a^2 - b^2) - 6(a - b)^2$

2. नीचे के बीजगणितीय संख्या राशियों को दो वर्ग के रुप में प्रकाशित करके उत्पादक निकालें —

(i) $x^2 - 2x - 3$ **(ii)** $x^2 + 5x + 6$ **(iii)** $3x^2 - 7x - 6$ **(iv)** $3a^2 - 2a - 5$

3. उत्पादक विश्लेषण करें —

(i) $ax^2 + (a^2+1)x + a$ **(ii)** $x^2 + 2ax + (a+b)(a - b)$

(iii) $ax^2 - (a^2+1)x + a$ **(iv)** $ax^2 + (a^2\ 1)x - a$

(v) $ax^2 - (a^2 - 2)x - 2a$ **(vi)** $a^2 + 1 - \frac{6}{a^2}$

14. बीजगणितीय संख्या राशियों का म.स.प. एवं ल.स.प.

हमारे पास बहुत सें रंगीन फीते है और उनका माप अलग-अलग है। 32 मीटर लम्बा हरा फीता, 104 मीटर लम्बा पीला फीता एवं 56 मीटर लम्बा नीला फीता है।

आज हमलोगों ने तय किया है कि इस विभिन्न रंगों के फीतों में से इस प्रकार की बराबर लम्बाई का सबसे बड़ा टुकड़ा काटेंगे कि कोई भी फीता पड़ा नहीं रहें।

1 हिसाब करके देखे कि सबसे बड़े टुकड़े की लम्बाई कितनी होगी।

सर्वप्रथम 32, 104 और 56 का म.स.प. निकालें

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$104 = 2 \times 2 \times 2 \times 13$

$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$

∴ 32, 104 व 56 का म.स.प. $2 \times 2 \times 2 = 8$

∴ सबसे बड़ा टुकड़ा **8** मीटर का होगा अर्थात् तीनों फीतों से सबसे बड़ा टुकड़ा **8** मीटर का होगा। अत: तीनो संख्या का मौलिक उत्पादक विश्लेषण करके सबसे बड़ा साधारण उत्पादक लिया। तीनों संख्याओं का म.स.प. ☐

2 यदि हरे रंग के फीते की लम्बाई $2a^2b$ मीटर, पीले रंग के फीते की लम्बाई $4ab^2$ मीटर एवं नीले रंग के फीते की लम्बाई $6a^2b^2$ मीटर हो तो,

हिसाब करके देखें तो सबसे बड़े माप के बराबर लम्बाई के हरे, पीले और नीले रंग के टुकड़े कितने होंगे कि किसी अन्य लम्बाई के फीते पड़े न रहे।

$2a^2b$, $4ab^2$ व $6a^2b^2$ का म०स०प० कैसे मिलेगा?

सर्वप्रथम $2a^2b$, $4ab^2$ और $6a^2b^2$ का मौलिक उत्पादक निकाले—

$2a^2b = 2 \times a \times a \times b$

$4ab^2 = 2 \times 2 \times a \times b \times b$

$6a^2b^2 = 3 \times 2 \times a \times a \times b \times b$

दूसरे तरह से, 2, 4 और 6 का म.स.प = ☐ प्रदत्त समस्यायें अर्थात् $2a^2b$, $4ab^2$ और $6a^2b^2$ में a का सर्वनिम्न घात a एवं b का सर्वनिम्न घात। b ;a एवं b तीनों संख्या राशियों में हो
∴ निर्णित म.स.प = $2a^1b^1 = 2ab$

∴ $2a^2b$, $4ab^2$ और $6a^2b^2$ का सबसे बड़ा साधारण उत्पादक 2ab

∴ $2a^2b$, $4ab^2$ और $6a^2b^2$ का सबसे बड़ा साधारण समापवर्तक या म.स.प. 2ab है।

3 $6x^2yz^3$, $10x^3y^3z^3$ और $8x^2yz^4$ का म.स.प. निर्णय करें।

पहले $6x^2yz^3$, $10x^3y^3z^3$ और $8x^2yz^4$ का मौलिक उत्पादक विश्लेषण करें—

$6x^2yz^3 = 3 \times 2 \times x \times x \times y \times z \times z \times z$

$10x^3y^3z^3 = 5 \times 2 \times x \times x \times x \times y \times y \times y \times z \times z \times z$

$8x^2yz^4 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times y \times z \times z \times z \times z$

$\therefore$ $6x^2yz^3$, $10x^3y^3z^3$ और $8x^2yz^4$ का म.स.प. = $\square$

दूसरे तरीके से, 6, 10 और 8 का म.स.प = $\square$

$6x^2yz^3$, $10x^3y^3z^3$ और $8x^2yz^4$ में x का सर्वनिम्न घात $\square$, y का सर्वनिम्न घात $\square$ एवं z का सर्वनिम्न घात $\square$; x, y एवं z तीनो संख्या राशियों में है।

$\therefore$ $6x^2yz^3$, $10x^3y^3z^3$ एवं $8x^2yz^4$ का म.स.प. $\square$

स्वयं करें— 14.1 1) ax^2, a^2x^3 एवं a^4x का म.स.प. निकाले।

4 $(4m^2 - 25n^2)$ एवं $(2m^2n - 5mn^2)$ इस बीजगणितीय संख्या का म.प.स. निकाले।

प्रथम संख्या राशि, $4m^2 - 25n^2 = (2m)^2 - (5n)^2$

$= (2m + 5n)(2m + 5n)$

द्वितीय संख्या राशि, $2m^2n - 5mn^2 = mm(2m - 5n)$

प्रथम संख्या राशि एवं द्वितीय संख्या राशि का सबसे बड़ा साधारण उत्पादक $(2m - 5n)$

$\therefore$ निर्णित म.स.प. = $2m - 5n$

5 $(x^3 + 2x^2)$ और $(x^3 + 11x^2 + 18x)$ का म.प.स. निकाले।

प्रथम संख्या राशि, $x^3 + 2x^2 = \square(x + 2)$

द्वितीय संख्या राशि, $x^3 + 11x^2 + 18x = \square(x^2 + 11x + 18)$

$= \square(x^2 + 9x + 2x + 18) = \square(x + 9)\square$

प्रथम संख्या राशि एवं द्वितीय संख्या राशि का सबसे बड़ा साधारण उत्पादक $x(x + 2)$

$\therefore$ निर्णित म.स.प. = $\square$

स्वयं करें— 14.2 1) $x(x^2 - 9)$, $x^2 - x - 12$ बीजगणितीय संख्या राशियों का म.प.स. निकाले।

आज हमने तय किया है कि पर्दा में लाल, नीला और हरा रंग के फीतों से नक्शा बनायेंगे। फरहा तथा ऋतम ने तय किया है कि पर्दा के लम्बाई के बराबर समानान्तर पहले लाल रंग, उसके नीचे नीला रंग एवं अंत में हरे रंग के फीतां को लगायेंगे। लाल, नीले और हरे रंग फीतों के टुकड़ो की लम्बाई क्रमश: 6 डेसी मी०, 8 डेसी मी०, और 1 मीटर है।

हिसाब करके देखें रंगीन फीतों के टुकड़ों को पर्दा में लगाने के लिए कम से कम कितना डेसी मीटर लम्बे पर्दे की जरुरत पड़ेगी।

1 मीटर = 10 डेसी मी०.

6 सर्व प्रथम मैं 6, 8 और 10 का म.स.प. निकालूँ।

$6 = 3 \times 2$

$8 = 2 \times 2 \times 2$

$10 = 5 \times 2$

6, 8 और 10 का साधारण उत्पादक 2 एवं मौलिक उत्पादक 2, 2, 3 और 5 है

∴ 6, 8 और 10 का ल.स.प. (लघुतम समापवर्तक) = $2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2 = 120$

∴ कम से कम 120 डेसीमी०. = 12 मीटर लम्बे पर्दे में प्रत्येक रंगीन फीते को सम्पूर्ण रुप से लगाया जायेगा।

7 लेकिन लाल रंग का $4xy^2z$ डेसीमी०, नीले रंग का $6yz^2x$ डेसीमी०, और हरे रंग का $10zx^2y$ डेसीमी० लम्बे टुकड़ों को एक के बाद एक लगाता तो पर्दा की लम्बाई कम से कम कितना होगा कि रंगीन फीते के टुकड़ों को एक के बाद एक पूर्ण रुप से लगा पाते, हिसाब करें।

$4xy^2z$, $6yz^2x$ और $10zx^2y$ का ल.स.प. किस प्रकार निकालेंगें।

पहले, $4xy^2z$, $6yz^2x$ और $10zx^2y$ मौलिक उत्पादकों का विश्लेषण करें।

$4xy^2z = 2 \times 2 \times x \times y \times y \times z$

$6yz^2x = 3 \times 2 \times x \times y \times z \times z$

$10zx^2y = 5 \times 2 \times x \times x \times y \times z$

∴ $4xy^2z$, $6yz^2x$ एवं $10zx^2y$ का साधारण उत्पादक $2xyz$, एवं बाकी मौलिक उत्पादक है, 2, 3, 5, x, y, z

∴ $4xy^2z$, $6yz^2x$ एवं $10zx^2y$ के लघुतम समापवर्तक या ल.स.प. $2xyz \times 2 \times 3 \times 5 \times x \times y \times z = 60x^2y^2z^2$

दूसरे तरीके से, 4, 6 और 10 का ल.स.प = ☐

$4xy^2z$, $6yz^2x$ और $10zx^2y$ में x का सर्वोच्च घात 2, y का सर्वोच्च घात 2 और z का सर्वोच्च घात 2 है।

∴ $4xy^2z$, $6yz^2x$ और $10zx^2y$ का ल.स.प. = $60x^2y^2z^2$

8 $3ab$, $9a^2c$ एवं $12a^2c^2$ का ल.स.प. निकाले।

प्रथम संख्या राशि, $3ab = 3 \times a \times b$

द्वितीय संख्या राशि, $9a^2c = 3 \times 3 \times a \times a \times c$

तृतीय संख्या राशि, $12a^2c^2 = 3 \times 2 \times 2 \times a \times a \times c \times c$

3, 9 और 12 का ल.स.प. = $\square$

$3ab$, $9a^2c$ और $12a^2c^2$ में a का सर्वोच्च घात $\square$, b का सर्वोच्च घात 1 एवं c का सर्वोच्च घात $\square$

$\therefore$ निर्णित ल.स.प. = $36a^2bc^2$

स्वयं करें — 14.3 1) $4a^2b^4c$, $12a^3bc^5$ और $18a^2b^3c^2$ का मान निकाले।

9 $(a^2 - 2a)$ और $(a^2 - 3a + 2)$ का ल.स.प. क्या होगा देखें—

प्रथम संख्या राशि, $a^2 - 2a = \square\,(a - 2)$

द्वितीय संख्या राशि $a^2 - 3a + 2 = a^2 - 2a - a + 2$

$= a(a - 2) - 1\,(a - 2)$

$= (a - 2)\,(a - 1)$

$\therefore$ प्रथम और द्विताय संख्या राशियों का साधारण उत्पादक $(a - 2)$ और बाकी मौलिक उत्पादक a और $(a - 1)$ हैं।

$\therefore$ निर्णित ल.स.प. = $a\,(a - 2)\,(a - 1)$

स्वयं करें — 14.4 1) $2\,(x - 4)$ और $(x^2 - 3x + 2)$ का म.प.स. और ल.स.प. निकालो।

10 $(x^3 - 8)$, $(x^2 + 3x - 10)$ और $(x^3 + 2x^2 + 8x)$ का म.स.प. और ल.स.प. निकालो।

प्रथम संख्या राशि, $x^3 - 8 = x^3 - (2)^3$

$= (x - 2)\,(x^2 + 2x + 4)$

द्वितीय संख्या राशि, $x^2 + 3x - 10 = x^2 + 5x - 2x - 10$

$= x(x + 5) - 2\,(x + 5) \qquad = (x + 5)\,\square$

तृतीय संख्या राशि, $x^3 + 2x^2 - 8x = \square\,(x^2 + 2x - 8)$

$= x\,\{x^2 - 4x + 2x - 8\}$

$= x\,\{x\,(x + 4) - 2\,(x + 4)\} \qquad = x\,(x + 4) \times \square$

$\therefore$ निर्णित म.स.प. = $x - 2$

निर्णित ल.स.प. = $x\,(x - 2)\,(x^2 + 2x + 4)\,(x + 5)\,(x + 4)$

स्वयं करें— 14.5 1) $(y^3 - 8)$, $(y^3 - 4y^2 + 4y)$ और $(y^2 + y - 6)$ का म.प.स. और ल.स.प. निकालो।

बनाकर देखें—14

1. नीचे के बीजगणितीय संख्या राशियों का म.स.प. निकाले—

(i) $4a^2b^2, 20ab^2$ (ii) $5p^2q^2, 10p^2q^2, 25p^4q^3$ (iii) $7y^3z^6, 21y^2, 14z^2$ (iv) $3a^2b^2c, 12a^2b^4c^2, 9a^5b^4$

2. नीचे के बीजगणितीय संख्या राशियों का ल.स.प. निकाले—

(i) $2x^2y^3, 10x^3y$ (ii) $7p^2q^3, 35p^3q, 42pq^4$

(iii) $5a^5b, 15ab^2c, 25a^2b^2c^2$ (iv) $11a^2bc^2, 33a^2b^2c, 55a^2bc^2$

3. नीचे के बीजगणितीय संख्या राशियों का म.स.प. निकाले—

(i) $5x(x+y), x^3-xy^2$ (ii) x^3-3x^2y, x^2-9y^2 (iii) $2ax(a-x)^2, 4a^2x(a-x)^3$

(iv) $x^2-1, x^2-2x+1, x^3+x^2-2x$ (v) a^2-1, a^3-1, a^2+a-2 (vi) $x^2+3x+2, x^2+4x+3, x^2+5x+6$

(vii) $x^2+xy, xz+yz, x^2+2xy+y^2$ (viii) $8(x^2-4), 12(x^3+8), 36(x^2-3x-10)$

(ix) $a^2-b^2-c^2+2bc, b^2-c^2-a^2+2ac, c^2-a^2-b^2+2ab$ (x) $x^3-16x, 2x^3+9x^2+4x, 2x^3+x^2-28x$

(xi) $4x^2-1, 8x^3-1, 4x^2-4x+1$ (xii) $x^3-3x^2-10x, x^3+6x^2+8x, x^4-5x^3-14x^2$

(xiii) $6x^2-13xa+6a^2, 6x^2+11xa-10a^2, 6x^2+2xa-4a^2$

4. नीचे के बीजगणितीय संख्या राशियों का ल.स.प. निकाले—

(i) $p^2-q^2, (p+q)^2$ (ii) $(x^2y^2-x^2), (xy^2-2xy+x)$ (iii) $(p+q)(p+r), (q+r)(r+p), (r+p)(p+q)$

(iv) $ab^4-8ab, a^2b^4+8a^2b, ab^4-4ab^2$ (v) $x^4+x^2y^2+y^4, x^3y+y^4, (x^2-xy)^3$

(vi) $p^2+2p, 2p^4+3p^3-2p^2, 2p^3-3p^2-14p$ (vii) $x^2-y^2+z^2-2xz, x^2-y^2-z^2+2yz, xy+zx+y^2-z^2$

(viii) $x^2-xy-2y^2, 2x^2-5xy+2y^2, 2x^2+xy-y^2$ (ix) $3x^2-15x+18, 2x^2+2x-24, 4x^2+36x+80$

(x) $(a^2+2a)^2, 2a^3+3a^2-2a, 2a^4-3a^3-14a^2$ (xi) $3a^2-5ab-12b^2, a^5-27a^2b^3, 9a^2+24ab+16b^2$

5. नीचे के बीजगणितीय संख्या राशियों का म.स.प. और ल.स.प. निकाले—

(i) $x^3-8, x^2+3x-10, x^3+2x^2-8x$ (ii) $3y^2-15y+18, 2y^2+2y-24, 4y^2+36y+80$

(iii) $a^3-4a^2+4a, a^2+a-6, a^3-8$ (iv) $a^2+b^2-c^2+2ab, c^2+a^2-b^2+2ca, b^2+c^2-a^2+2bc$

(v) $x^3-4x, 4(x^2-5x+6), (x^2-4x+4)$

15. बीजगणितीय संख्या राशियों का सरलीकरण

सुमिता के पास 20 मीटर लम्बा लाल फीता है। मैं और शांतनु ने बहुत से कार्ड बोर्ड बनाया। हमनें तय किया है उन कार्डो को चारों तरफ लाल फीता से चिपका देगें।

1 मैंने सुमिता के 20 मीटर लम्बे फीता में से 5 मीटर लिया है। शान्तनु ने 4 मीटर लिया है।

हिसाब करके देखें हम दोनों ने कितना भाग फीता लिया है।

मैंने कुल लम्बाई का $\frac{5}{20}$ हिस्सा = $\frac{1}{4}$ हिस्सा

शान्तनु ने कुल लम्बाई का $\frac{8}{20}$ हिस्सा = $\frac{2}{5}$ हिस्सा

दोनों ने कुल मिलाकर लिया $\frac{1}{4}$ हिस्सा + $\frac{2}{5}$ हिस्सा

$= (\frac{1}{4} + \frac{2}{5})$ हिस्सा = $(\frac{5+8}{20})$ हिस्सा

$= \frac{13}{20}$ हिस्सा

अब बाकी रह गाया $(1 - \frac{13}{20})$ हिस्सा = $(\frac{20-13}{20})$ हिस्सा $\frac{20-13}{20}$

$= \frac{7}{20}$ हिस्सा

2 यदि सुमिता के पास $4x^2$ मीटर लम्बा लाल फीता होता एवं वहाँ से 2xb मीटर लाल फीता लेता एवं शांतनु ax मीटर लम्बा लाल फीता लेता तो,

हिसाब करके देखे मैं और शांतनु ने कुल कितना हिस्सा लाल फीता लिया है।

मैंने लिया लाल फीता है $\frac{2xb}{4x^2}$ हिस्सा = $\frac{b}{2x}$ हिस्सा

देखते है $\frac{2xb}{4x^2}$ और $\frac{b}{2x}$ — एक ही है, इनको क्या कहेंगे?

शांन्तनु लाल फीता लिया है $\frac{ax}{4x^2}$ हिस्सा = $\frac{a}{4x}$ हिस्सा

समझा $\frac{a}{4x}$ हुआ $\frac{ax}{4x^2}$ — का [ ] आकार।

हम दोनों ने कुल लाल फीता लिया है, $\frac{b}{2x}$ हिस्सा + $\frac{a}{4x}$ हिस्सा

$= (\frac{b}{2x} + \frac{a}{4x})$ हिस्सा = $(\frac{2b+a}{4x})$ हिस्सा

कितना भाग लाल फीता बच गया देखे—

$$\left(1 - \frac{2b + a}{4x}\right) \text{ हिस्सा} = \left(\frac{4x}{4x} - \frac{2b + a}{4x}\right) \text{ हिस्सा}$$

$$= \frac{4x - (2b + a)}{4x} \text{ हिस्सा}$$

$$= \frac{4x - 2b - a}{4x} \text{ हिस्सा}$$

3 $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz}$ — क्या होता है देखें—

पहले दोनों भिन्नों को साधारण हर में बदलों।

yz एवं xz — का ल.स.प. = xyz, xyz ÷ yz = x एवं xyz ÷ xz = y

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} = \frac{x \times x}{xyz} + \frac{y \times y}{xyz} = \frac{x^2 + y^2}{xyz}$$

4 अब $\frac{x^2}{a} + \frac{a^2}{x}$ —को सरल करों।

$$+\frac{x^2}{a} = \frac{a^2}{x} \quad \frac{x^3 + a^3}{ax}$$

5 अब $\frac{x}{x-4} - \frac{1}{x^2-16}$ को सरल करों।

पहले दोनों भिन्नों को साधारण हर में परिणत करें।

$$\frac{x}{x-4} - \frac{1}{(x+4)(x-4)}$$

$$= \frac{x(x+4)}{(x-4)(x+4)} - \frac{1}{(x+4)(x-4)}$$

[(x – 4) एवं (x + 4) (x – 4) —का ल.स.प. = (x + 4) (x – 4)]

$$= \frac{x(x+4) - 1}{(x-4)(x+4)} = \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 16}$$

6 $\frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} + \frac{1}{(a-b)(b-c)}$ संख्या राशि का हर करें।

> पहले (b – c) (c – a), (c – a) (a – b) एवं (a – b) (b – c) का ल.स.प. निकाले।
>
> (b – c) (c – a), (c – a) (a – b) एवं (a – b) (b – c) का ल.स.प. = (a – b) (b – c) (c – a)

$$\frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} + \frac{1}{(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{a-b}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{c-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

[(a – b) (b – c) (c – a) ÷ (b – c) (c – a) = (a – b)
☐ ÷ ☐ = (b – c)
☐ ÷ ☐ = (c – a)]

$$= \frac{a-b+b-c+c-a}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

स्वयं करें —15.1

1) सरल करें :

(i) $\frac{2x}{3ab} \div \frac{3b}{6ac}$ (ii) $\frac{4xy}{3mn} \div \frac{2yz}{6n}$

(iii) $\frac{a}{a^2+ab} \div \frac{b}{(a+b)^2}$ (iv) $\frac{x}{x^2+xy} \quad \frac{x}{x-y}$

7 मैंने लाल फीता की कुल लम्बाई का $\frac{1}{4}$ हिस्सा लिया है, मेरा भाई मुझसे, मेरे फीता का $\frac{2}{7}$ हिस्सा फीता ले लिया।

∴ भाई लिया लाल फीते के कुल लम्बाई का $\frac{1}{4} \times \frac{2}{7}$ हिस्सा $= \frac{2}{28}$ हिस्सा

8 माना फीता की लम्बाई $8a^2x^2$ मीटर है। मैंने $2ax$ मी० फीता लिया है।

मैंने लिया $\frac{2ax^1}{8a^2x^2}$ (कटा हुआ; हर के नीचे $4ax$) हिस्सा $\frac{1}{4ax}$ हिस्सा

∴ $\frac{2ax}{8a^2x^2}$ को छोटे आकार में बदलकर पाते है ☐।

9 भाई ने मुझसे $\frac{5a}{3x^2b}$ हिस्सा फीता लिया है।

भाई ने मेरे फीते का कितना हिस्सा लम्बा फीता लिया है।

भाई ने मेरे फीते से $\frac{1}{4ax} \times \frac{5a}{3x^2b}$ हिस्सा$= \frac{5a \times 1}{4ax \times 3x^2b}$ हिस्सा$= \frac{5a}{12x^3ab}$ हिस्सा ।

[∴ दो या उनसे अधिक भिन्नों का गुण = $\frac{\text{अंशों का गुणफल}}{\text{हरों का गुणफल}}$]

10 $\frac{1-x^2}{1+b} \times \frac{1-b^2}{x+x^2}$ — बीजगणितीय भिन्नों को लघुतम आकार में बदलों।

$$\frac{1-x^2}{1+b} \times \frac{1-b^2}{x^2+x} = \frac{(1+x)(1-x)}{1+b} \times \frac{(1+b)(1-b)}{x(1+x)} = \frac{(1-x)(1-b)(1+x)(1+b)}{x(1+x)(1+b)}$$

$$= \frac{(1-x)(1-b)}{x}$$

[अंश और हर (1+ x) (1+ b) साधारण उत्पादक है अत: अंश और हर (1+ x) (1+b) का भाग करके लघुतम रूप में गुणनफल पायेंगे एवं यही भिन्नों का गुणनफल है।]

11 $\frac{(a+1)}{a+2}\times\frac{a^2-a-2}{a^2+a}$ के लघतम रूप में बदलों।

$= \frac{a+1}{a+2}\times\frac{a^2-a-2}{a^2+a}=\frac{a+1}{a+2}\times\frac{\square\times\square}{\square\,(a+1)}=\frac{\square}{\square}$ [—स्वयं करें]

स्वयं करें—15.2

1) $\frac{a\,(a+b)}{a-b}\times\frac{a-b}{b\,(a+b)}\times\frac{a}{b}$ के लघुतम रूप में व्यक्त करें।

12 हमारे लाल फीता का $\frac{7}{20}$ हिस्सा बचा था। उस बाकी बचे फीते को मैं $\frac{3}{5}$ हिस्से में बराबर बांट दिया।

प्रत्येक हिस्से में बचा $\frac{7}{20}$ हिस्सा $\div\frac{3}{5}$ हिस्सा $=\left(\frac{7}{\cancel{20}_4}\times\frac{\cancel{5}}{3}\right)$ हिस्सा $=\frac{7}{12}$ हिस्सा

अर्थात् प्रथम भिन्न ÷ द्वितीय भिन्न

= प्रथम भिन्न × $\frac{1}{\text{द्वितीय भिन्न}}$ (द्वितीय भिन्न का अन्योनक)

13 यदि $\frac{5xb}{2a^3}$ हिस्सा फीता बचा होता एवं मैं उस फीते को $\frac{7x^2}{3ab}$ हिस्से कों बराबर हिस्से में बांटता तो।

प्रत्येक भाग में है $=\frac{5xb}{2a^3}\div\frac{7x^2}{3ab}$ हिस्सा $=\frac{5xb}{2a^3}\times\frac{3ab}{7x^2}$ हिस्सा

$=\frac{15xab^2}{14a^3x^2}$ हिस्सा $=\frac{15b^2}{14a^2x}$ हिस्सा

14 $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8}\div\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-4}$ को लघुतम आकार में व्यक्त करें।

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8}\div\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-4}=\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8}\times\frac{x^2-3x-4}{x^2-x-6}$$

$$=\frac{x^2+2x-x-2}{x^2-4x+2x-8}\times\frac{x^2-4x+x-4}{x^2-3x+2x-6}$$

$$=\frac{x\,(x+2)-1\,(x+2)}{x(x-4)+2\,(x-4)}\times\frac{x\,(x-4)+1\,(x-4)}{x(x-3)+2\,(x-3)}$$

$$=\frac{(x+2)\,(x-1)}{(x-4)\,(x+2)}\times\frac{(x-4)\,(x+1)}{(x-3)\,(x+2)}$$

$$=\frac{(x+2)\,(x-1)\,(x-4)\,(x+1)}{(x-4)\,(x+2)\,(x-3)\,(x+2)}$$

[अंश और हर में $\square\times\square$ साधारण उत्पादक। अत: अंश और हर में $(x+2)\,(x-4)$ से भाग करके लघुतम रूप पायेंगे।]

$$=\frac{\cancel{(x+2)}(x-1)\,\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{(x-4)}\,\cancel{(x+2)}\,(x-3)\,(x+2)}$$

$$=\frac{(x-1)\,(x+1)}{(x-3)\,(x+2)}$$

15 $\frac{p^2-q^2}{x-y} \div \frac{p+q}{x^2-y^2}$ को लघुतम रूप मे व्यक्त करें एवं अंश और हर का साधारण उत्पादक लिखों।[स्वंय करें]

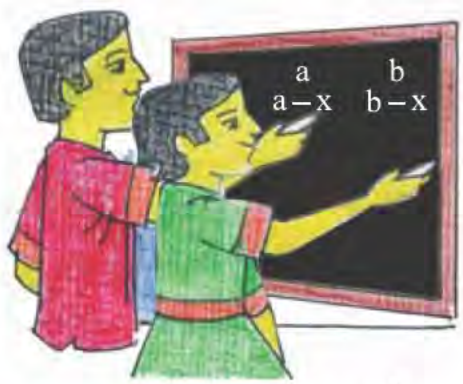
$$\frac{p^2-q^2}{x-y} \div \frac{p+q}{x^2-y^2} = \frac{p^2-q^2}{x-y} \div \frac{\square}{\square} = \frac{(p+q)\,(p-q)}{(x-y)} \times \frac{(x-y)\,(x+y)}{p+q} = \frac{\square}{\square}$$

अंश एवं हर का साधारण उत्पादक $\square$

स्वयं करें—15.3

नीचे के बीजगणितीय भिन्नों को लघुतम रूप में व्यक्त करें।

(i) $\frac{a^2 \times c^2}{c^2 \times d^2} \div \frac{bc}{ad}$ (ii) $\frac{x^2y - xy^2}{x^2 - xy}$ (iii) $\frac{p^2-q^2}{x+y} \div \frac{p-q}{x^2-y^2}$



मैं ब्लैक बोर्ड पर कुछ बीजगणितीय भिन्न लिखूंगी। सिराज उसको सरल करेगा।

मैंने लिखा —

$$\frac{\frac{a}{a-x} + \frac{b}{b-x} + \frac{c}{c-x}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}}$$

सिराज ने किया —

$$\frac{\frac{a}{a-x} + \frac{b}{b-x} + \frac{c}{c-x}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}}$$

$$= \frac{3 + \frac{a}{a-x} - 1 + \frac{b}{b-x} \quad 1 + \frac{c}{c-x} - 1}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}}$$

$$= \frac{3 + \frac{\cancel{a} - \cancel{a} + x}{a-x} + \frac{\cancel{b} - \cancel{b} + x}{b-x} + \frac{\cancel{c} - \cancel{c} + x}{c-x}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}}$$

$$= \frac{3 + \frac{x}{a-x} + \frac{x}{b-x} + \frac{x}{c-x}}{\frac{1}{x}\left(3 + \frac{x}{a-x} + \frac{x}{b-x} + \frac{x}{c-x}\right)} = \frac{x\left(3 + \frac{x}{a-x} + \frac{x}{b-x} + \frac{x}{c-x}\right)}{\left(3 + \frac{x}{a-x} + \frac{x}{b-x} + \frac{x}{c-x}\right)} = x$$

बनाकर देखें- —15

1. नीचे के संस्कर्णों को देखो और कौन सही है और कौन गलत है लिखो।

(i) $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ (ii) $\frac{a}{x+y}=\frac{a}{x}+\frac{a}{y}$ (iii) $\frac{x-y}{a-b}=\frac{y-x}{b-a}$ (iv) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$

2. नीचे के भिन्नों को लघुतम आकार में व्यक्त करों।

(i) $\frac{63a^3b^4}{77b^5}$ (ii) $\frac{18a^4b^5c^2}{21a^7b^2}$ (iii) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ (iv) $\frac{a+1}{a-2}\times\frac{a^2-a-2}{a^2+a}$

(v) $\frac{p^3+q^3}{p^2-q^2}\div\frac{p+q}{p-q}$ (vi) $\frac{x^2-x-6}{x^2+4x-5}\times\frac{x^2+6x+5}{x^2-4x+3}$ (vii) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab}\div\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$

3. नीचे के बीजगणितीय भिन्नों को सरलतम आकार में व्यक्त करो।

(i) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$ (ii) $\frac{a-b-c}{a}+\frac{a+b+c}{a}$ (iii) $\frac{x^2+a^2}{ab}+\frac{x-a}{ax}-\frac{x^3}{b}$

(iv) $\frac{2a^2b}{3b^2c}\times\frac{c^4}{3a^3}\div\frac{4bc^3}{9a^2}$ (v) $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-4x+3}$

(vi) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x^3}{x^4+1}$ (vii) $\frac{b^2-5b}{3b-4a}\times\frac{9b^2-16a^2}{b^2-25}\div\frac{3b^2+4ab}{ab+5a}$

(viii) $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-a)(b-c)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

(ix) $\frac{b+c-a}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a-b}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b-c}{(c-a)(c-b)}$

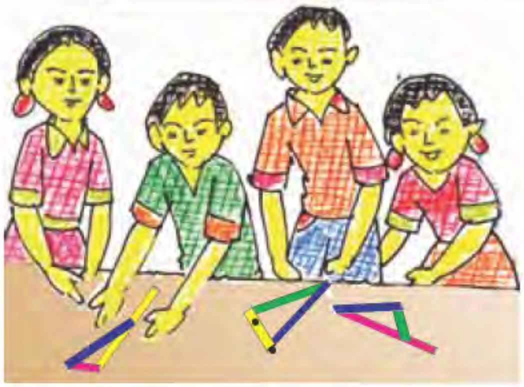
(x) $\dfrac{\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$

(xi) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\times\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

(xii) $\frac{b+c}{bc}(b+c-a)+\frac{c+a}{ca}(c+a-b)+\frac{a+b}{ab}(a+b-c)$

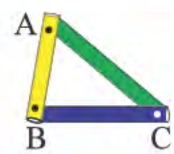
(xiii) $\frac{y^2+yz+z^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{z^2+zx+x^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{x^2+xy+y^2}{(z-x)(z-y)}$

16. त्रिभुज के कोणों और भुजाओं के बीच सम्पर्क की जाँच



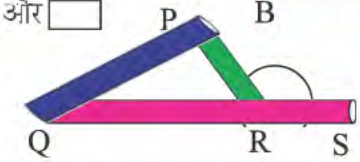
आज मैं , तानिया, कुन्तल और तुलिका ने तय किया है कि विभिन्न प्रकार के रंग स्ट्रे पीन से अटकाकर विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों की तरह बनाने की कोशिश करें।

मैंने तीन स्ट्रे से तैयार किया—



यह ABC चित्र त्रिभुज की तरह दिखता है। उसके तीन भुजा ____, ____ और ____ एवं तीन कोण ____, ____ और ____

लेकिन तुलिका तीन स्ट्रे पीन से जोड़कर बनायी—



देखते है, PQR चित्र त्रिभुज के आकार की तरह है। इसका बाहर का कोण PRS बना है। इस कोण को क्या कहेंगे?

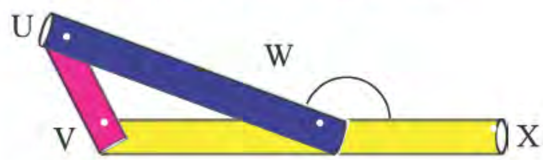
△PQR का ∠ PQR, ∠ QRP और ∠ PRQ के अंतकोण एवं ∠ PRS बाह्य कोण कहा जाता है।

देखते है, ∠PRQ, बाह्य ∠PRS का संलग्न कोण कहते है।

लेकिन ∠RPQ और ∠PQR दोनों कोण को क्या कहेंगे?

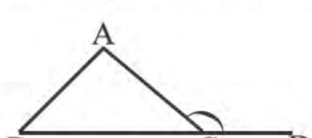
△PQR का ∠ RPQ और ∠ PQR दोनों कोण ∠ PRS का अंत: विपरीत कोण कहा जाता है।

मैं भी तुलिका की तरह एक त्रिभुज बनाया—

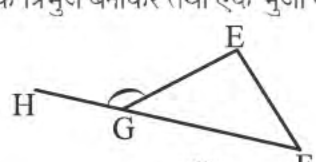


△UVW का बाह्य कोण ____ (∠UWX/∠UWV). △UVW का बाह्य ∠UWX का अंत: विपरीत दो कोण ∠UVW एवं ____

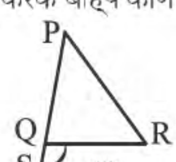
कुन्तल ने मोटे ड्राईंग कागज पर विभिन्न प्रकार के त्रिभुज बनाकर तथा एक भुजा को बढ़ा करके बाह्य कोण बनाया।



(i)



(ii)



(iii)

तानिया ने चांद की सहायता से प्रत्येक त्रिभुज के बाह्य कोणों और अंत: कोणों के विपरीत कोणों को मापकर लिखा—

(i) नं चित्र में त्रिभुज का बाह्य कोण ∠ACD = ☐ डिग्री। अंत: विपरीत कोण ∠ABC = ☐ डिग्री तथा ∠BAC = ☐ डिग्री ।

हम इस त्रिभुज के बाह्य कोण और अंत: विपरीत कोण के बीच सम्पर्क ढूढेंगे।

चांदा की सहायता से मापकर देखते है, ∠ABC + ∠BAC = ☐ डिग्री = ∠ACD (प्राय:)

त्रिभुज	बाह्य कोण	अंत: विपरीत कोण	सम्पर्क
△EFG	☐ = ☐ डिग्री	☐ = ☐ डिग्री ☐ = ☐ डिग्री	∠GEF+∠EFG = ☐ (प्राय:)
△PQR	∠RQS = ☐ डिग्री	☐ = ☐ डिग्री ☐ = ☐ डिग्री	☐ + ☐ = ∠RQS (प्राय:)

मेरे भाई ने प्रत्येक त्रिभुज के तीन अंत: कोणों को चांद की सहायता से मापकर लिखा। △ABC के तीनों अंत: कोण ☐, ☐ और ☐; ∠ABC = ☐ डिग्री, ∠BCA = ☐ डिग्री एवं ∠CAB = ☐ डिग्री

देखते है, ∠ABC + ∠BCA + ∠CAB = ☐ डिग्री

चांद की सहायता से मापकर देखे, (ii) और (iii) नं चित्र में प्रत्येक त्रिभुज का कोण तीन परिमाप के योग का ☐ डिग्री।

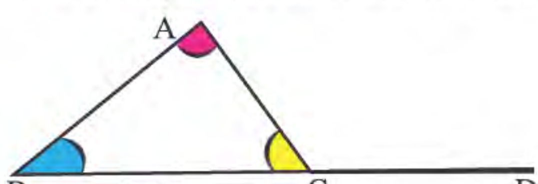
बनाकर देखे **[स्वंय करें]**

(i) सर्वप्रथम मोटे ड्राईंग पेपर पर एक ही प्रकार के दो त्रिभुज ABC बनाकर दो त्रिभुजाकार क्षेत्र काट लिए।

(ii) इस दोनों त्रिभुजाकार क्षेत्र के प्रत्येक तीनों कोणों को चित्रों की तरह रंग दिया।

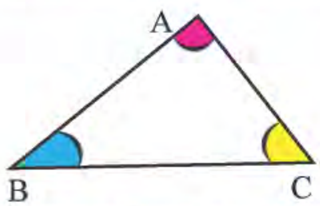
(i) (ii)

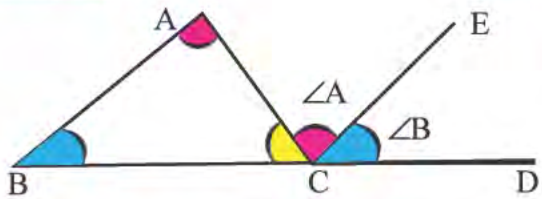
(iii) इस प्रकार का एक त्रिभुजाकार क्षेत्र एक पिचबोर्ड पर अटका दिया एवं BC भुजा को D बिन्दु तक बढ़ा दिया।



(i)

(iv) अन्य त्रिभुज के ∠A और ∠B काट लिया एवं नीचे के चित्र की तरह प्रथम त्रिभुज के बाह्य कोण में रखकर क्या पाए देखें—

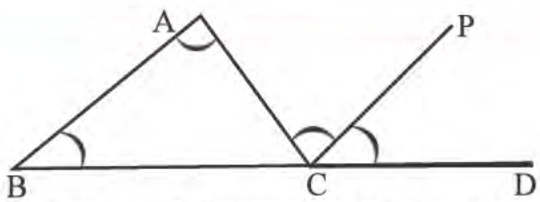




देखतो हैं, बाह्य कोण $\angle ACD = \angle A + \angle B = \angle BAC + \square$ ।

उपसिद्धान्त **7** गणितीय तर्क देकर धीरे-धीरे प्रमाणित करने की कोशिश करें—

त्रिभुज के किसी एक भुजा को बढ़ाने पर जो बाह्य कोण बनता है उसका परिमाप अन्तस्थ विपरीत कोणों का योगफल बराबर है।



प्रदत्त (दिया गया है) : ABC एक त्रिभुज लिया एवं उसके BC भुजा को D बिन्दु तक बढ़ाया। इसके फलस्वरुप बाह्य कोण$\angle ACD$ एवं अन्तस्थ विपरीत दो कोण $\angle ABC$ एवं $\angle BAC$ बना।

सिद्ध करना है : सिद्ध करना होगा कि, $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

बनावट : $\triangle ABC$ के C बिन्दु से AB भुजा के समानान्तर सरलरेखा CP खींचा।

प्रमाण : $AB \parallel CP$ एवं BD भुजा का एक कटान बिन्दु है।

$\therefore$ $\angle PCD =$ सदृश $\angle ABC$ — — — — — — (i)

फिर $AB \parallel CP$ एवं AC कटान बिन्दु है।

$\therefore$ $\angle ACP =$ एकान्तर $\angle BAC$ — — — — — — (ii)

(i) एवं (ii) को योग करके पाते है, $\angle PCD + \angle ACP = \angle ABC + \angle BAC$

$\therefore \angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

पाये, $\angle ABC + \angle BAC = \angle ACD$

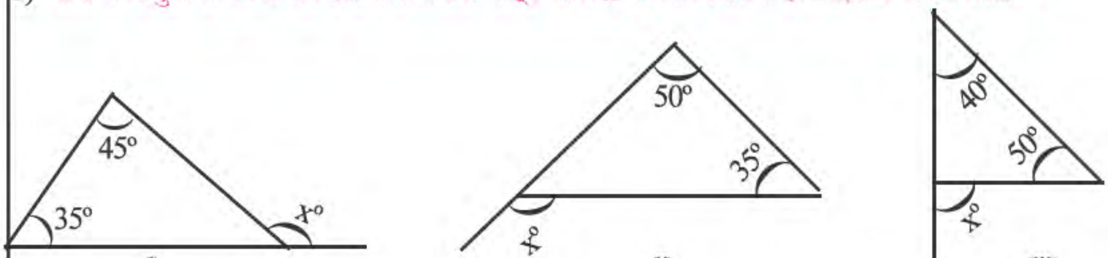
$\triangle ABC$ के BC भुजा को D बिन्दु तक बढ़ाने से जो बाह्य कोण $\angle ACD$ बना है, उसका परिमाप अन्तस्थ विपरीत दो कोण $\angle ABC$ एवं $\angle BAC$ के परिमाप का योग बराबर है। प्रमाणित।

उपसिद्धान्त : अंकित करने में कहाँ-कहाँ स्वीकार्य आते है हम ध्यान रखेंगे। यह उपसिद्धान्त कहाँ एवं कौन स्वीकार करने में लगा है उसे लिखे।

तानिया PUT एक त्रिभुज बनायीं एवं इसका UT भुजा को R बिन्दु तक बढ़ा दिया। इससे एक बाह्य कोण $\square$ एवं दो विपरीत अंत:कोण $\square$ और $\square$ बने है। मैं तर्क देकर धीरे-धीरे स्वयं प्रमाणित करुँगा कि, $\angle PTR = \angle PUT + \angle UPT$

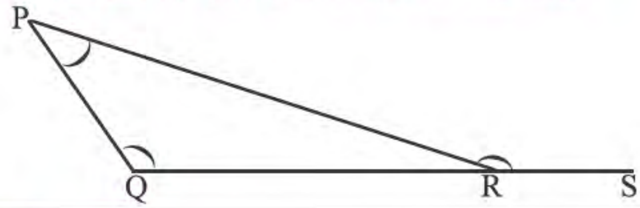
स्वयं करें—16.1

1) नीचे के त्रिभुज के कोणों को देखें तथा प्रत्येक बाह्य कोण **x** का मान कितना होगा हिसाब करके लिखें—

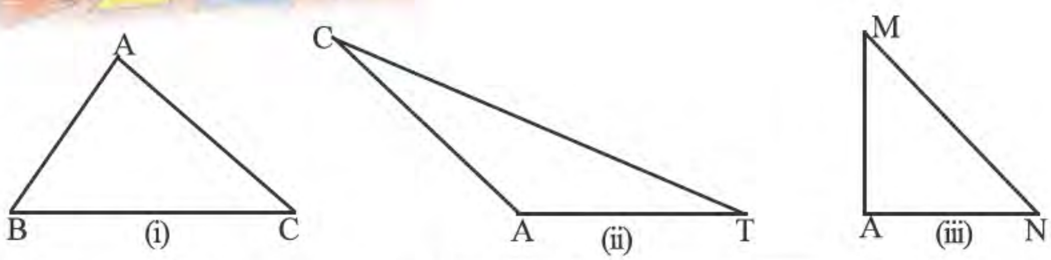


(i) (ii) (iii)

2) नीचे के त्रिभुज का बाह्य कोण ∠PRS एवं अन्त: विपरीत दो कोणों का सम्पर्क लिखे—



पल्लवी एवं कुन्तल ने विभिन्न प्रकार के अनेकों त्रिभुज बनाया।



चांद से मापकर देखते है, △ABC का ∠BAC = □ डिग्री, ∠ABC = □ डिग्री एवं

∠ACB = □ डिग्री। फिर ∠BAC + ∠ABC + ∠ACB = □ डिग्री।

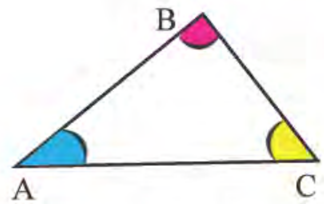
कुन्तल चांद से मापकर देखा △ACT का ∠CAT = □ डिग्री, ∠ACT = □ डिग्री एवं

∠CTA = □ डिग्री। फिर ∠ACT + ∠CAT + ∠CTA = □ डिग्री।

पल्लवी △AMN के तीनों कोणों को चांद से मापकर देखा, △AMN के तीनों कोणों का परिमाप का योगफल = □ डिग्री।

त्रिभुज के कोणों और भुजाओं के बीच सम्पर्क की जाँच

वनाकर देखें



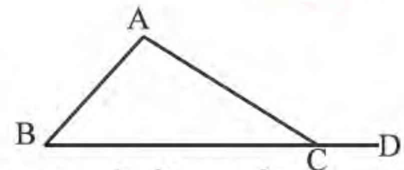
1) मैं मोटे आर्ट पेपर पर ABC एक त्रिभुज बनाया।
2) अब त्रिभुजाकार क्षेत्र के प्रत्येक कोणों को चित्र की तरह रंग किया।

3) इस त्रिभुजाकार क्षेत्र के प्रत्येक कोण को काटकर पास के चित्र की तरह शीर्ष बिन्दुओं को मिलाकर क्या पाये देखे—

प्रयोग से देखते है कि त्रिभुज के तीनों कोणों के परिमाप का योगफल ☐ डिग्री।

उपसिद्धान्त **8** तर्क देकर धीरे-धीरे प्रमाणित करें कि—

एक त्रिभुज के तीन कोणों का योगफल दो समकोण या 180° होता है।



प्रदत्त : $\triangle ABC$ एक त्रिभुज है।

प्रमाण्य : प्रमाण करना है कि, $\triangle ABC$ के तीन कोणों के माप का योगफल 2 समकोण के बराबर होगा।
अर्थात् $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

बनावट : $\triangle ABC$ की BC भुजा को D बिन्दु तक बढ़ाया।

प्रमाण : $\triangle ABC$ का $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$ [∵त्रिभुज बाह्य कोणों का परिमाप विपरीत दो अन्त: कोणों का योगफल बराबर होगा।]

या, $\angle ACD + \angle ACB = \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB$ [दोनों तरफ $\angle ACB$ योग करके पाते है]

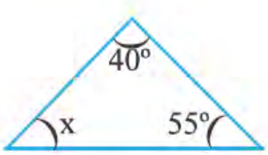
यहाँ, $\angle ACD + \angle ACB = 180^\circ$ [∵ BD सरल रेखा के ऊपर C बिन्दु पर CA सरल रेखा लम्ब है]

$\therefore$ $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$

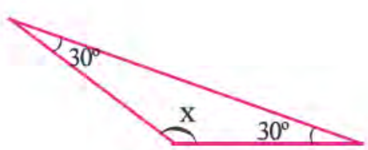
$\therefore$ $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ या, दो समकोण। (**प्रमाणित**)

1) मैं नीचे के त्रिभुजों को देखकर अनजान कोणों का परिमाप कितना होगा लिखने की कोशिश करुँगा।

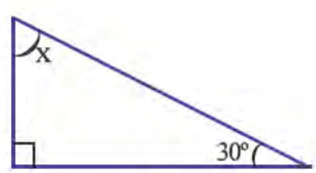
स्वयं करें—16.2



(i)



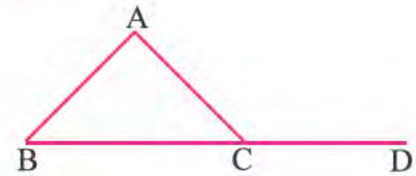
(ii)



(iii)

प्रयोग : **1** चित्र में, $\angle ACD = 114^\circ$ एवं $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BAC$

$\triangle ABC$ के कोणों का मान कितना होगा निकालें।



प्रमाण : $\angle ACD + \angle ACB = 180^\circ$

या, $\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD$

या, $\angle ACB = 180^\circ - 114^\circ$

$\therefore$ $\angle ACB = 66^\circ$

$\triangle ABC$ का बाह्य कोण $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

दिया गया $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BAC$ या, $\angle BAC = 2\angle ABC$

अत:, $\angle ABC + 2\angle ABC = 114^\circ$

या, $3\angle ABC = 114^\circ$

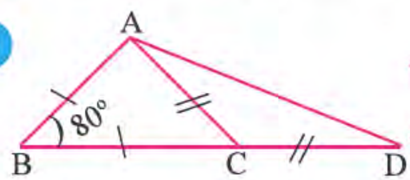
या, $\angle ABC = \frac{114^\circ}{3}$

$\therefore$ $\angle ABC = 38^\circ$

$\therefore \angle BAC = 2 \times 38^\circ = 76^\circ, \angle ACB = 66^\circ$

अत: $\angle ACB = 66^\circ, \angle ABC = 38^\circ, \angle BAC = 76^\circ$

प्रयोग : **2**



चित्र में, $AB = BC, AC = CD$ एवं $\angle ABC = 80^\circ$

$\angle ADC$ का परिमाप कितना होगा लिखेंगे।

प्रमाण : $\triangle ABC$ की भुजा $AB = BC$; अत:, $\angle ACB = \angle BAC$

या, $\triangle ABC$ में $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ$

या, $\angle ACB + 80^\circ + \angle ACB = 180^\circ$

या, $2\angle ACB = 180^\circ - 80^\circ$

या, $\angle ACB = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

$\triangle ADC$ की भुजा $AC = CD$ अत:, $\angle ADC = \angle CAD$

$\triangle ADC$ के बाह्य कोण $\angle ACB = \angle ADC + \angle CAD$

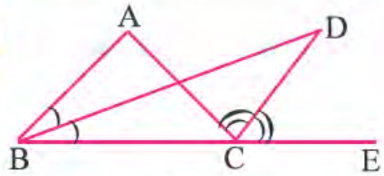
या, $50^\circ = \angle CAD + \angle CAD$

या, $2\angle CAD = 50^\circ$

या, $\angle CAD = 25^\circ$

$\therefore$ $\angle ADC = 25^\circ$

प्रयेग : **3**



ABC त्रिभुज के $\angle ABC$ के अंत: समद्विभाजक एवं $\angle ACB$ के बाह्य समद्विभाजक अर्थात् $\angle ACE$ के समद्विभाजक एक दूसरे से D बिन्दु पर मिलते है। प्रमाणित करें कि $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC$

प्रदत्त : $\triangle ABC$ के $\angle ABC$ का अंत: समद्विभाजक एवं $\angle ACB$ का बाह्य समद्विभाजक या $\angle ACE$ के समद्विभाजक D बिन्दु पर मिलते है।

प्रमाण्य : $\angle BDC = \frac{1}{2}\ \angle BAC$

प्रमाण : $\triangle BDC$ में बाह्य कोण $\angle DCE = \angle DBC + \angle BDC$

या, $2\angle DCE = 2\angle DBC + 2\angle BDC$

या, $\angle ACE = \angle ABC + 2\angle BDC$ $[\because \angle DCE = \frac{1}{2}\angle ACE$ एवं $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC]$

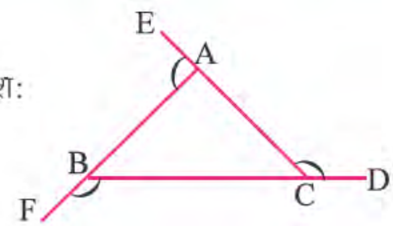
$\triangle ABC$ में बहिष्य कोण $\angle ACE = \angle ABC + \angle BAC$

या, $\angle ABC + \angle BAC = \angle ABC + 2\angle BDC$

या, $\angle BAC = 2\angle BDC$

$\therefore$ $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC$

प्रयोग : **4** प्रमाणित करें कि त्रिभुज के भुजाओं को एक ही क्रम में बढ़ायेंगे तो, जो तीन बाह्य कोण बनेंगे उनका योगफल चार समकोण के बराबर होगा।



प्रदत्त : $\triangle ABC$ की भुजा BC, CA एवं AB को एक ही क्रम में क्रमश: D, E और F बिन्दु तक बढ़ाने पर तीन बाह्य कोण $\angle ACD$, $\angle BAE$ तथा $\angle CBF$ बनते है।

प्रमाण्य : $\angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 4$ समकोण

प्रमाण : $\angle ACB + \angle ACD = 2$ समकोण

$\angle BAC + \angle BAE = 2$ समकोण

$\angle ABC + \angle CBF = 2$ समकोण

अत:, $\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC + \angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 6$ समकोण

$\triangle ABC$ का $\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 2$ समकोण

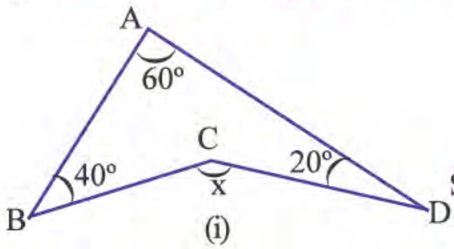
अत:, 2 समकोण $+ \angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 6$ समकोण

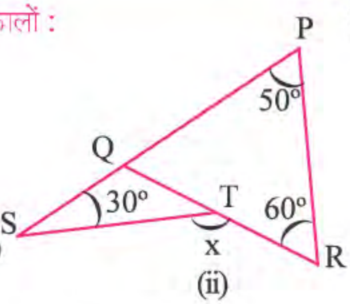
या, $\angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 6$ समकोण $-$ 2 समकोण

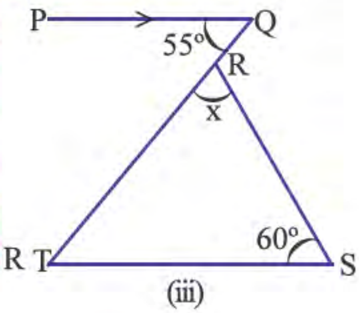
$\therefore$ $\angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 4$ समकोण

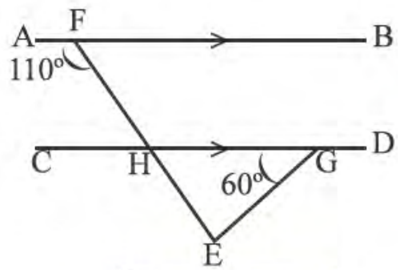
बनाकर देखें — 16.1

1. नीचे के प्रत्येक क्षेत्र के (x) का मान निकालों :

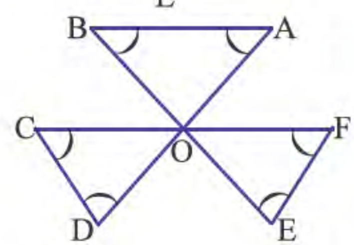




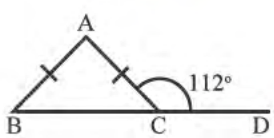


2. 

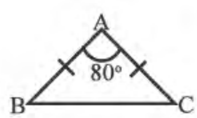
पास के चित्र में $\triangle EHG$ के कोणों का माप निकालें।

3. 

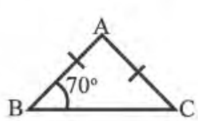
पास के चित्र में $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ का परिमाप लिखों।

4. 

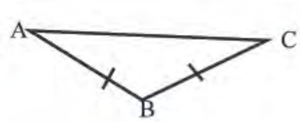
$AB = AC$ हो, तो $\angle ABC$, $\angle ACB$ और $\angle BAC$ का परिमाप लिखों।

5. 

$AB = AC$ हो, तो $\angle ABC$ एवं $\angle ACB$ का परिमाप लिखों।

6. 

$AB = AC$ हो, तो $\angle ACB$ एवं $\angle BAC$ का परिमाप लिखों।

7. 

$AB = BC$ एवं $\angle BAC + \angle ACB = 50°$; $\triangle ABC$ के कोणों का माप बताओं।

8. $\triangle ABC$ का अंतस्थ एक बिन्दु O; प्रमाणित करें कि $\angle BOC > \angle BAC$

9. प्रमाणित करों कि $\triangle ABC$ के BC भुजा को दोनों तरफ बढ़ाने पर जो दो बाह्य कोण बनते है उनका योगफल 2 समकोण से अधिक होगा।

10. $\triangle ABC$ के कोणिक बिन्दु A एवं C से क्रमश: BC एवं BA भुजाओं के समानान्तर सरल रेखांश D बिन्दु पर मिलते है। प्रमाणित करों कि, $\angle ABC = \angle ADC$

11. $\triangle ABC$ के $\angle ABC$ एवं $\angle ACB$ के दोनों अन्त:समद्विभाजक O बिन्दु पर मिलते है। प्रमाणित करों कि, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$ होगा।

12. $\triangle ABC$ के $\angle ABC$ एवं $\angle ACB$ के बाह्य दोनों समद्विभाजक O बिन्दु पर मिलते है। प्रमाणित करों कि, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$

13. $\triangle ABC$ के $\angle ACB$ के बाह्य समद्विभाजक A बिन्दु से BC भुजा का समानान्तर सरल रेखा को D बिन्दु पर काटता है। प्रमाणित करों कि, $\angle ADC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$

14. प्रमाणित करों कि एक त्रिभुज के शीर्ष कोण का समद्विभाजक एवं शीर्ष कोण से आधार पर अंकित लम्ब के कोण त्रिभुज के आधार पर स्थित दोनों कोण के अंतर का आधा होगा।

15. ABC समद्विबाहु त्रिभुज के आधार का एक कोण शीर्ष कोण का दोगुना है। त्रिभुज के कोणों का परिमाप लिखों।

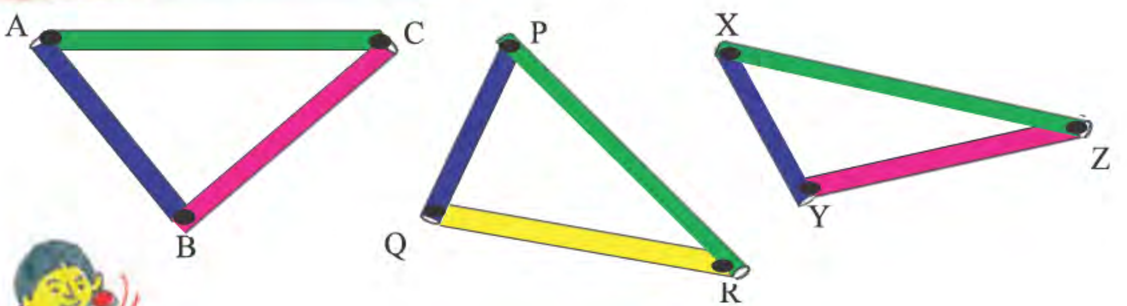
16. $\triangle ABC$ का $\angle BAC = 90^\circ$ एवं $\angle BCA = 30^\circ$; प्रमाणित करों कि, $AB = \frac{1}{2} BC$.

17. $\triangle XYZ$ का $\angle XYZ = 90^\circ$ एवं $XY = XZ$; प्रमाणित करों कि, $\angle YXZ = 60^\circ$

18. प्रमाणित करों कि समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण का माप 60° होगा।

19. ABC त्रिभुज का $\angle BAC$ का समद्विभाजक एवं AC भुजा के मध्य बिन्दु D से AB भुजा समानान्तर सरल रेखा एक दूसरे को BC भुजा के बाहर स्थित E बिन्दु पर मिलते है। प्रमाणित करना होगा कि, $\angle AEC = 1$ समकोण।

दीप्तार्क और पूजा विभिन्न रंगो के विभिन्न आकार का त्रिभुज बनाये है, जिनके कोई भी दो भुजाएँ असमान है। उन्होंने बनाया—



मैं प्रत्येक त्रिभुज के भुजाओं की लम्बाई मापूंगी एवं कौन सी भुजा छोटी और कौन सी बड़ी है तुलना करुँगी।

मापकर देखती हूँ, Δ ABC की, AC भुजा की लम्बाई > AB भुजा की लम्बाई

Δ PQR की, PR भुजा की लम्बाई > QR भुजा की लम्बाई

Δ XYZ की XZ भुजा की लम्बाई > □ भुजा की लम्बाई [स्वयं करें]

मैं चांद की सहायता से प्रत्येक त्रिभुज के कोणो के माप की तुलना करूँ।

मापकर देखती हूँ, Δ ABC का $\angle$ABC □ $\angle$ACB [>/< बैठायी]

Δ PQR का $\angle$PQR □ $\angle$QPR [>/< बैठायी]

Δ XYZ का $\angle$XYZ > □ $\angle$YXZ / $\angle$YZX बैठायी]

लेकिन देखती हूँ कि, Δ ABC की, AC भुजा का विपरीत कोण $\angle$ABC एवं AB भुजा का विपरीत कोण $\angle$ACB

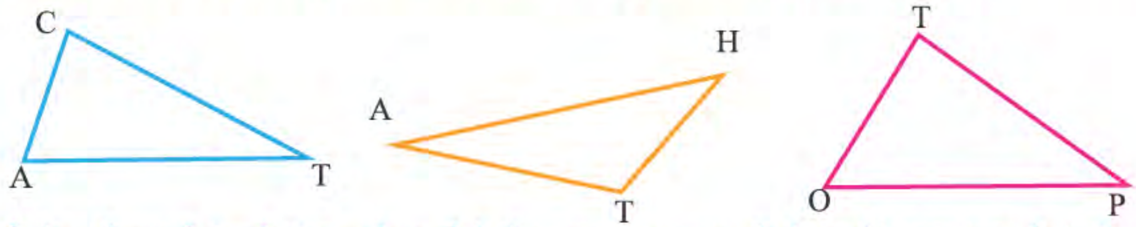
फिर, Δ PQR के, PR भुजा का विपरीत कोण □ एवं QR भुजा का विपरीत कोण □

और Δ XYZ का, XZ भुजा का विपरीत कोण □ एवं □ भुजा का विपरीत कोण □

चांद की सहायता से मापकर पायी कि प्रत्येक त्रिभुज के वृहत्तर भुजा का विपरीत कोण का परिमाप छोटी भुजा के विपरीत कोण के परिमाप की अपेक्षा □ [वृहत्तर/क्षुद्रतर]।

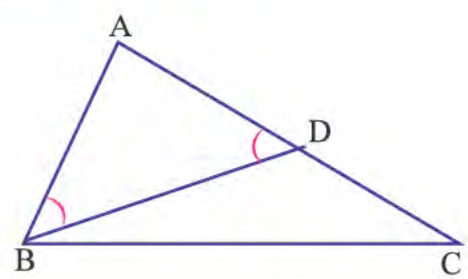
त्रिभुज के कोणों और भुजाओं के बीच सम्पर्क की जाँच

पल्लवी एवं सिराज ने बहुत सा त्रिभुज बनाया, जिसके किसी भी दो भुजाओं की लम्बाई परस्पर असमान है।



मैं स्केल और चांद से त्रिभुजों की भुजाओं एवं कोणों को मापकर तथा तुलना करके देखता हूँ कि वृहत्तर भुजा के विपरीत कोणों का माप क्षुद्रतम भुजा के विपरीत कोणों की माप अपेक्षा ☐ (वृहत्तर/क्षुद्रतर)। **[स्वयं करें]**

उपसिद्धान्त — 9 प्रमाणित करें कि—एक त्रिभुज के भुजाओं की लम्बाई परस्पर बराबर न होने पर वृहत्तर भुजा के विपरीत कोण का परिमाप छोटी भुजा के विपरीत कोण के परिमाप की अपेक्षा बड़ा होगा।



प्रदत्त : Δ ABC एक त्रिभुज है। जिसकी भुजा AC की लम्बाई AB भुजा की लम्बाई की अपेक्षा बड़ी है। अर्थात् AC > AB

प्रमाण्य : AC भुजा के विपरीत कोण का परिमाप AB भुजा के विपरीत कोण के परिमाप की अपेक्षा बड़ा अर्थात् $\angle ABC > \angle ACB$

बनावट : AC भुजा से AB भुजा की लम्बाई बराबर करके AD अंश को काट लिया। B और D बिन्दु को जोड़ दिया।

प्रमाण : Δ ABD के AB = AD (बनावट के अनुसार)

$\therefore \angle ABD = \angle ADB$ (त्रिभुज के दो भुजायें बराबर होने पर उसके विपरीत कोणों का परिमाप बराबर होगा)

ΔDCB का बाह्य $\angle ADB = \angle DCB + \angle DBC$ (त्रिभुज के बाह्य कोणों का माप विपरीत अन्त: कोणों के परिमाप का योगफल बराबर होगा)

अर्थात, $\angle ADB > \angle DCB$ या $\angle ACB$

लेकिन, $\angle ADB = \angle ABD$ अत:, $\angle ABD > \angle ACB$

$\angle ABD$, $\angle ABC$ का अंश।

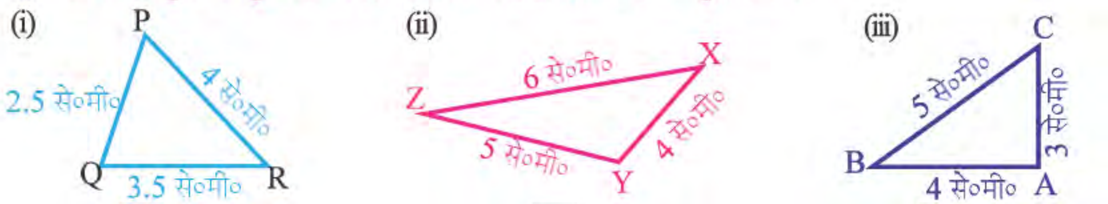
अत: $\angle ABC > \angle ABD$

फिर, $\angle ABD > \angle ACB$ $\therefore \angle ABC > \angle ACB$ **(प्रमाणित)**

निषाद Δ PQR एक त्रिभुज बनाया, जिसकी PQ भुजा की लम्बाई >QR भुजा की लम्बाई। प्रमाणित करें कि $\angle PRQ > \angle QPR$। **[स्वयं करें]**

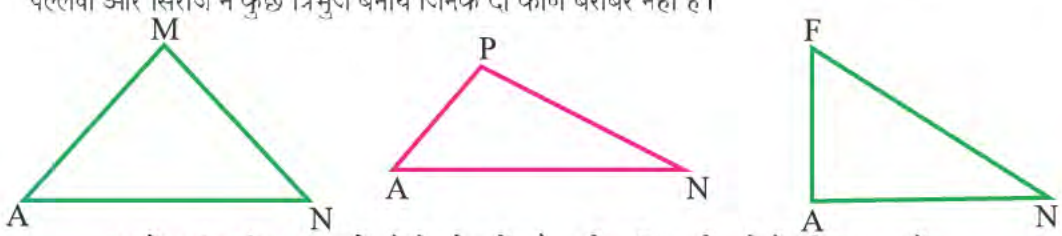
स्वयं करें—16.3

1) नीचे के त्रिभुजों के भुजाओं की लम्बाई मापकर देखो एवं कोणों की तुलना करो,



$\angle P >$ ☐ $(\angle R / \angle Q)$ $\angle X >$ ☐ $(\angle Y / \angle Z)$ $\angle C >$ ☐ $(\angle A / \angle B)$

पल्लवी और सिराज ने कुछ त्रिभुज बनाये जिनके दो कोण बराबर नहीं है।



हमलोग चांद की सहायता से कोणो को मापें और प्रत्येक त्रिभुज के कोणों की तुलना करें।

मापकर देखती हूँ, ΔMAN में $\angle AMN >$ ☐

ΔPAN में $\angle PAN >$ ☐ $[\angle PNA / \angle APN]$

ΔFAN में $\angle FNA <$ ☐ $[\angle FAN / \angle AFN]$

मैं ऊपर के प्रत्येक त्रिभुज के भुजाओं की लम्बाई स्केल से मापकर तुलना करूँगी

मापकर देखती हूँ, ΔMAN में MN ☐ AN [> / < बैठायी]

ΔPAN में PN > ☐ [PA / AN बैठायी]

ΔFAN में AN < ☐ [FA / FN बैठायी]

लेकिन देखती हूँ कि , ΔMAN का $\angle AMN$ की विपरीत भुजा ☐

एवं $\angle MAN$ की विपरीत भुजा ☐

ΔPAN का $\angle PAN$ की विपरीत भुजा ☐

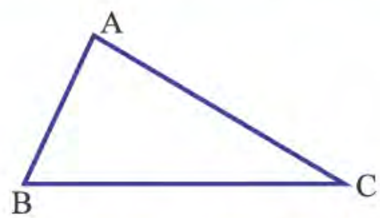
एवं $\angle PNA$ की विपरीत भुजा ☐

ΔFAN का $\angle FNA$ की विपरीत भुजा ☐

एवं $\angle FAN$ की विपरीत भुजा ☐

चांद एवं स्केल से मापकर पायी, प्रत्येक त्रिभुज के वृहत्तर कोण की विपरीत भुजा की लम्बाई सबसे छोटे कोण के विपरीत भुजा की लम्बाई की अपेक्षा ☐ (बड़ा/ छोटा) है।

उप सिद्धान्त-10 प्रमाणित करें कि—एक त्रिभुज के दो कोणों की माप परस्पर असमान हो, तो बड़े कोण के विपरीत भुजाओं की लम्बाई सबसे छोटे कोण के विपरीत भुजा की लम्बाई की अपेक्षा बड़ी होगी।



प्रदत्त : Δ ABC एक त्रिभुज है जिसका $\angle ABC$ का परिमाप $\angle ACB$ के परिमाप की अपेक्षा बड़ा है अर्थात् $\angle ABC > \angle ACB$

प्रमान्य : $\angle ABC$ के विपरीत भुजा की लम्बाई की माप $\angle ACB$ के विपरीत भुजा की लम्बाई के परिमाप की अपेक्षा बड़ा होगा अर्थात् $AC > AB$

प्रमाण : AC भुजा की लम्बाई यदि AB भुजा की लम्बाई की अपेक्षा बड़ा न हो तो होगा

(i) $AC = AB$ या (ii) $AC < AB$ होगा।

(i) $AC = AB$ हो,

$\angle ABC = \angle ACB$ होगा। [त्रिभुज के दो भुजाओं की लम्बाई बराबर हो तो उनके विपरीत कोण का परिमाप भी बराबर होगा।]

फिर, (ii) $AC < AB$ हो,

$\angle ABC < \angle ACB$ होगा। [त्रिभुज के दो भुजाओं की लम्बाई का परिमाप असमान होने पर बड़ी भुजा के विपरीत कोण का परिमाप छोटी भुजा के विपरीत कोण के परिमाप की अपेक्षा बड़ी होगी।]

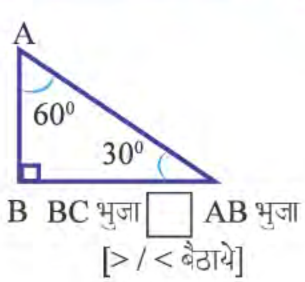
$\therefore$ (i) और (ii) दोनों शर्त नहीं हो सकता। क्योंकि दिया गया है, $\angle ABC > \angle ACB$

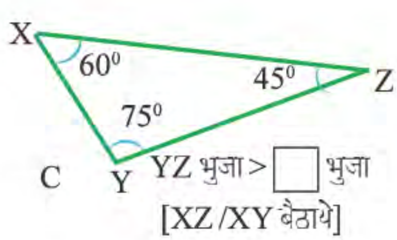
$\therefore AC > AB$ [प्रमाणित]

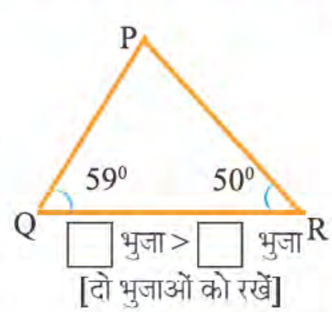
एक त्रिभुज XYZ बनायी जिसके $\angle XYZ > \angle XZY$, प्रमाणित करेगें $XZ > XY$ **[स्वयं करें]**

स्वयं करें— 16.4

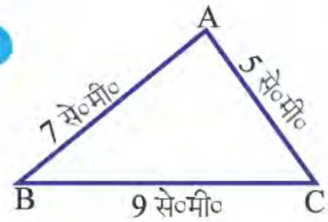
नीचे के त्रिभुजों के कोणों का माप देखें और कौन भुजा छोटी एवं कौन बड़ी है तुलना करके लिखें—







प्रयोग : 5



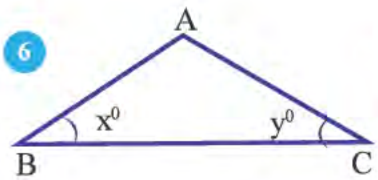
त्रिभुज के कोणों को मान के अधोक्रम में सजाये।

प्रमाण : ΔABC में, $BC > AB \therefore \angle BAC > \angle ACB$

फिर , ΔABC में, $AB > AC \therefore \angle ACB > \angle ABC$

अत: $\angle BAC > \angle ACB > \angle ABC$

प्रयोग : 6



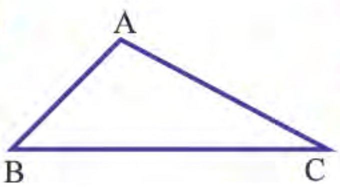
चित्र में : $AC > AB$ हो तो नीचे के कोण को सटीक लिखे

(i) $x = 2y$ (ii) $x = y$ (iii) $x = \frac{3}{5}y$

प्रमाण : ΔABC में, $AC > AB \therefore \angle ABC > \angle ACB$

अत: $x > y \quad \therefore$ (i) $x = 2y$ ठीक है।

प्रयोग : 7

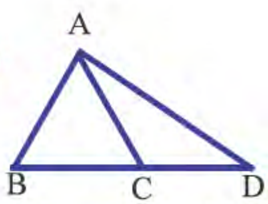


चित्र में : $\angle BAC > \angle ABC$ होने पर AC एवं BC के सम्पर्क को लिखे।

प्रमाण : ΔABC में $\angle BAC > \angle ABC$

$\therefore BC > AC$

प्रयोग : 8



ABC समबाहु त्रिभुज की बढ़ाई गई भुजा BC के ऊपर D कोई एक बिन्दु है। प्रमाणित करें कि, $\angle BAD > \angle ADB$

दिया गया है: ABC समबाहु त्रिभुज की बढ़ाई गई भुजा BC पर D एक बिन्दु है। A, D बिन्दुओं को मिला दिया गया।

प्रमाणित करना है : $\angle BAD > \angle ADB$

प्रमाण : ABC समबाहु त्रिभुज है। $\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^0$

ΔACD में बाह्य कोण $\angle ACB > \angle ADC \quad \therefore \angle ADC < 60^0$

फिर, ΔABD में, $\angle BAD > 60^0$ अत: $\angle BAD > \angle ADC$

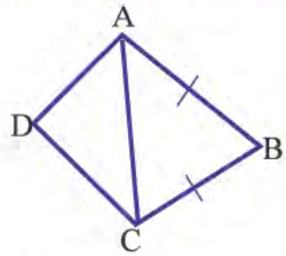
$\therefore \angle BAD > \angle ADB$

विकल्प प्रमाण : ABC समबाहु त्रिभुज है। $BC = AB$

$BD = BC + CD \quad \therefore BD > AB \; (\because BC = AB)$

ΔABD में, $BD > AB \quad \therefore \angle BAD > \angle ADB$

प्रयोग : **9** ABCD चतुर्भुज में BC = BA एवं CD > AD ; प्रमाण करें कि, ∠BAD > ∠BCD



प्रदत्त : ABCD चतुर्भुज में BC = BA एवं CD > AD

प्रमाणित करना है : ∠BAD > ∠BCD

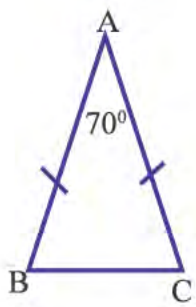
बनावट : A और C दोनों बिन्दु को मिलाये।

प्रमाण : ΔABC में, AB = BC ; ∴ ∠BAC = ∠ACB

ΔACD में, CD > AD ; ∴ ∠DAC > ∠DCA

अत: ∠DAC + ∠BAC > ∠DCA + ∠ACB अर्थात् ∠BAD > ∠BCD

प्रयोग : **10** चित्र AB = AC , ∠BAC = 70^0; प्रमाणित करे कि, असमान भुजा त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा है।



प्रमाण : ΔABC में AB = AC; ∴ ∠ABC = ∠ACB

फिर, ∠ABC + ∠ACB + ∠BAC = 180^0

या, ∠ABC + ∠ACB + 70^0 = 180^0

या, 2 ∠ABC = $180^0 - 70^0$

या, 2 ∠ABC = 110^0

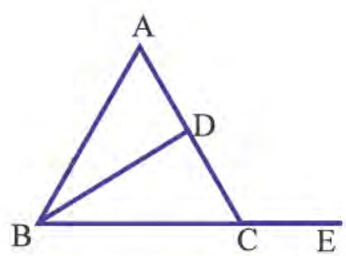
∴ ∠ABC = 55^0 अत:, ∠ACB = 55^0

ΔABC में, ∠BAC > ∠ABC ∴ BC > AC

फिर, AB = AC ∴ BC > AB

अत: ΔABC की असमान भुजा BC बड़ी भुजा है।

प्रयोग : **11** ABC समबाहु त्रिभुज की AC भुजा के ऊपर D एक बिन्दु तथा बर्धित भुजा BC के ऊपर E एक बिन्दु है। प्रमाणित करें, BE > BD



प्रदत्त: ABC एक समबाहु त्रिभुज। AC भुजा के ऊपर D एक बिन्दु एवं बर्धित BC भुजा के ऊपर एक E एक बिन्दु है।

प्रमाणित करना है : BE > BD

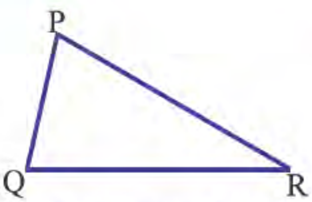
प्रमाण : ABD त्रिभुज में, बहिष्कोण ∠BDC > ∠BAC

फिर, ∠BAC = ∠ACB ∴ ∠BDC > ∠ACB अर्थात्

∠BDC > ∠DCB अत: BC > BD ।

फिर, BE = BC + CE ∴ BE > BC अत:, BE > BD.

बनाकर देखें— 16.2

1. 

चित्र में $\angle QPR > \angle PQR$

PR एवं QR के सम्पर्क को लिखें।

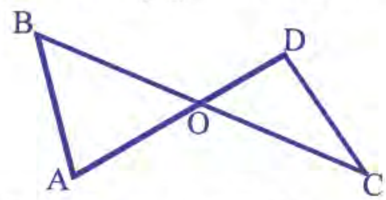
2. ΔABC में, $AC > AB$. AC भुजा के ऊपर D एक ऐसा बिन्दु है। $\angle ADB = \angle ABD$;
प्रमाणित करे कि, $\angle ABC > \angle ACB$ ।

3. ABC त्रिभुज में $AB > AC$; $\angle BAC$ का समद्विभाजक BC भुजा को D बिन्दु पर काटती है।
प्रमाणित करें कि, $BD < CD$ ।

4. ABC त्रिभुज में AD, BC भुजा के ऊपर लम्ब एवं $AC > AB$; प्रमाणित करें कि,
(i) $\angle CAD > \angle BAD$ (ii) $DC > BD$ ।

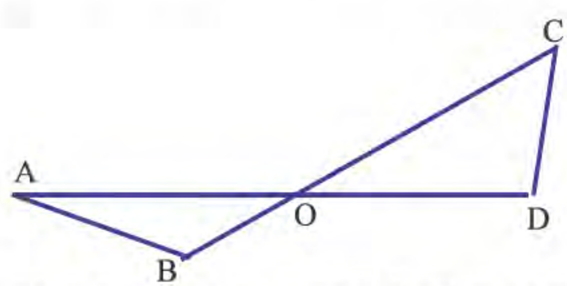
5. एक चतुर्भुज की बड़ी भुजा एवं छोटी भुजा एक दूसरे के विपरीत है। प्रमाणित करो कि बड़ी भुजा पर स्थित एक कोण उसके विपरीत कोण से छोटा होगा।

6. चित्र में, $AB < OB$ एवं $CD > OD$; प्रमाणित करें कि,
$\angle BAO > \angle OCD$ ।



7. ΔPQR की $PQ > PR$; PQ भुजा से PR भुजा की लम्बाई बराबर को जोड़ दिया। प्रमाणित करें कि,
(i) $\angle PSR = \frac{1}{2} (\angle PQR + \angle PRQ)$ (ii) $\angle QRS = \frac{1}{2} (\angle PRQ - \angle PQR)$ ।

8. ABC त्रिभुज में, $AB > AC$; $\angle BAC$ का समद्विभाजक BC भुजा को D बिन्दु पर काटता है।AB भुजा से AC की लम्बाई बराबर करके AE सरल रेखा काट लिया। D,E को मिला दिया। प्रमाणित करें कि,
(i) $\Delta ACD \cong \Delta AED$ (ii) $\angle ACB > \angle ABC$ ।

9. 

चित्र में, $AB = CD$, $\angle OCD > \angle COD$
एवं $\angle OAB < \angle AOB$
प्रमाणित करें कि, OB ∠OD

10. प्रमाणित करें कि समकोण त्रिभुज का कर्ण सबसे बड़ी भुजा है।

11. प्रमाणित करें कि स्थूलकोण त्रिभुज में स्थूलकोण की विपरीत भुजा सबसे बड़ी होगा।

12. ABC त्रिभुज का $\angle ABC$ एवं$\angle ACB$ के दोनों समद्विभाजक I बिन्दु पर मिलते हैं। यदि $AB > AC$ हो, तो प्रमाणित करें कि $IB > IC$ ।

17. समय और कार्य

शांतिपुर के मंसूर के कारखाने में 18 तांत है। लेकिन पिछले सप्ताह 3 तांत बंध हो गई। अत: पिछले सप्ताह 165 साड़ी-धोती को बुना गया। इस सप्ताह सभी तांत चालू है।

1 समानुपातिक पद्धति से हिसाब करके देखें कि इस सप्ताह मंसूर के तांत कारखाना में कितने धोती और साड़ी बुने जा सकेंगें।

गणित की भाषा में समस्या हुई—

समय (दिन)	तांत की संख्या	धोती-साड़ी की संख्या
7	18-3=15	165
7	18	?

समय निर्दिष्ट रहने् तांत की संख्या बढ़ने या घटने पर धोती-साड़ी की संख्या ☐ या ☐ (बढ़ेगी/घटेगी)।

∴ तांत की संख्या के साथ धोती-साड़ी का संख्या में सरल सम्बंध है।

∴ सरल समानुपात

15:18 :: 165 : ? (निर्णय धोती-साड़ी की संख्या)

∴ निर्णीय धोती-साड़ी की संख्या = $\frac{\overset{11}{\cancel{165}} \times 18}{\cancel{15}} = 198$

अत: इस सप्ताह सभी तांत चालू रहने पर 198 धोती-साड़ी बनेंगे।

मैं दूसरे तरीके से अर्थात् ऐकिक नियम से करुँ—

15 तांत बनाते है	165	धोती एवं साड़ी
1 तांत बनाते है	$\frac{165}{15}$	धोती एवं साड़ी
18 तांत बनाते है	$\frac{\overset{11}{\cancel{165}}\times 18}{\cancel{15}}$	=198 धोती एवं साड़ी

2 यदि सब तांत चालू रहे तो 594 धोती-साड़ी बनाने में कितने दिन समय लगेगा। देखें।

गणित की भाषा में समस्या हुई—

तांत की संख्या	धोती-साड़ी की संख्या	समय (दिन)
18	198	1सप्ताह =7 दिन
18	594	?

तांत की संख्या निर्दिष्ट रहने पर धोती-साड़ी की संख्या बढ़ने या घटने पर प्रयोजनीय समय [ ] या [ ] (बढ़ेगी/घटेगी)

∴ सरल समानुपात हुआ,

198:594:: 7: ? (निर्णेय समय)

∴ निर्णेय समय = $\frac{\overset{3}{\cancel{594}} \times 18}{\cancel{198}}$ दिन = 21 दिन

ऐकिक नियम से पाते है, 198 धोती-साड़ी बनता है	7 दिन में
1 धोती-साड़ी बनता है	$\frac{7}{198}$ दिन में
594 धोती-साड़ी बनता है	$\frac{7}{\cancel{198}} \times \overset{3}{\cancel{594}}$ दिन = 21 दिन

3 सभी तांत अर्थात् 18 तांत चालू रहने पर 21दिन में 594 धोती-साड़ी बनती है। लेकिन 594 धोती-साड़ी 14 दिन में बनाने के लिए कितने अधिक तांत की आवश्यकता होगी लिखें।

गणित की भाषा में समस्या हुई—

धोती-साड़ी की संख्या	समय (दिन)	तांत की संख्या
594	21	18
594	14	?

धोती-साड़ी की संख्या तय रहने पर समय बढ़ाने से तांत की संख्या [ ] (बढ़ेगी/घटेगी) एवं समय घटने पर तांत की संख्या [ ] (बढ़ेगी/घटेगी)

∴ समय के साथ तांत की संख्या का व्यस्त अनुपात है,

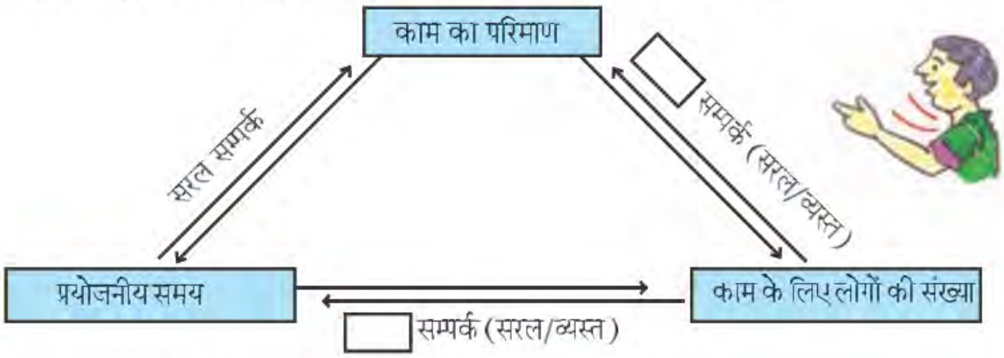
∴ व्यस्त समानुपात हुआ,

21:14 :: ? (निर्णेय तांत की संख्या) :18 ∴ 14:21 :: 18:? (निर्णेय तांत की संख्या)

∴ निर्णेय तांत की संख्या = $\frac{\overset{3}{\cancel{21}} \times \overset{9}{\cancel{18}}}{\cancel{14}\ \cancel{2}}$ = 27

∴ 21 दिन में 594 धोती-साड़ी बुनने के लिए 27 तांत चलानी होगी अर्थात् (27 – 18) तांत = 9 अधिक तांत की जरुरत होगी।

अत: देखते है कि मंसूर के तांत कारखाना में समय के साथ काम अर्थात् समय-कार्य में संपर्क है। काम के लिए आवश्यक समय और काम के लोगों या तांत के बीच जो सम्पर्क पाया उसे नीचे की तालिका में लिखे—



4 हमारे मुहल्ले के मनोज के ग्रील बनाने के कारखाने में 15दिन में 3 ग्रील बनते है। इसी प्रकार के 8 लोहे की ग्रील बनाने में कितने दिन लगेगें हिसाब करके लिखे।

गणित की भाषा में समस्या हुई—

लोहे की ग्रील की संख्या	समय (दिन)
3	15
8	?

3 लोहे की ग्रील बनाने में समय लगता है 15 दिन

1 लोहे की ग्रील बनाने में समय लगता है $\frac{15}{3}$ दिन

8 लोहे की ग्रील बनाने में समय लगता है $\frac{15}{3} \times 8$ दिन

= 40 दिन

मैं समानुपातिक पद्धति से हिसाब करुँ और सम्पर्क लिखूं [स्वयं करें]

5 नियामतपुर के एक गाँव में 15 लोग एक सप्ताह में 10 बीघा जमीन जोतते है। इसी समय में 18 बीघा जमीन को कितने लोग जोत सकते है हिसाब करें।

गणित की भाषा में समस्या हुई—

समय (दिन)	जमीन का परिमाण (बीघा)	लोगों की संख्या
7	10	15
7	18	?

समय अपरिवर्तित रहने पर काम के बढ़ने या घटने पर लोगों की संख्या क्रमश: ☐ या ☐ (बढ़ेगी या घटेगी/ घटेगी या बढ़ेगी)।

∴ काम के परिमाण के साथ काम के लोगों की संख्या ☐ (सरल/व्यस्त) अनुपात में है।

समानुपाती पद्धति से हिसाब करें—

अत:, 10:18 :: 15:? (निर्णेय लोगों की संख्या) ∴ निर्णेय लोगों की संख्या = $\frac{\overset{3}{\cancel{15}} \times \overset{9}{\cancel{18}}}{\cancel{10}}$ लोग=27 लोग

∴ 27 लोग एक सप्ताह में 18 बीघा जमीन को जोत सकते है।

ऐकिक नियम से हिसाब करें (स्वयं करें)

6 बकुलतला ग्राम पंचायत के 250 लोगों की स्वेच्छाश्रम वाहिनी 24 दिनों में एक बांध का आधा मरम्मत किये है। बाकी आधा काम 20 दिन में मरम्मत करने के लिए स्वेच्छाश्रम वाहिनी में और कितने लोगों को लेना होगा हिसाब करें।

गणित की भाषा में समस्या हुई—

काम का परिमाण (हिस्सा)	समय (दिन)	श्रमवाहिनी में लोगों की संख्या (लोग)
$\frac{1}{2}$	24	250
$\frac{1}{2}$	20	?

काम का परिमाण अपरिवर्तित रहने पर समय बढ़ाने या घटाने पर काम के लोगों की संख्या क्रमश: ☐ या ☐ (बढ़ेगी/घटेगी)

∴ समय के साथ लोगों की संख्या ☐ (सरल/व्यस्त) सम्पर्क में है।

∴ व्यस्त समानुपात हुआ,

24:20 :: ? (निर्णेय लोगों की संख्या) : 250

∴ 20:24 :: 250:? (निर्णेय लोगों की संख्या)

∴ निर्णेय लोग की संख्या = $\frac{\overset{25}{\cancel{250}} \times \overset{12}{\cancel{24}}}{\underset{10}{\cancel{20}}}$ लोग = 300 लोग

अत: और लोगों की संख्या 300 – 250 लोग = ☐ लोग श्रमवाहिनी में लगेंगें।

ऐकिक नियम से हिसाब करें (स्वयं करें)

स्वयं करें— 17.1

1) पहलामपुर के कृषि के समवाय फॅार्म में 30 लोग 5 दिन में फॅार्म के खेत का आधा धान काटे है। लेकिन अचानक बीमार पड़ जाने के कारण दूसरे दिन 5 लोग नहीं आ पाये। बाकी धान को काटने में कितना का समय लगेगा समानुपात में हिसाब करें और सम्पर्क खोजें।

2) अपनी भाषा में लिखे और उनके बीच के सम्पर्क (सरल/व्यस्त) खोजकर समाधान करें।

a.

ग्रामवासियों की संख्या (लोग)	समय (दिन)
24	12
36	?

b.

समवाय समिति की सदस्य संख्या (लोग)	समय (दिन)
30	5
30–5	?

3) एक कन्ट्राक्टर ने जहाज से 10 दिन में पूरा माल उतारने के लिए 280 लोगों को नियुक्त किया। लेकिन 3 दिन के बाद देखा गया कि $\frac{1}{4}$ भाग ही काम पूरा हुआ है और कितने अतिरिक्त लोगों को नियुक्त करने पर काम समय पर पूरा हो जायेगा।

3 दिन में $\frac{1}{4}$ हिस्सा काम करते है 280 लोग

1 दिन में $\frac{1}{4}$ हिस्सा काम करते है 280×3 लोग

1 दिन में 1 हिस्सा काम करते है $280 \times 3 \times 4$ लोग

(10–3) दिन =7 दिन में 1 हिस्सा काम करते है $\frac{280 \times 3 \times 4}{7}$ लोग

7 दिन में $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ हिस्सा काम करते है $\frac{\overset{40}{\cancel{280}} \times 3 \times \cancel{4} \times 3}{\cancel{7} \times \cancel{4}}$ लोग = 360 लोग

$\therefore$ अतिरिक्त लोग (360 – 280) लोग = 80 लोग

काम का परिमाण (हिस्सा	समय (दिन)	लोगों की संख्या
$\frac{1}{4}$	3	280
$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	10–3=7	?

व्यापक स्तर पर त्रिराशिक नियम से स्वंय करों।

4) 3 आदमी प्रतिदिन 7 घंटा काम करके 84 वर्ग मीटर दिवार को 2 दिन में रंग करते है। प्रतिदिन 8 घंटा काम करके 256 वर्ग मीटर दिवार 4 दिन में रंगने के लिए कितने लोगों की जरुरत पड़ेगी।

प्रतिदिन 7 घंटा काम करके 2दिन में 84 वर्ग मी० दीवार रंगते है 3 लोग

प्रतिदिन 1 घंटा काम करके 2दिन में 84 वर्ग मी० दीवार रंगते है 3×7 लोग

प्रतिदिन 1 घंटा काम करके 1दिन में 84 वर्ग मी० दीवार रंगते है $3 \times 7 \times 2$ लोग

प्रतिदिन 1 घंटा काम करके 1दिन में 1 वर्ग मी० दीवार रंगते है $\frac{3 \times 7 \times 2}{84}$ लोग

प्रतिदिन 8 घंटा काम करके 1दिन में 1 वर्ग मी० दीवार रंगते है $\frac{3 \times 7 \times 2}{84 \times 8}$ लोग

प्रतिदिन 8 घंटा काम करके 4दिन में1 वर्ग मी० दीवार रंगते है $\frac{3 \times 7 \times 2}{84 \times 8 \times 4}$ लोग

प्रतिदिन 8 घंटा काम करके 4दिन में 256 वर्ग मी० दीवार रंगते है $\frac{\cancel{3} \times \cancel{7} \times \cancel{2} \times \overset{4}{\cancel{\overset{16}{\cancel{\overset{32}{\cancel{256}}}}}}}{\underset{\underset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{\underset{12}{\cancel{84}}}} \times \cancel{8} \times \cancel{4}}$ लोग

= 4 लोग

$\therefore$ प्रतिदिन 8 घंटा काम करके 4 दिन में 256 वर्ग मीटर दीवार रंगते है 4 लोग।

काम (घंटा प्रतिदिन)	समय (दिन)	दीवार का क्षेत्रफल (वर्ग मी०)	लोगों की संख्या
7	2	84	3
8	4	256	?

अधिक से अधिक त्रिराशिक सूत्र से स्वयं करें

बनाकर देखें — 17.1

1. अमर के कारखाना में 3 दिन में 216 यंत्र बनते है। 7 दिन में उस कारखाने में कितने यंत्र बनेंगे हिसाब करके बताओं।

2. आँतपूर के एक तांत कारखाना में 12 तांत प्रति महीना 380 साड़ी बुनते है। पूजा के समय अधिक काम के लिए 3 नये तांत बैठाये गए। अब महीने में कितनी साड़ियाँ बुनी जायेगी, समानुपात बनाकर हल करें।

3.

समय (दिन)	काम का परिमाण (लम्बाई)
25	45
15	?

उपरोक्त तालिका को देखकर भाषा में लिखे एवं सम्पर्क बनाकर हल करें।

4. 1200 वर्ग मी० लम्बा एक नहर को खोदने का काम शुरु हुआ लेकिन देखा गया कि 15 दिन में $\frac{3}{4}$ भाग ही खोदा गया है। बाकी भाग को खोदने में और कितना समय लगेगा।

5. 3 ट्रेक्टर प्रतिदिन 18 बीघा जमीन जोतते है। 7 ट्रेक्टर दैनिक कितने बीघा जमीन जोत सकते है, हिसाब करों।

6. कुसुम के कारखाने में 35 लोग एक सप्ताह में 10 टन लोहे के यंत्रों को ढालते है। मालिक को एक सप्ताह में 14 टन लोहा के यंत्रों को ढालने का काम मिला है। उसे और कितने लोगों को नियुक्त करना होगा समानुपात बनाकर हल करों एवं सम्पर्क लिखो।

7.

लोगों की संख्या (व्यक्ति)	काम का परिमाण (साइकिल की संख्या)
9	6
72	?

मैं ऊपर की तालिका को देखकर गणित की भाषा में लिखकर एवं सम्पर्क बनाकर हिसाब करुंगा।

8. हमारे मुहल्ले का एक तालाब काटना है। 24 लोगों को उस तालाब को काटने में 12 दिन लगता है। 8 दिन में उस तालाब को काटने में कितने लोगों की जरुरत पड़ेगी, समानुपात बनाकर हिसाब करें।

9. बल्ब बनाने के एक समवाय कारखाना में 45 लोग 12 दिन में 10,000 बल्ब बनाते है। अचानक एक आर्डर मिलने पर 9 दिन में 10,000 बल्ब बनाना होगा। तो समय पर काम करने के लिए और कितने लोगों को नियुक्त करना होगा हिसाब करें।

10. 250 लोगो को 50 मी० लम्बे 35 मी० चौड़े एक तालाब काटने में 18 दिन लगता है। इस प्रकार के 70 मीटर लम्बे एवं 40 मीटर चौड़े तालाब को काटने में 300 लोगो को कितने दिन लगेगें।

7.1 हमारे घर के भीतर प्लास्टर हो रहा है। हारुन चाचा, अनवरा बीबी एवं मिहिर का चाचा ने तीन घर एक साथ प्लास्टर करना शुरु किया था।

लेकिन हारुन चाचा 10 दिन में, अनवरा बीबी 12 दिन में एवं मिहिर चाचा ने 15 दिन में काम पूरा किया।

तीनों लोग यदि एक साथ 1 घर को प्लास्टर करते तो काम जल्दी अर्थात् कम समय में पूरा होता। लेकिन तीनों एक साथ 1 घर प्लास्टर करते तो कितने दिन में काम पूरा होगा हिसाब करेगें?

प्रथम बार प्रत्येक 1 दिन में कुल काम का कितना हिस्सा करते,

हारुन चाचा 1 घर प्लास्टर करते है 10 दिन में
हारुन चाचा 1दिन में कुल काम का $\frac{1}{10}$ हिस्सा

अनवरा बीबी 1घर प्लास्टर करते है [ ] दिन में
अनवरा बीबी 1दिन में कुल काम का $\frac{1}{12}$ हिस्सा

मिहिर चाचा 1घर प्लास्टर करते है 15 दिन मे
मिहिर चाचा 1दिन में कुल काम का $\frac{1}{15}$ हिस्सा

$\therefore$ तीनों एक साथ 1 घर को प्लास्टर करने पर 1 दिन में करते है

$\frac{1}{10}$ हिस्सा + $\frac{1}{12}$ हिस्सा + $\frac{1}{15}$ हिस्सा

$= \frac{6+5+4}{60}$ हिस्सा

$= \frac{15}{60}$ हिस्सा

$= \frac{1}{4}$ हिस्सा

$\therefore$ तीनों एक साथ 1 दिन में कुल काम का $\frac{1}{4}$ हिस्सा करते है।

तीनों एक साथ $\frac{1}{4}$ हिस्सा करते है 1 दिन में,

$\therefore$ पूरा या 1 हिस्सा करते है $1 \div \frac{1}{4} = 4$ दिन में

$\therefore$ तीनों एक साथ काम करेंगे तो 1 घर को प्लास्टर करने में 4 दिन लगेगा।

7.2 यदि हारुन चाचा एवं अनवरा बीबी एक साथ 1 घर प्लास्टर करते तो कितने दिन में काम पूरा कर सकते है।

हारुन चाचा 1 दिन में करते है $\frac{1}{10}$ हिस्सा

अनवरा बीबी 1 दिन में करते है $\frac{1}{12}$ हिस्सा

दोनों एक साथ 1 दिन में करते $\frac{1}{10}$ हिस्सा + $\frac{1}{12}$ हिस्सा

$= \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right)$ हिस्सा

$= \frac{6+5}{60}$ हिस्सा

$= \frac{11}{60}$ हिस्सा

$\therefore$ हारुन चाचा तथा अनवरा बीबी 1 दिन में कुल काम का $\frac{11}{60}$ हिस्सा।

दोनों एक साथ $\frac{11}{60}$ हिस्सा 1 दिन में करते है।

1 हिस्सा करेंगे $1 \div \frac{11}{60}$ दिन $= \frac{60}{11}$ दिन $= 5\frac{5}{11}$ दिन।

1) यदि अनवरा बीबी तथा मिहिर चाचा एक साथ 1 घर प्लास्टर करते तो कितने दिन में काम पूरा करते। हिसाब करके लिखे।

देखते है अनवरा बीबी और मिहिर चाचा 1 दिन में करते है $\frac{3}{20}$ हिस्सा। [स्वंय करें]

2) यदि हारुन चाचा तथा मिहिर चाचा एक साथ 1 घर प्लास्टर करते तो कितने दिन में काम पूरा करते। हिसाब करके लिखे। [स्वयं करें]

7.3 हारुन चाचा, अनवरा बीबी एवं मिहिर चाचा एक साथ काम शुरु किये। लेकिन 2 दिन के बाद हारुन चाचा काम बंद करके चले गए एवं और दो दिन बाद अनवरा बीबी ने भी काम बंद कर दिया।

तो अकेले मिहिर चाचा बाकी काम को कितने दिन में पूरा करेंगे। इस प्रकार काम करने पर कुल कितने दिन लगेगा देखे।

पहले हारुन चाचा के चले जाने के बाद कितना हिस्सा काम बाकी रहा।

तीनो एक साथ 1 दिन में कुल काम का $\frac{1}{4}$ हिस्सा करते है

2 दिन में कुल काम का $\frac{1}{4} \times 2$ हिस्सा $= \frac{1}{2}$ हिस्सा

$\therefore$ बाकी रहा $= \left(1 - \frac{1}{2}\right)$ हिस्सा $= \frac{1}{2}$ हिस्सा।

7.4 अब हिसाब करके देखे कि अनवरा बीबी के चले जाने के बाद कुल काम का कितना हिस्सा बाकी रहा।

अनवरा बीबी 1दिन में कुल काम का $\frac{1}{12}$ हिस्सा करते है

मिहिर चाचा 1दिन में कुल काम का $\frac{1}{15}$ हिस्सा करते है

$\therefore$ अनवरा बीबी और मिहिर चाचा दोनों एक साथ 1 दिन में कुल काम का

$\frac{1}{12}$ हिस्सा + $\frac{1}{15}$ हिस्सा

$= \frac{1}{12} + \frac{1}{15}$ हिस्सा

$= \frac{5+4}{60}$ हिस्सा

$= \frac{9}{60}$ हिस्सा $= \frac{3}{20}$ हिस्सा

$\therefore$ उन दो लोगों ने एक साथ दो दिन में करेंगे $\frac{3}{\cancel{20}_{10}} \times \cancel{2} = \frac{3}{10}$ हिस्सा

$\therefore$ अनवरा बीबी के काम बंद करने के पश्चात् बाकी काम $= \frac{1}{2} - \frac{3}{10}$ हिस्सा

$= \frac{5-3}{10}$ हिस्सा

$= \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{10}_{5}}$ हिस्सा $= \frac{1}{5}$ हिस्सा

7.5 अब मिहिर चाचा बाकी $\frac{1}{5}$ हिस्सा काम कितने दिन में पूरा करेंगे देखे।

मिहिर चाचा 1 हिस्सा काम करते है 15 दिन में

मिहिर चाचा $\frac{1}{5}$ हिस्सा काम करते है = ☐ × $\frac{1}{5}$ = ☐ दिन में

$\therefore$ मिहिर चाचा बाकी काम अकेले 3 दिन में पूरा किये।

$\therefore$ इस तरह काम करने पर खत्म होने में लगा समय = [2] + [2] + ☐ = 7 दिन।

7.6 अब हिसाब करके देखें कि इस तरह काम करने पर प्रत्येक ने कुल काम का कितना हिस्सा काम किया।

हारुन चाचा ने कुल काम का $(\frac{1}{10} \times 2)$ हिस्सा = $\frac{1}{5}$ हिस्सा काम किए।

अनवरा बीबी ने कुल काम का $(\frac{1}{12} \times 4)$ हिस्सा = ☐ हिस्सा काम किए।

मिहिर चाचा ने कुल काम का $(\frac{1}{15} \times 7)$ हिस्सा = $\frac{7}{15}$ हिस्सा काम किए।

8 बूलू एवं तथागत एक काम को अकेले-अकेले क्रमश: 20 एवं 30 दिन में करते है। इनलोगों ने एक साथ 7 दिन काम करने के बाद दोनों चले गए। तब ताताई ने आकर अकेले 10 दिन में बाकी काम पूरा किया। वह काम ताताई अकेले कितने दिन में खत्म करता, समानुपात बनाकर हिसाब करें।

सबसे पहले 7 दिन के बाद बूलू एवं तथागत के चले जाने के बाद कुल काम का कितना हिस्सा काम बच गया, हिसाब करें।

बूलू अकेले 1दिन में काम करता है $\frac{1}{20}$ हिस्सा

तथागत अकेले 1दिन में काम करता है $\frac{1}{30}$ हिस्सा

$\therefore$ दोनों एक साथ 1 दिन में काम करते है $(\frac{1}{20}+\frac{1}{30})$ हिस्सा

$= \frac{3+2}{60}$ हिस्सा $= \frac{5}{60}$ हिस्सा $= \frac{1}{12}$ हिस्सा

$\therefore$ बूलू एवं तथागत 7 दिन में काम किए $\frac{1}{12}$ हिस्सा $\times 7 = \frac{7}{12}$ हिस्सा

$\therefore$ 7 दिन के बाद बूलू एवं तथागत चले गए तो बाकी काम का परिमाण = $(1-\frac{7}{12})$ हिस्सा $=\frac{5}{12}$ हिस्सा

ताताई 10 दिन में बाकी काम $\frac{5}{12}$ हिस्सा किया।

$\therefore$ गणित की भाषा में समस्या हुई—

काम का परिमाण (अंश)	समय (दिन)
$\frac{5}{12}$	10
1	?

काम का परिमाण बढ़ने या घटने पर प्रयोजनीय समय (बढ़ेगा/घटेगा) ☐ या ☐

$\therefore$ काम के परिमाण के साथ समय का ☐ (सरल/व्यस्त) समानुपात है।

$\therefore$ सरल समानुपात हुआ—

$\frac{5}{12}:1 :: 10:?$ (निर्णेय समय)

$\therefore$ निर्णेय समय $= \dfrac{10\times 1}{\frac{5}{12}}$ दिन $= \overset{2}{\cancel{10}} \times \frac{12}{\cancel{5}}$ दिन = 24 दिन

$\therefore$ ताताई अकेले काम को 24 दिन में करता।

9 आएशा, अनिता एवं अमल-अकेले अकेले एक काम को क्रमश: 10, 12 एवं 15 दिन में कर सकते है। तीनों ने अकेले-अकेले 2 दिन काम किया तो कितना काम बाकी रहा, हिसाब करें। [स्वयं करें]

हमारे घर का पानी उठाने वाला पम्प खराब हो गया है। कल बनवाया जायेगा। इसलिए कल हमारे घर 12 घंटा पानी नहीं रहेगा। आज हम अपने घर का चौबचा भरकर रखेंगें।

लेकिन घर के चौबचा में 2 नल है। यहाँ दो नल क्यों है?

10.1 एक नल से चौबचा में भरता है, दूसरे से चौबचा का पानी खाली होता है। देखते है कि प्रथम नल से खाली चौबचा 12 मिनट में भरता है, द्वितीय नल से भरा चौबचा 18 मिनट में खाली होता है। जब पहला नल बंद रहता है।

यदि दोनों ही नल खुले रहे अर्थात् चौबचा भरने एवं खाली करने वाले नल एक साथ खुले रहे तो चौबचा कितने समय में भरेगा हिसाब करें।

प्रथम नल से 1 मिनट में चौबचा भर्ती है $\frac{1}{12}$ हिस्सा।

दूसरा नल से 1 मिनट में चौबचा खाली होता है $\frac{1}{18}$ हिस्सा

$\therefore$ दोनों नल खुले रहने पर 1 मिनट में भर्ती होता है $\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right)$ हिस्सा

$= \frac{3-2}{36}$ हिस्सा $= \frac{1}{36}$ हिस्सा

$\frac{1}{36}$ हिस्सा भरता है 1 मिनट में।

1 हिस्सा भरता है $1 \div \frac{1}{36} = 1 \times 36 = 36$ मिनट

$\therefore$ दोनों नल खुले रहने पर चौबचा 36 मिनट में भरता है।

10.2 यदि दोनों नल से खाली चौबचा अलग-अलग ढंग से क्रमश: 12 मिनट और 15 मिनट में भरते है तो दोनों नल एक साथ खोल देने पर आधा भरा चौबचा कितने समय में पूरा भर जायेगा।

प्रथम नल से 1 मिनट में खाली चौबचा का $\frac{1}{12}$ हिस्सा भरता है

द्वितीय नल से 1 मिनट में खाली चौबचा का $\frac{1}{15}$ हिस्सा भरता है

$\therefore$ दोनों नल एक साथ खुले रहने पर 1 मिनट में $\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right)$ हिस्सा

$= \frac{5+4}{60}$ हिस्सा

$= \frac{9}{60}$ हिस्सा $= \frac{3}{20}$ हिस्सा

चौबचा आधा भरा हुआ है।

$\therefore$ दोनों नल एक साथ पानी भरेगें $(1 - \frac{1}{2})$ हिस्सा $= \frac{1}{2}$ हिस्सा

दोनों नल एक साथ $\frac{3}{20}$ हिस्सा पूरा करते है 1 मिनट में

1 हिस्सा पूरा करते है $1 \times \frac{20}{3}$ मिनट में

$\frac{1}{2}$ हिस्सा पूरा करते है $1 \times \frac{20}{3} \times \frac{1}{2}$ मिनट में $= \frac{10}{3}$ मिनट में $= 3\frac{1}{3}$ मिनट में

= ☐ मिनट ☐ सेकेण्ड

मैं समानुपाति बनाकर हिसाब करुंगा।

$\therefore$ गणित में समस्या हुई —

भर्ती का परिमाण (अंश)	समय (मिनट)
$\frac{3}{20}$	1
$\frac{1}{2}$	?

भर्ती के परिमाण के साथ समय ☐ (समय/व्यस्त) समानुपात में है।

$\therefore$ सरल समानुपात बनाकर पाते है,

$\frac{3}{20} : \frac{1}{2} :: 1 : ?$ (निर्णेय समय)

$\therefore$ निर्णेय समय $= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{20}{3}$

$= \frac{10}{3}$ मिनट = ☐ मिनट ☐ सेकेण्ड

11 पियाली के घर का खाली चौबचा प्रथम नल से 40 मिनट में भरता है एवं दूसरा नल से भरा चौबचा 60 मिनट में खाली होता है। पियाली ने दोनों नल एक साथ खोल दिया। हिसाब करके देखे कि कितने समय खाली चौबचा पूरा भरेगा। [स्वयं करें]

बनाकर देखें— 17.2

1. प्रिया और देबू दोनों अलग-अलग एक काम को क्रमश: 10 घंटा एवं 12 घंटा में कर सकते है। वे यदि एक साथ उस काम को करें तो कितने घंटा में काम को पूरा करेंगे।

2. मैं, मेरे भैया और मेरी दीदी तीनों ने मिलकर घर की खिड़की को रंग करेंगे। मेंरी दीदी, भैया और मै अगल तरह से इस काम को क्रमश:12, 4 एवं 6 दिन में कर सकता हूँ। हम तीनों ने यदि एक साथ काम करे तब कितने दिन में काम खत्म कर सकते है।

3. अवनी एवं अनवर अलग अलग ढंग से एक काम को क्रमश: 20 एवं 25 दिन में कर सकते है। दोनों एक साथ काम करना शुरु किए एवं 10 दिन के बाद दोनों चले गए। सूखेन ने आकर बाकी काम को 3 दिन में पूरा किया। यदि सूखेन पूरा काम अकेले करता तो काम को किने दिन में करता, हिसाब करके लिखे।

4. पौरसभा के एक पानी टैंक से पानी लेने के लिए दो नल है। दोनों नल से अलग-अलग 4 घंटा में टैंक खाली किया जा सकता है। दोनों नल एक साथ खोल देने पर कितने देर में भरा हुआ टैंक खाली हो जायेगा।

5. हमारे चौबच्चा में 3 नल लगे है। तीनो नल क्रमशः 18, 21 एवं 24 घंटा में चौबच्चा को भरा जा सकता है। (a) एक साथ तीनों नल खुले रहने पर कितने देर में चौबच्चा भर जायेगा समानुपात बनाओं एवं हिसाब करके लिखे। (b) यदि प्रथम दो नल खुले रहने पर चौबच्चा भरने में कितना समय लगेगा। हिसाब करें। (c) यदि अंतिम दो नल खुले रहे तो चौबच्चा पूरा भरने में कितना समय लगता।

6. पौरसभा के जल प्रदान करने वाले नल से रेहाना के घर का चौबच्चा 30 मिनट में भरा जा सकता है। उनके घर के सभी नलों को खोलकर वे 4 घंटे तक उस भरे चौबच्चा के जल से कम कर सकते है। किसी दिन यदि जल प्रदान करने वाला नल केवल 25 मिनट ही खुला रहे तो उस जल से वे घर का काम कितनी देर कर पायेगें। हिसाब करें।

7. किसी एक काम को रमा और रोहित 20 दिन में, और साबा 15 दिन एवं रमा और साबा 20 दिन में कर सकते है हिसाब करके देखे कि तीनो एक साथ मिलकर कितने दिन में काम को पूरा कर लेंगे। रमा, रोहित एवं साबा तीनों अलग-अलग काम करे तो कितने दिनों में काम कर पायेंगे।

8. आलोक, कलाम और जोसेफ तीनों एक काम को क्रमशः 10, 12 एवं 15 दिन में कर सकते है। तीनों ने एक साथ काम करना शुरु किया। 3 दिन के बाद कलाम चला गया। बाकी काम को आलेक और जोसेफ कितने दिन में पूरा करेंगे। समानुपात बनाकर हल करें।

9. एक काम को मैरी और डेविड क्रमशः 10 दिन एवं 15 दिन में कर सकते है। पहले मेरी अकेले 4 दिन एवं बाद में डेविड अकेले 5 दिन काम करके चले गए। मारिया ने आकर अकेले बाकी काम को 4 दिन में पूरा किया। यदि मैरी, डेविड और मारिया एक साथ काम को करते तो कितने दिन में काम समाप्त होता बताओ।

10. एक पौरसभा पानीय जल के संरक्षण के लिए एक जलाधार का निर्माण करके पम्प के साथ जोड़ दिया गया है। पम्प अलग से क्रमशः 16, 20,30 घंटा में खाली जलाधार को भर सकते है। आज सुबह 7 बजे तीनो पम्प को चालू किया गया, तब जलाधार का $\frac{1}{3}$ हिस्सा भरा था। 1 घंटा 36 मिनट के बाद प्रथम पम्प एवं उसके 2 घंटा बाद तृतीय पम्प बंद हो गया।

   (a) हिसाब करके देखें कि जलाधार पूर्ण रुप से भर गया था।

   (b) हिसाब करके देखें कि द्वितीय पम्प ने जलाधार का कितना हिस्सा भरा था।

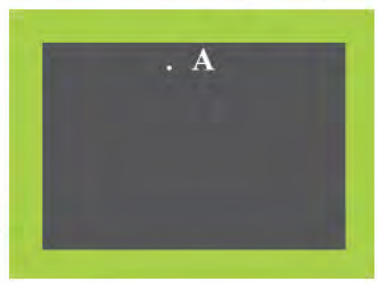
   (c) तृतीय पम्प जब बंद हुआ, तब जलाधार का कितना हिस्सा जल से भरा था, हिसाब करके लिखे।

11. मेरी मित्र रीना बगीचे का काम अकेले 4 घंटा में कर सकती है। मैं वह काम अकेले ______ घंटा में कर सकती हूँ। लेकिन दोनों एक साथ बगीचे के उस काम को कितने दिन में करेंगे लिखे। (खाली स्थान में स्वयं संख्या बैठाये।)

18. लेखचित्र

आज हम अपने कक्षा को सजायेंगे। अत: रंगीन कागज, गोद और कैंची से विभिन्न प्रकार के सुन्दर चीज बनायंगे। सोमैया बहुत सुन्दर चित्र बनाती है। अत: वह ब्लैकबोर्ड पर कुछ बनायेगी।

पहले हमने तय किया कि बोर्ड के किसी बिन्दु से चित्र बनाना शुरु करेंगे जिससे पूरे ब्लैकबोर्ड पर बना सके।

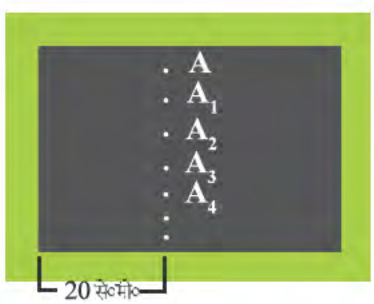


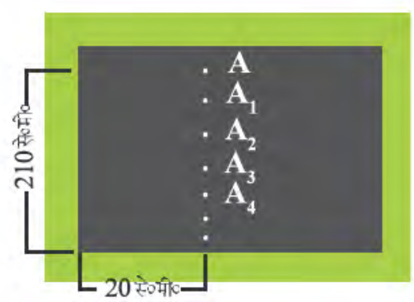
मैं बोर्ड पर एक बिन्दु A बैठाया।

लेकिन 'A' बिन्दु ब्लैकबोर्ड में कहाँ है कैसे बतायेंगे? अर्थात् ब्लैकबोर्ड पर A बिन्दु का अवस्थान कैसे जानेंगे?

मापकर देखते है 'A' बिन्दु ब्लैकबोर्ड के बायें से 20 से॰मी॰ दूर है।

लेकिन ब्लैकबेर्ड के बायें तरफ से 20 से॰मी॰ दूर देखती हूँ कि बहुत से बिन्दु है। उनमें से A बिन्दु नीचे से 210 से॰ मी॰ ऊपर है।

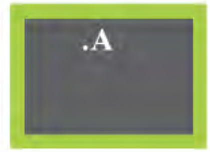




अब समझे कि ब्लैकबोर्ड पर A बिन्दु की स्थिति बॉये से 20 से॰मी॰ दूर एवं ब्लैकबोर्ड के नीचे से 210 से॰मी॰ ऊपर स्थित है।

ब्लैकबोर्ड से A बिन्दु के निर्दिष्ट स्थिति को जानने के लिए क्या लम्बाई और चौड़ाई दोनों तरफ से दूरी को जानना होगा?

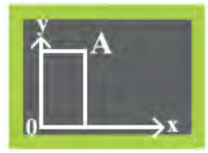
ब्लैकबोर्ड पर A बिन्दु की स्थिति (20, 210) कह सकते है क्या?



ब्लैकबोर्ड पर A बिन्दु की स्थिति (20, 210) कह सकते है।

मेरे इस A बिन्दु की स्थिति को केन्द्र करके सोमैया ने पूरा चित्र ब्लैकबोर्ड पर बनाया।

अमित एक कॉपी पर एक बिन्दु बनाकर उसकी स्थिति को लिखेगी। लेकिन A बिन्दु की स्थिति लिखने के लिए ब्लैकबोर्ड के दोनों किनारो की तरह लम्बाई और चौड़ाई के बराबर दो सरल रेखा की जरुरत है जो लम्ब रुप में हो। उनका क्या नाम देंगे।



अनुभूनिक सरल रेखा को x अक्ष एवं लंब सरल रेखा को y अक्ष कहा जाता है एवं उनके कटान बिन्दु O है जिसकी स्थिति (0, 0); क्योंकि, O से गिनती शुरु होती है। O को मुख्य बिन्दु कहा जाता है। (0, 0) पर पहले 0 मान के x अक्ष के बराबर दायें तरफ नहीं जाया गया एवं 0 मान के y अक्ष के बराबर ऊपर भी नहीं जाया गया।

सत्रहवी शताब्दी में गणितज्ञ **रेने देकार्ते** (Renè Descartes) ने अपने सीलिंग के कोन में एक कीड़े को देखकर एक तल के किसी बिन्दु की स्थिति को लेकर सोचना शुरु किए। उसने एक निर्दिष्ट बिन्दु की स्थिति को निर्णय करने के लिए अनुभूमिक और लम्ब, दो सरल रेखा की जरुरत को बतलाया है। अत: इस पद्धति को **कार्टेशियन** (Cartesian System) पद्धति कहा जाता है।

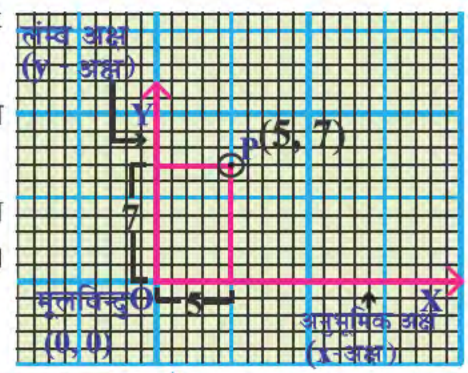
लिलि इस काम अर्थात् बिन्दु की स्थिति को जानने के काम को सहज बनाने के लिए अनेक तालिका कागज (graph paper) लायी है।

मैं अपने तालिका कागज पर x अक्ष एवं y अक्ष खींचा। मैं (5, 7) बिन्दु को खोजने की कोशिश करु।

(1) पहले तालिका कागज पर दो अक्ष खींचा। एक अनुभूमिक अक्ष या x अक्ष। दूसरा लम्ब अक्ष या y अक्ष।

(2) दो अक्षों का कटान बिन्दु O (0, 0) लिया। O को मूल बिन्दु कहा जाता है।

(3) O (0, 0) से x अक्ष बराबर 5 इकाई दायें तरफ गया। अब वहाँ से y अक्ष के बराबर 7 इकाई ऊपर उठकर P बिन्दु पर पहुँचा जिसकी स्थिति (5, 7) है।

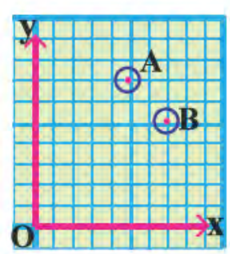


(5, 7) आकार के बिन्दु की स्थिति को क्या कहते है?

(5, 7) है P बिन्दु का स्थानांक जिसका 5 है x स्थानांक या भूज एवं 7 है y स्थानांक या कोटि है।

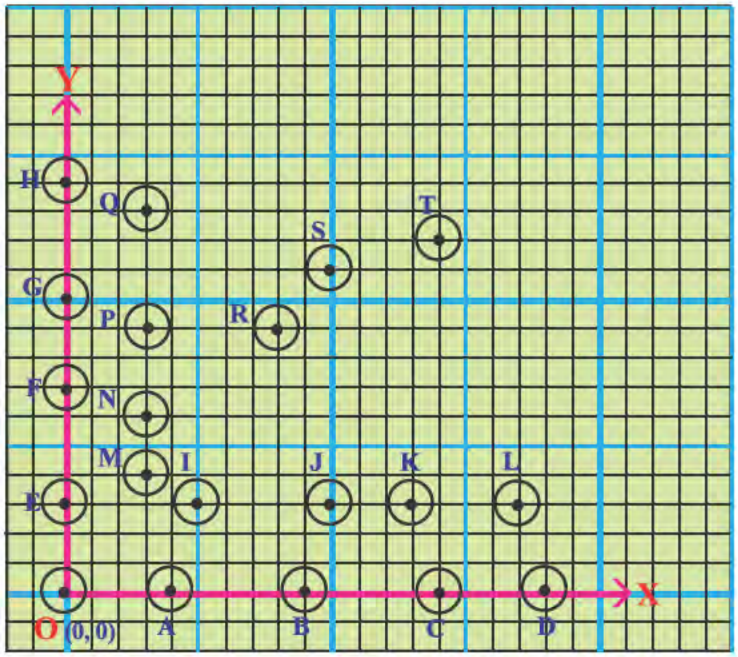
(5, 7) और (7, 5) बिन्दु क्या एक ही बिन्दु है? स्वयं कागज के ग्राफ पेपर पर बैठाकर देखों।

देखते है, A (5, 7) और B (7, 5) दोनों बिन्दु ☐ (एकही/अलग)



लेखचित्र कागज पर बिन्दु खोजे

मेरे लेखचित्र कागज पर बहुत से बिन्दु देख रहे है। बिन्दुओं का स्थानांक लिखने की कोशिश करुँ।



देखते है, A बिन्दु x अक्ष के ऊपर मूल बिन्दु से 4 इकाई दूर है।

A बिन्दु का स्थानांक क्या होगा?

A बिन्दु के y अक्ष से दूरी 4 इकाई एवं x अक्ष से दूरी 0 इकाई।

∴ A बिन्दु का स्थानांक (4, 0)

समझा, B बिन्दु का स्थानांक (9, 0)

C बिन्दु का स्थानांक (____, ____) (स्वयं करें)

____ बिन्दु का स्थानांक (18, 0) (स्वयं करें)

पाया, x अक्ष के ऊपर अवस्थित किसी बिन्दु के y स्थानांक 0 (शून्य)।

देखते है, E बिन्दु y अक्ष के ऊपर मुख्य बिन्दु से 3 इकाई दूरी पर स्थित है।

E बिन्दु का स्थानांक क्या होगा?

E बिन्दु y अक्ष के ऊपर x अक्ष से 3 इकाई दूरी पर स्थित, लेकिन y अक्ष से 0 दूरी पर स्थित है।∵

E बिन्दु का स्थानांक (0, 3)

समझा, F बिन्दु का स्थानांक (0, 7)

G बिन्दु का स्थानांक (____, ____) **[स्वयं करें]**

____ बिन्दु का स्थानांक (0, 14) **[स्वयं करें]**

पाया, y अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु का x स्थानांक ____।

लेखचित्र कागज से I और J बिन्दु का स्थानांक लिखे।

देखते है, I बिन्दु y अक्ष से 5 इकाई दूर एवं x अक्ष से 3 इकाई दूरी पर स्थित है।

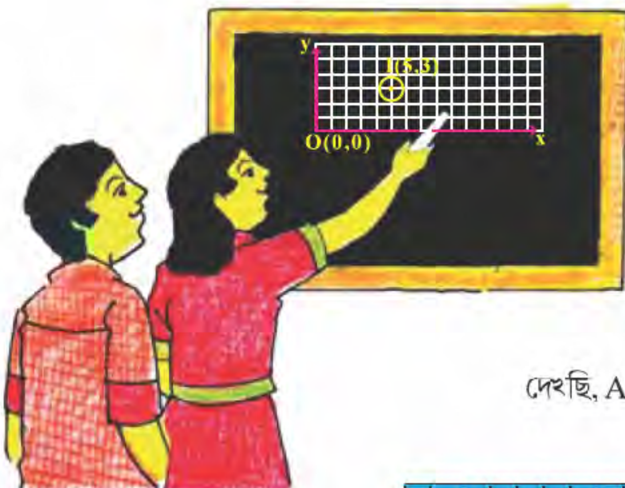
∴ I बिन्दु का स्थानांक (5, 3)

J बिन्दु y अक्ष से □ इकाई दूर एवं x अक्ष से □ इकाई दूर है।

∴ J बिन्दु का स्थानांक (□, □)

K एवं L बिन्दु का स्थानांक लिखे **[स्वयं करें]**

इसी प्रकार M, N, P, Q, R, S एवं T बिन्दु का स्थानांक लिखे **[स्वयं करें]**



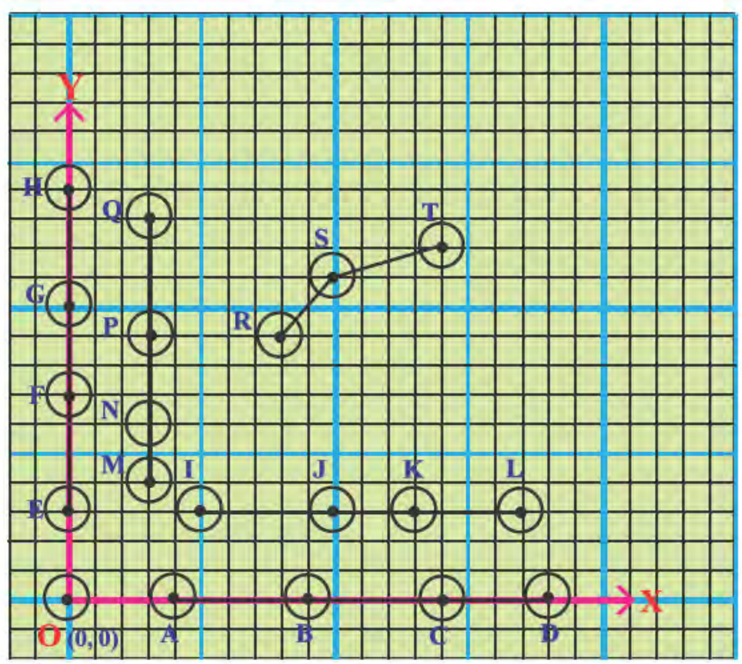
अब लेखचित्र कागज के बिन्दुओं को पेंसिल से मिलायें और देखे कौन तीन या तीन से अधिक बिन्दु समरेखीय है।

দেখছি, A, B, C, और D बिन्दु □ अक्ष के ऊपर है एवं यें □ (समरेखीय/असमरेखीय)।

□, □, □ और □ बिन्दु y अक्ष के ऊपर है एवं यें □ (समरेखीय/असमरेखीय)।

I, J, □ और □ बिन्दु यें समरेखीय है।

फिर, M, N, □ और □ बिन्दु समरेखीय है। लेकिन R, S और T बिन्दु □ (समरेखीय/असमरेखीय)।



स्वयं करें — 18.1

1) लेखचित्र कागज पर A (4, 0), B (0, 6), C(2, 5), D(7, 1), E(☐, 5) एवं F(☐, 5) बिन्दुओं को बैठाओ।
2) (1, 1), (3, 7), (9, 1) एवं (12, 1) बिन्दुओं को लेखचित्र पर बैठाये और पेंसिल से जोड़कर देखें कि समरेखीय है या नहीं।
3) लेखचित्र कागज पर 4 समरेखीय बिन्दुओं को लिखे और उनका स्थानांक भी लिखे।

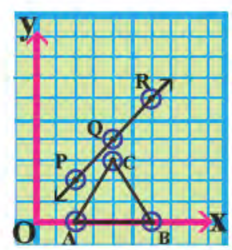
इस प्रकार लेखचित्र कागज पर बिन्दुओं को बैठाकर तथा जोड़कर जो चित्र मिलेगा उसे क्या कहेंगे?

बिन्दुओं के स्थानांक से लेखचित्र पर बिन्दुओं को बैठाकर एवं जोड़कर जो चित्र बनता है उसे लेखचित्र (Graph)कहते है।

यदि बिन्दुओं को जोड़कर जब सरलरेखांश पाते है उसे रैखाय लेखचित्र (Linear graph) कहा जाता है।

1 A(2, 0), B(6, 0) और C(4, 3) बिन्दुओं को लेखचित्र कागज पर बैठायें एवं A, B ; B, C एवं C,A जोड़कर देखे क्या पाते है?

बिन्दुओं को जोड़कर एक ☐ पाया (त्रिभुज/चतुर्भुज)



2 P(2,2), Q(4, 4), R(6, 6) बिन्दुओं को जोड़कर एक ☐ (रैखिक/रैखिक नहीं) लेखचित्र पाते है।

3 P(1, 2), A(2, 3), T(3, 4), , H(4, 5) बिन्दुओं को लेखचित्र पर बैठाये और जोड़कर देखे कि रैखीय लेखचित्र पाये या नहीं **[स्वयं करें]**

मोहित ने मुहल्ले के सुबोध चाचा की दुकान से 6 कलम 12 रुपये में खरीदा। हमने तय किया है कि वार्षिक क्रीड़ा के सांत्वना पुरस्कार के लिए उस कलम को खरीदेंगे। अत: हमने दो दर्जन कलम ☐ रुपये में खरीदा। ग्यासुद्दीन इसी तरह की 10 कलमें 10×2 रुपये = 20 रुपये में खरीदा।

4 मैं कलमों की संख्या और मूल्य की एक तालिका बनाया—

कलम की संख्या	6	10	24
कलम का मूल्य(रु)	12	20	48

मैं अपने लेखचित्र कागज पर तथ्यों की एक लेखचित्र बनाने की कोशिश करुँ।

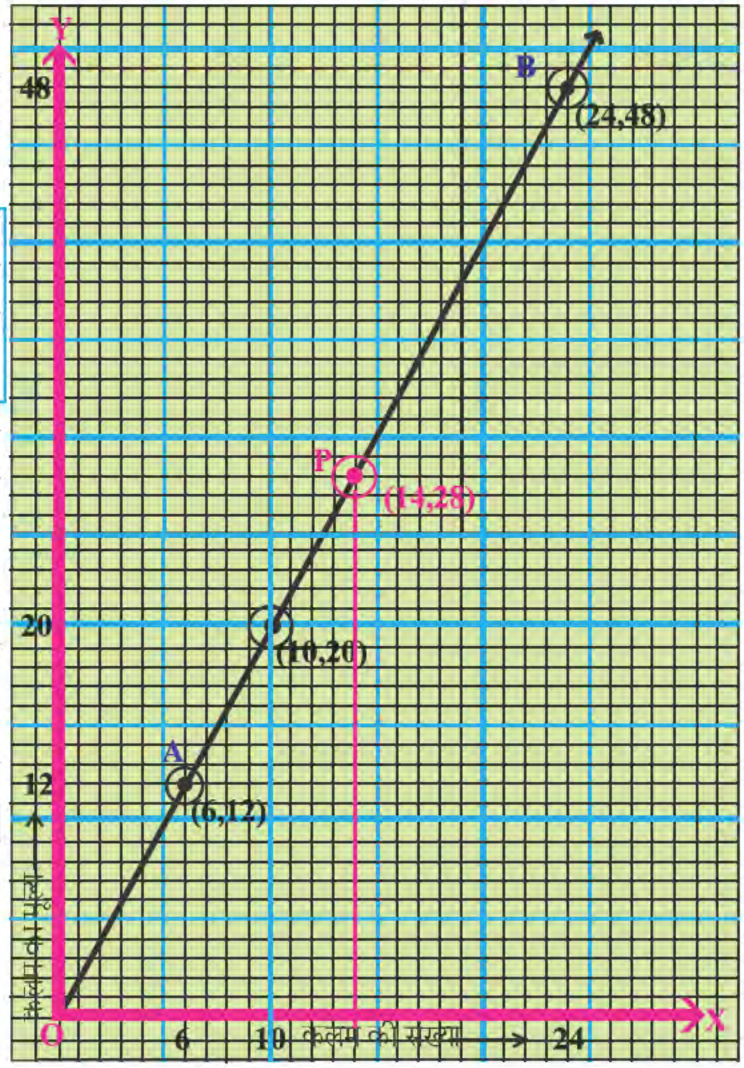
(1) पहले x अक्ष और y अक्ष खींचकर दोनों अक्ष के बराबर एक सुविधा के अनुसार स्केल लिया।

x अक्ष के बराबर सबसे छोटे वर्ग क्षेत्र की एक भुजा की लम्बाई = 1 कलम एवं y अक्ष के बराबर सबसे छोटे वर्ग क्षेत्र के एक भुजा की लम्बाई =1 रुपये लिया।

(2) x अक्ष के बराबर कलम की संख्या एवं y अक्ष के बराबर कलम का मूल्य मान लिया।

(3) लेख के तथ्य से (6, 12), (10, 20) एवं (24, 48) बिन्दुओं को लेखचित्र पर बैठाया।

(4) बिन्दुओं को मिलाकर AB एक सरल रेखा पाया। अत: वह एक ☐ लेखचित्र है।



5 हम ऊपर के रेखीय लेखचित्र से 14 कलमों के मूल्य को ढूँढ़ने की कोशिश करें।

अनुभूमिक रेखा अर्थात् x अक्ष पर14 कलमों की संख्या का बिन्दु लेकर y अक्ष के समानान्तर एक रेखा खींचा जो AB सरल रेखा को P बिन्दु पर काटती है।

P बिन्दु का स्थानांक (14, ☐)

∴ 14 कलम का मूल्य 28 रुपये।

6 मैं ऊपर के रेखीय लेखचित्र से 36 रुपये में कितने कलम पाऊँगा देखूँ।

लम्ब रेखा अर्थात y अक्ष के ऊपर 36 रुपये के बिन्दु से x अक्ष के समानान्तर एक अनुभूमिक रेखा खींचा जो AB सरलरेखांश को Q बिन्दु पर काटता है।

Q बिन्दु का स्थानांक (☐, 36)

∴ रेखीय लेखचित्र से पाया कि, 36 रुपये में 18 कलम मिलेगी।

7 लेकिन इस BA सरलरेखांश को मूल बिन्दु तक बढ़ाकर देखें क्या पाते है।

समझ गया, जबकि मूल बिन्दु का स्थानांक (0, 0) अत:, 0 कलम का दाम 0 रुपये।

अब कलम का दाम तथा कलम की संख्या ☐ (सरल/व्यस्त) सम्पर्क में है।
इस सरल सम्पर्क में रेखीय लेखचित्र पाया।

स्वयं करें – 18.2

1) मैंने 4 कॉपियाँ 20 रुपये में खरीदा। इसी तरह कॉपियों की संख्या के साथ कॉपियों के मूल्य को तथ्यों में लिखा एवं उस लिखे तथ्यों को लेखचित्र कागज पर बैठायें।

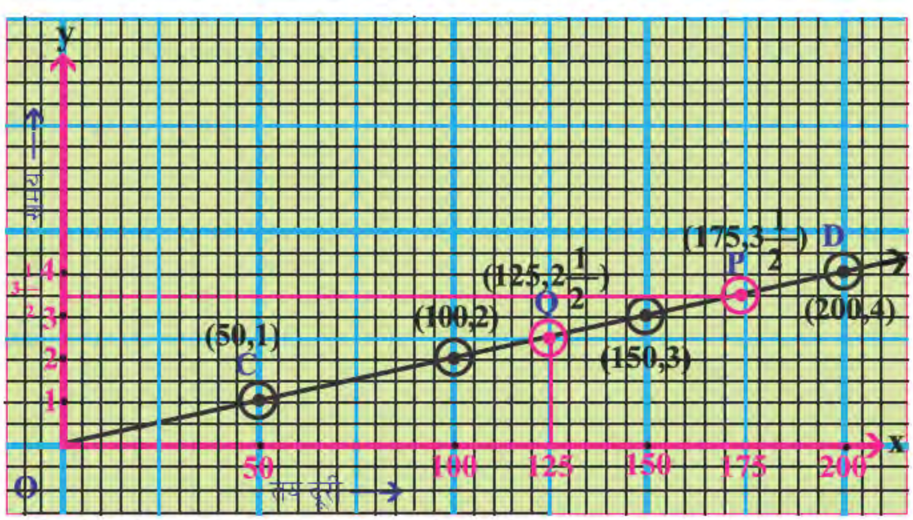
कॉपियों की संख्या	4	8	10	12
कॉपियों का मूल्य (रु)	20	40	50	60

लेखचित्र कागज पर स्वयं लेखचित्र बनाए एवं उस लेखचित्र से 6 कॉपियों का मूल्य एवं 45 रुपये में कितनी कॉपियाँ मिलेगी हिसाब करें।

8 आज हमलोग टैक्सी भाड़ा करके शालबनी जा रहे है। वहाँ पर मेरे मामा का घर है। सबबह 7 बजे रवाना हुए है। हमारी गाड़ी प्रति घंटा में कितनी दूरी तय की उसका तथ्य नीचे लिखा है। मैं लेखचित्र कागज पर इन तथ्यों के लेखचित्र को अंकित किया।

समय (घंटा)	1	2	3	4
तय दूरी (कि०मी०)	50	100	150	200

लेखचित्र से सुबह10.30 बजे तक टैक्सी कितनी दूरी तय किया है देखे एवं 125 कि०मी० कब तय की।



(1) सबसे पहले ग्राफ पेपर पर x अक्ष एवं y अक्ष बनाया एवं दोनों अक्ष के बराबर सुविधा के अनुसार स्केल लिया।

(2) x अक्ष बराबर तय दूरी एवं y अक्ष बराबर समय मान लिया।

x अक्ष बराबर सबसे छोटे वर्ग क्षेत्र की एक भुजा की लम्बाई = 5 कि०मी० एवं y अक्ष बराबर सबसे छोटे वर्ग क्षेत्र के दो भुजाओ की लम्बाई = 1 घंटा मान लिया।

(3) ऊपर के लेखचित्र के तथ्यों से (50, 1), (100, 2), (150, 3) एवं (200, 4) बिन्दुओं को लेखचित्र कागज पर बैठाया।

(4) बिन्दुओं को मिलाकर CD सरलरेखांश पाया।

लेखचित्र से सुबह 10.30 बजे अर्थात् (10 बजकर 30 मिनट – 7 बजे)

= 3 घंटा 30 मिनट या $3\frac{1}{2}$ घंटा के बाद गाड़ी कितनी दूर रास्ता तय की है देखें।

लम्ब रेखा अर्थात् y अक्ष बराबर $3\frac{1}{2}$ घंटा बिन्दु से x अक्ष के समानान्तर सरलरेखांश CD सरलरेखांश को P बिन्दु पर छेद करती है।

P बिन्दु का स्थानांक $(175, 3\frac{1}{2})$

$\therefore$ 3 घंटा 30 मिनट में हमारी गाड़ी175 कि०मी० गई थी।

उसी तरह लेखचित्र से देखते है कि हमारी गाड़ी 125 कि०मी० रास्ता 2 घंटा 30 मिनट अर्थात् 9 बजकर 30 मिनट पर पार की थी।

DC सरलरेखांश को O बिन्दु तक बढ़ाया। O बिन्दु का स्थानांक (0,0) क्या प्रकाशित करता है लिखें।

स्वयं करें — 18.3

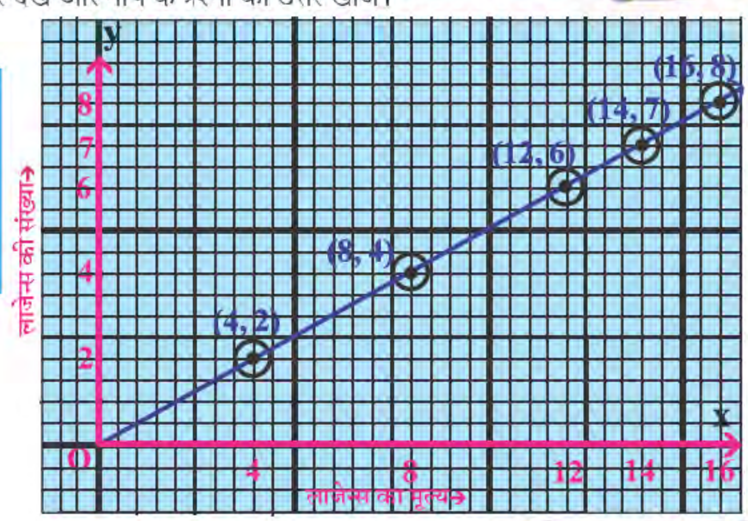
(1) मैं तालिका कागज पर नीचे के तथ्यों का समय दूरी का लेखचित्र बनायें और वहाँ से 4 घंटा में तय दूरी को देखे एवं 150 कि०मी० दूरी कितने समय में जायेगी लेखचित्र से बतायें।

समय (घंटा)	2	3	5
दूरी (कि०मी०)	50	75	125

9 हम नीचे के लेखचित्र के कागज पर देखें और नीचे के प्रश्नों का उत्तर खोजे।

x अक्ष के सबसे छोटे वर्ग के 2 भुजाओ की लम्बाई = 1 रुपये

y अक्ष के सबसे छोटे वर्ग के 2 भुजाओ की लम्बाई = 1 लाजेन्स



(i) लेख कागज के लेखचित्र किस विषय का है लिखे।

(ii) लाजेन्स की संख्या और मूल्य में क्या सम्पर्क है लिखे।

(iii) 8 लाजेन्स का मूल्य कितने है लिखे।

(iv) 12 रुपये में कितने लाजेन्स मिलेगा लेखचित्र कागज से लिखे।

(v) 1 लाजेन्स का दाम कितने रुपये होगा लिखे।

(vi) 14 रुपये में कितने लाजेन्स मिलेगा लिखे।

उत्तर :

(i) लेखचित्र कागज के लेखचित्र को लाजेन्स का मूल्य एवं संख्या का लेखचित्र।

(ii) लेखचित्र रैखिक लेखचित्र है। लाजेन्स की संख्या और लाजेन्स का दाम [ ] (सरल/व्यस्त) सम्पर्क है।

[स्वयं करें]

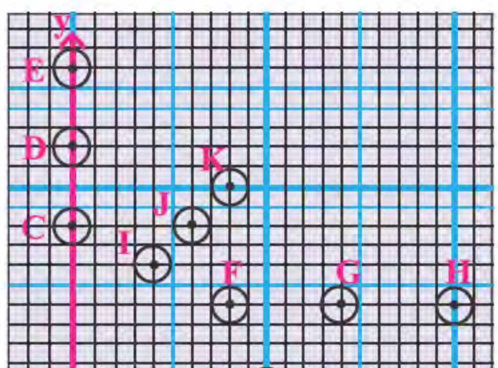
(iii) लेखचित्र से देखते है कि 8 लाजेन्स का दाम [16] रुपये।

(iv) लेखचित्र से देखते है कि 12 रुपये में 6 लाजेन्स मिलते है।

(v) 1 लाजेन्स का दाम [ ] रुपये **[स्वयं करें]**

(vi) 14 रुपये में मिलेगा [ ] लाजेन्स। **[स्वयं करें]**

बनाकर देखें — 18



1. (i) पास के लेखचित्र कागज पर दोनो अक्ष बराबर क्षद्रतम वर्गाकृति 2 भुजाओं की लम्बाई1 इकाई लेकर बिन्दुओं को देखें और उनका स्थानांक लिखे।

   (ii) बिन्दुओं के बीच कौन या कौन-कौन तीन बिन्दु समरेखीय है देखें।

   (iii) बिन्दुओं के बीच तीन बिन्दुओं को खोजें जो समरेखीय नहीं है।

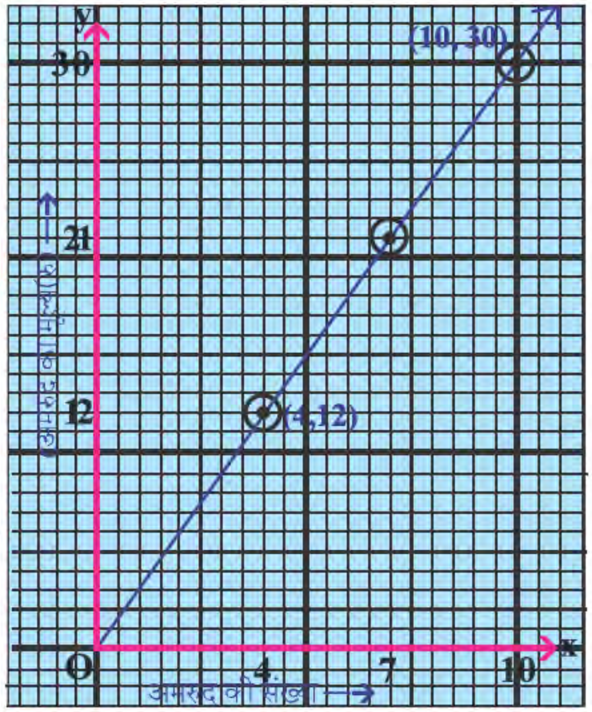
2. स्वयं लेखचित्र पर $(1, 0), (0, 5), (2, 1), (3, 3), (1, 3), (2, 5)$ और $(0, 0)$ बिन्दु दिखाओं।

3. (i) स्वयं $(1, 1), (2, 2)$ और $(6, 6)$ बिन्दुओं को लेखचित्र कागज पर बैठायें और मिलाकर देखे कि समरेखीय है या नहीं।

   (ii) स्वयं किसी तीन असमरेखीय बिन्दुओं का लेखचित्र पर बैठाये।

   (iii) हम ऊपर के तीन बिन्दुओं के बाद किसी तीन समरेखीय बिन्दुओं को लेखचित्र बनाये और उनके स्थानांकों को लिखे।

4. पास के तालिका लेखचित्र को देखे और नीचे के प्रश्नों का उत्तर खोजे।



माना, x अक्ष बराबर क्षुद्रतम वर्ग के 2 भुजाओं की लम्बाई = 1 अमरुद एवं
y अक्ष बराबर क्षुद्रतम वर्ग के 1 भुजाओं की लम्बाई = 1 रुपये।

(i) लेखचित्र से अमरुद की संख्या एवं दाम में क्या सम्पर्क है लिखे।

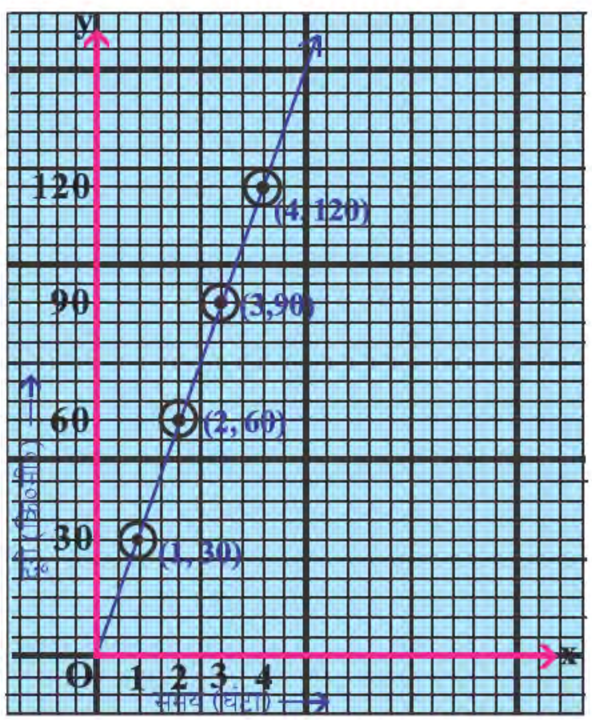
(ii) 4 अमरुद का मूल्य कितना होगा लिखे।

(iii) 30 रुपये में कितने अमरुद मिलेंगे लिखे।

(iv) 9 रुपये में कितने अमरुद मिलेंगे लेखचित्र से लिखे।

(v) 9 अमरुद का मूल्य लेखचित्र से लिखे।

5. पास के समय और दूरी को लेखचित्र में देखें और नीचे के प्रश्नों का उत्तर खोजें।



x अक्ष बराबर सबसे छोटे वर्ग क्षेत्र के 2 भुजाओं की लम्बाई = 1 घंटा एवं
y अक्ष बराबर सबसे छोटे वर्ग क्षेत्र के 1 भुजाओं की लम्बाई = 5 कि०मी०।

(i) समय के साथ दूरी के सम्पर्क को लिखें।

(ii) लेखचित्र से 3 घंटा में कितनी दूरी तय हुआ है लिखें।

(iii) 120 कि०मी० रास्ता तय करने में कितने घंटे लगेंगे लिखे।

(iv) वेग कितना कि०मी० है लिखे।

(v) 2 घंटा 30 मिनट में कितनी दूरी तय करेंगे लेखचित्र से लिखे।

(vi) 45 कि०मी० दूरी तय करने में कितना समय लगेगा लिखे।

6. नीचे के तथ्यों को लेखचित्र कागज पर बनाओं एवं लेखचित्र रैखिक है या नहीं देखें।

पेंसिल की संख्या	3	5	7	8
पेंसिल का मूल्य (रु)	6	10	14	16

7. नीचे के तथ्यों को लेखचित्र कागज पर बनाओं एवं लेखचित्र रैखिक है या नहीं देखें।

समय (घंटा)	2	4	6	8
दूरी (कि०मी०)	40	80	120	160

8. नीचे के तथ्यों को लेखचित्र कागज पर बनाओं एवं लेखचित्र रैखिक है या नहीं देखें।

बैग की संख्या	1	2	3	4
बैग का मूल्य (रु)	50	100	150	200

9. नीचे के तथ्यों को लेखचित्र कागज पर बनाओं एवं लेखचित्र रैखिक है या नहीं देखें।

पुस्तक संख्या	2	3	5	8
पुस्तक का मूल्य (रु)	50	75	125	200

10. नीचे के तथ्यों को लेखचित्र कागज पर बनाओं एवं लेखचित्र रैखिक है या नहीं देखें।

उवार	1	3	5	7
उवार खतम के बाद रन की संख्या	4	12	20	24

19. समीकरण गठन और समाधान

आज हमलोग एक मजेदार खेल खलेंगे। शिवानी ने बहुत सा मार्बेल एक कपड़े के छोटे थैले में जमा किया है। मैं, ध्रुव, महुआ, अशोक एवं मुराद शिवानी के छत पर मार्बेलों को लेकर खेलेंगे।
खेल यह है कि शिवानी पहले ध्रुव एवं महुआ को कुछ मार्बेल एक नियमनुसार बांट देगी। मैं बिना देखे मार्बेल की संख्या बतलाऊँगी।

शिवानी ने जितना मार्बेल ध्रुव को दिया, महुआ को उसके दोगुने की अपेक्षा 18 मार्बेल अधिक दिया। मैं हिसाब करके देखूँ कि कितने मार्बेल शिवानी महुआ दे सकती है।

मान कि शिवानी ने ध्रुव को x मार्बेल दिया।

$\therefore$ महुआ को दिया $\rightarrow (2\times x+18) =$ ☐ मार्बेल

ध्रुव को मार्बेल दिया (संख्या)	1	2	3	4	5	6	7	.....	x
महुआ को मार्बेल दिया (संख्या)	20	22	☐	☐	☐	☐	☐	.....	☐

$\therefore$ महुआ को 20, 22, ... मार्बेल दे सकती है।

जान पायी, शिवानी ने महुआ को 108 मार्बेल दिया है।

$$2x+18 = 108$$

$$\text{या,} \quad 2x = 108 - 18$$

$$\text{या,} \quad 2x = 90$$

$$\therefore \quad x = 45$$

अत:, शिवानी ने ध्रुव को ☐ मार्बेल दिया है।

$\therefore$ x = 45 हुआ 2x + 18 = 108 समीकरण का **बीज**।

अब शिवानी ने मुराद को जितना मार्बेल दिया महुआ को उसके आधा की अपेक्षा 4 मार्बेल कम दिया। हिसाब करके देखे, इसबार शिवानी महुआ को कितना मार्बेल दे सकती है।

माना, शिवानी ने मुराद को x मार्बेल दिया।

$\therefore$ महुआ को दिया (□ – 4) मार्बेल।

मुराद को मार्बेल दिया (संख्या)	8	10	12	20	28	.....	n
इसबार महुआ को मार्बेल दिया (संख्या)	0	□	□	□	□		□

गिनकर देखा कि शिवानी ने महुआ को 86 मार्बेल दिया है।

$\therefore$ शिवानी ने मुराद को □ मार्बेल दियाा है।

पाया, $\frac{x}{2} - 4 = 86$ समीकरण का बीज □ ।

$\frac{x}{2} - 4 = 86$

$\therefore x =$ □

[खंय करे]

उसबार शिवानी ने अशोक को जितना मार्बेल कम दिया। महुआ को उसके $\frac{5}{2}$ भाग से 3 मार्बेल कम दिया। हिसाब करके देखे, इस बार शिवानी ने महुआ को कितने मार्बल दे सकते है।

मानाा, शिवानी ने अशोक को x मार्बेल दिया।

$\therefore$ महुआ को दिया □ मार्बेल

अशोक को मार्बेल दिदया (संख्या)	2	4	8	10	20	.....	n
इस बार महुआ को मार्बेल दिया (संख्या)	□	□	□	□	□	.....	□

यदि शिवानी ने महुआ को 127 मार्बेल दिया तो अशोक को कितना मार्बेल दी है हिसाब करके लिखें।

$\frac{5x}{2} - 3 = 127$ समीकरण का बीज [स्वयं करें]

स्वयं करें-19.1

1) शिवानी ने मुझे और मुराद को कुछ मार्बेल दिया। यदि मुराद के मार्बेल की संख्या मेरे मार्बेल की संख्या का $\frac{7}{3}$ से 2 कम हो तो मुराद को कौन-कौन सी संख्या में मार्बेल दे सकती है लिखे।

यदि मुराद 40 मार्बेल पाया है तो शिवानी ने मुझे कितना मार्बेल दिया है हिसाब करें और लिखे।

कुछ समय बाद और दो मित्र रोकैया और अर्घ्य हमारे साथ खेल में शामिल हो गए।

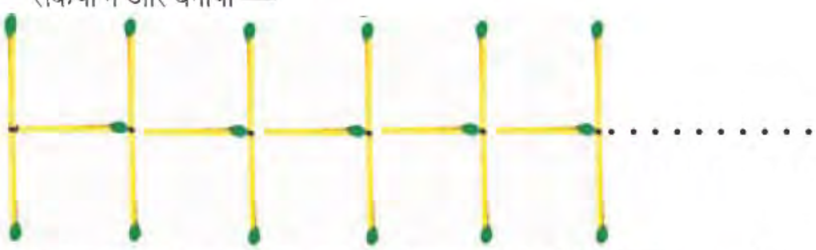
रोकैया बहुत से दियासलाई काठियाँ अपने साथ लायी है। वह उन काठियों से विभिन्न प्रकार का नक्शा बनायी।

इसी प्रकार n संख्यक नक्शे में 4n काठियाँ लगेगी।

यदि 80 दियासलाई काठियाँ लगे तो वर्ग क्षेत्र की संख्या ☐ होगी **[स्वयं करें]**।

अत: 4n = 80 समीकरण का बीज ☐

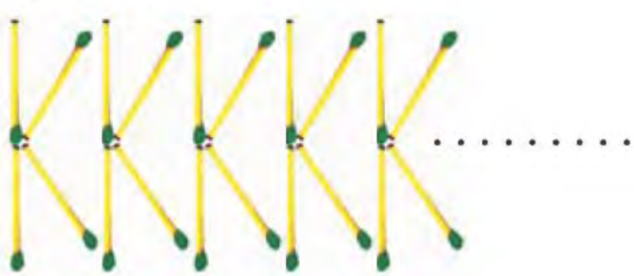
रोकैया ने और बनाया —



इसी प्रकार n संख्या वाला 'H' बनाने में कुल काठियाँ लगेगी (☐ $\times n + 2$)।

35 दियासलाई काठियों से इसी प्रकार के कितने 'H' बनाये है समीकरण का गठन करके समीकरण का बीज निर्णय करें।

इस बार रोकैया ने बनाया —

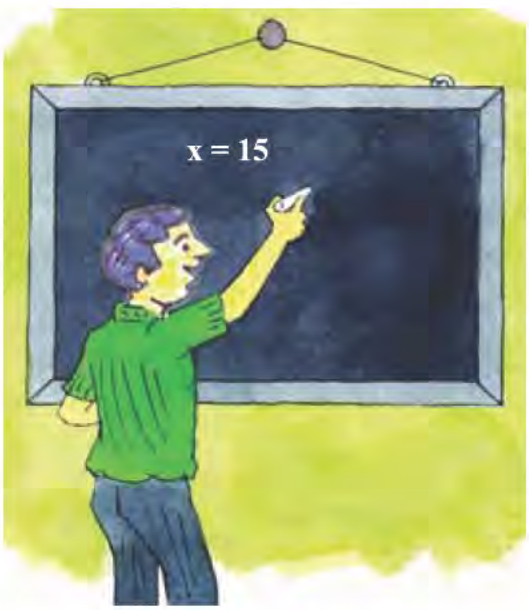


इसी प्रकार n संख्या वाले 'K' बनाने के लिए कुल ☐ काठियाँ लगेगी **[स्वयं करें]**।

मैं दियासलाई की काठी से स्वयं एक नक्शा बनाऊँगी एवं इसी प्रकार n संख्यक नक्शे में कितनी दियासलाई की काठियाँ लगेगी जोड़कर लिखूँ। **[स्वयं करें]**।

समीकरण	समीकरण के बीज में गोल चिन्ह दें
$10+3x = 25-2x$	1, 3, 7, 0
$\frac{x}{4} - \frac{1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}, 5, -11, -\frac{44}{5}$
$\frac{5}{2}(t-3) = (5t-12)$	$\frac{5}{9}, 1\frac{4}{5}\ \frac{-9}{5}, \quad 5,$
$\frac{2x}{3} = \frac{3x}{8} + \frac{7}{12}$	0, 1, 2, 9

[स्वयं करें]



नया मजेदार खेल

ध्रुव और मुराद ने तय किया कि एक नया मजेदार खेल खेलेंगे। मुराद और ध्रुव ने तय किया कि वे लोग एक चल समीकरण का एक बीज बोलेंगे और हमलोग मिलकर एक ऐसे समीकरण बनाने की कोशिश करेंगे जिसका बीज उनके दिए बीज के बराबर होगा।

ध्रुव ने लिखा→ $\boxed{x = 15}$

मैं समीकरण बनाऊँ जिसका बीज 15

$x = 15$

$3 \times x = 3 \times 15$ — दोनों तरफ 3 से भाग करने पर पाते है।

$3x - 10 = 35$ — दोनों तरफ 10 से भाग करने पर पाते है।

∴ $3x - 10 = 35$ हुआ निर्णेय समीकरण जिसका बीज 15 है।

∴ $3x - 10 = 35$ हुआ निर्णेय समीकरण जिसका बीज 15 है।

∴ x के तीनगुना से 10 हाटाने पर वियोगफल यदि 35 हो तब x का मान 15 के बराबर होगा।

मुराद ने लिखा → $y = -9$

मैं समीकरण बनाऊँगा जिसका बीज (-9)

$$y = -9$$
$$2 \times y = -18$$
$$2y + 18 = 0$$

$\therefore$ $2y + 18 = 0$ निर्णेय समीकरण हुआ जिसका बीज (-9) है।

समीकरण बनायें और भाषा में लिखें।

(1) $x = -19$ ☐

(2) $t = 21$ ☐

[स्वयं करें]

1 हम सब मिलकर तथा चंदा लगाकर कुछ खाने-पीने की व्यवस्था करेंगे। मेरे पास 100 रूपये के 2 नोट है। मैं अपने 200 रूपये को 5 रूपये तथा 10 रूपये की नोट में बदलना चाहता हूँ।

शिवानी के पिताजी ने मुझे खुदरा करके 5 और 10 रूपये के कुल 32 नोट दिया।

मैं समीकरण का गठन करके हिसाब करूँगा तथा देखूँगा कि प्रत्येक प्रकार के कितने नोट मेरे पास है।

माना 5 के x नोट है।

$\therefore$ 10 रूपये का नोट है $(32-x)$।

पाँच रूपये के 1 नोट का मूल्य 5 रूपये।

$\therefore$ पाँच रूपये के x नोट का मूल्य $5x$ रूपये।

10 रूपये के 1 नोट का मूल्य 10 रूपये।

$\therefore$ 10 रूपये के $(32-x)$ नोट का मूल्य $10(32-x)$ होगा।

मेरे पास $5x$ रूपये और $10(32-x)$ रूपये मिलकर कुल 200 रूपये है।

शर्तानुसार, $5x + 10(32-x) = 200$

या, $5x + 320 - 10x = 200$

या, $5x - 10x = 200 - 320$

या, $-5x = -120$

या, $x = \dfrac{-120}{-5}$ $\therefore$ $x = 24$

$\therefore$ मेरे पास 5 रूपये के 24 नोट एवं 10 रूपये के नोट है $32-24 =$ ☐

2 मैं यदि 100 रूपये के 3 नोट को 5 रूपये तथा 10 रूपये के नोट में खुदरा करता एवं 5 रूपये और 10 रूपये के नोट मिलकर 48 नोट होता तो मेरे पास कौन सा नोट कितना होता हिसाब करें

[स्वयं करें]

3 ध्रुव के कक्षा में कुल 35 छात्र-छात्राएं है। उनके उम्र का औसत 14 वर्ष है। नये 7 छात्र छात्राओं के भर्ती होने से कक्षा के कुल छात्र-छात्राओं के उम्र का औसत 13.9 वर्ष हो गया। समीकरण का गठन करके ध्रुव के कक्षा के छात्र छात्राओं की उम्र कितना था हिसाब करके लिखें।

माना, नये भर्ती हुए 7 छात्र-छात्राओं की उम्र का औसत x वर्ष है।

$\therefore$ नए 7 छात्र-छात्राओं का कुल उम्र $(7 \times x)$ वर्ष = 7x वर्ष।

पहले के 35 छात्र-छात्राओं का कुल उम्र है 35×14 वर्ष

= $\square$ वर्ष

अभी 7 छात्र-छात्राओं के भर्ती होने से ध्रुव के कक्षा में कुल छात्र-छात्राओं की संख्या (35 + 7)= 42 छात्र-छात्रा।

$\therefore$ 42 छात्र-छात्राओं का कुल उम्र = (7x + 490) वर्ष

42 छात्र-छात्राओं की कुल उम्र = 13.9 वर्ष

$\therefore$ 42 छात्र-छात्राओं का कुल उम्र = (13.9×42) वर्ष

शर्तानुसार, $7x + 490 = 13.9 \times 42$

या, $7x = 13.9 \times 42 - 490$

या, $x = \frac{13.9 \times 42 - 490}{7}$

$\therefore$ $x = \square$

$\therefore$ नये भर्ती हुए 7 छात्र-छात्राओं की उम्र का औसत $\square$ वर्ष।

4 मानस ने एक भिन्न लिखा है। जिसका हर अंश का दो गुणा की अपेक्षा 1 अधिक है। यदि अंश और हर के साथ 4 जोड़ करे तो भिन्न $\frac{7}{11}$ हो जाती है। समीकरण का गठन करें और हिसाब करके मानस द्वारा लिखे भिन्न का निर्णय करें।

माना भिन्न का अंश = x है।

एवं हर = 2x+1

$\therefore$ भिन्न $\frac{\square}{\square}$ हुआ।

भिन्न के अंश एवं हर के साथ 4 योग करे तो क्या-क्या पाते है देखे।

$$\frac{\square + 4}{\square + 4} = \frac{x+4}{2x+1+4} = \frac{x+4}{2x+5}$$

शर्तानुसार,

$$\frac{x+4}{2x+5}=\frac{7}{11}$$

या, $14x + 35 = 11x+44$

या, $14x - 11x = 44 - 35$

या, $3x = 9$

$\therefore x = 3$

अत: भिन्न $\dfrac{x}{2x+1}$

$$= \frac{3}{2\times3+1} \quad \frac{3}{7} \quad =$$

5 अशोक ने एक भिन्न लिखा है जिसका अंश हर से 2 कम है। यदि अंश एवं हर के साथ 1 जोड़ दिया जाय तो भिन्न का मान $\frac{4}{5}$ होगा, समीकरण का गठन करे और हिसाब करके अशोक के भिन्न का निर्णय करें। **[स्वयं करें]**

6 महुआ ने एक दो अंकों की एक संख्या लिखा है जिसके दोनों अंकों का योगफल 9 होता है। यदि संख्या के साथ 45 जोड़ दे तो दोनों अंकों का स्थान बदल जाता है। समीकरण का गठन करे एवं महुआ के लिखे दो अंकों की संख्या क्या होगी हिसाब करके लिखे।

माना दो अंकों की संख्या का इकाई अंक x है

अत: दहाई का स्थानीय अंक $(9 - x)$

दहाई	इकाई
$(9-x)$	x

$\therefore$ दो अंकों की संख्या | 10 × (दहाई का स्थानीव अंक) + इकाई का स्थानीय अंक |

$$= 10\times(9 - x) + x$$
$$= 90 - 10x + x$$
$$= \boxed{90 - 9x}$$

अब यदि इस दो अंकों की संख्या के अंको का स्थान बदल दे,

(अर्थात् इकाई का अंक दहाई एवं दहाई का अंक इकाई अंक हो तो)

दहाई	इकाई
x	$(9-x)$

तब संख्या पाते है, $10 \times x + (9 - x)$

$$= 10x + 9 - x$$
$$= \boxed{9x + 9}$$

महुआ दो अंकों की संख्या को इस प्रकार किया है कि,

(दो अंकों की संख्या) + 45 = (स्थान परिवर्तन करके, मिली दो अंकों की संख्या)

शर्तानुसार, $90 - 9x + 45 = 9x + 9$

या, $-9x - 9x = 9 - 45 - 90$

या, $-18x = -126$

या, $x = \dfrac{-126}{-18}\,7$ $\therefore \quad x = 7$

$\therefore$ दो अंकों की संख्या का इकाई स्थान के अंक = 7

एवं दहाई के अंक की स्थानीय संख्या = 9 – x

= 9 – 7 = 2

निर्णेय ने एक दो अंकों की संख्या = 2 × 10 + 7

= 27

7 मुराद ने एक दो अंकों की संख्या लिखा है जिसके दोनों अंकों का योगफल 11है। इस संख्या के साथ 63 जोड़ देने पर दोनो अंक का स्थान बदल जाता है। समीकरण गठन करें एवं मुराद की लिखी दो अंकों की संख्या को निकालें। **[स्वयं करें]**

8 एक संख्या का आधा, संख्या के $\frac{1}{5}$ अंश की अपेक्षा 6 अधिक हो तो संख्या क्या होगी समीकरण का गठन करके लिखे।

माना संख्या x, है।

$\therefore$ संख्या का आधा = ☐

संख्या का आधा, संख्या का $\frac{1}{5}$ हिस्सा के अपेक्षा 6 अधिक है।

शर्तानुसार, $\frac{x}{2} - \frac{x}{5} = 6$

या, $\frac{5x - 2x}{10} = 6$

या, $\frac{3x}{10} = 6$

$\therefore$ x = ☐ **[स्वयं करें]**

निर्णेय संख्या ☐

बनाकर देखें — 19

प्रत्येक का समीकरण गठन करके हल करे—

1. सीमा ने एक संख्या लिखी है जिसके दो गुने के साथ 2 जोड़ने पर जो संख्या मिलती है वह संख्या के तीन गुने से 5 कम है। सीमा की लिखी संख्या लिखो।
2. तीन क्रमिक संख्या लिखें जिसके योगफल के साथ 5 घटाने पर वियोगफल बीच वाली संख्या के दो गुने से 11 अधिक है। तीनों क्रमिक संख्या लिखों।
3. मैं एक ऐसी संख्या खोजूँगा जिसका एक तृतीयांश उसका एक चर्तुथांश 1 कम है।
4. मैं एक ऐसा भिन्न खोजूँगा जिसका हर उसके अंश से 2 अधिक एवं अंश के साथ 3 जोड़ने तथा 3 घटाने पर भिन्न $\frac{7}{3}$ के बराबर होगा।
5. सुचेता ने एक भिन्न लिखा जिसका हर उसके अंश से 3 अधिक है। फिर भिन्न अंश के साथ 2 जोड़ने तथा हर के साथ 1 घटाने तथा अंश से 1 घटाने तथा हर के साथ 2 जोड़ने पर दो नया भिन्न मिलेगा एवं उनका गुणनफल $\frac{2}{5}$ होगा। सुचेता द्वारा लिखे गये भिन्न को लिखों।

6. राजू ने अंकों की एक संख्या लिखा जिसके दहाई के अंक का स्थानीय अंक इकाई अंक के स्थानीय अंक का तीन गुना एवं दोनों अंक का स्थान बदल देने पर जो संख्या बनती है वह मुख्य संख्या से 36 कम है। राजू द्वारा लिखी गई दो अंकों की संख्या बताएँ।
7. दो संख्याओं का योगफल 89 एवं अंतर फल 15 हो तो दोनों संख्या का मान निकाले।
8. 830 को एक ऐसे दो भागो में बांटे कि एक भाग का 30% दूसरे भाग के 40% अपेक्षा 4 अधिक है।
9. 56 को ऐसे दो भागों में बांटे कि प्रथम भाग का तीन गुना द्वितीय भाग के तृतीयांश की अपेक्षा 48 अधिक हो।
10. एक दण्ड का $\frac{1}{5}$ हिस्सा कीचड़ में, $\frac{3}{5}$ हिस्सा जल में एवं बाकी हिस्सा 5 मीटर पानी के ऊपर है। दण्ड की लम्बाई का हिसाब लिखें।
11. मेरे पिताजी की वर्तमान उम्र मेरे वर्तमान उम्र का 7 गुना है। 10 वर्ष के बाद पिताजी की उम्र का 3 गुना होगा। मेरा एवं मेरे पिताजी की वर्तमान उम्र लिखो।
12. मेरे मामा ने 1000 रुपये का एक चेक बैंक से उठाये तो उसमे कई 5 रुपये के नोट एवं कई 10 रुपये का नोट मिला। यदि मामा को कुल 137 नोट मिले हो तो पांच रुपये के कितने नोट पाये है लिखें।
13. हमारे गाँव के सालेन चाचा ने सरकारी नौकरी से अवसर लेने के बाद अपने संचय के $\frac{1}{2}$ हिस्सा से एक मकान खरीदें। अचानक विपत्ति में पड़कर वे मकान को बेचकर खरीदे गए मूल्य से 5% अधिक पाये। यदि वे मकान को 3450 रुपये अधिक रुपये में बेचते तो क्रय मूल्य का 8% अधिक पाते। सालेन चाचा ने कितने रुपये में मकान को खरीदा था एवं उनका संचय कितना था।
14. गोपालपुर ग्राम के राहत शिविर में राहत प्रार्थियों के लिए 20 दिन का खाना उपलब्ध था। 7 दिन के बाद और 100 लोग राहत शिविर में आ जाते तो 11 दिन में ही खाना खत्म हो जाता तो राहत में पहले कितने लोग थे।
15. नीचे के समीकरणों का बीज खोजे (समाधान करें) :

(i) $\frac{3}{x+3} = \frac{5}{x+2}$ (ii) $\frac{5}{3x+4} = \frac{4}{5(x-3)}$ (iii) $14(x-2)+3(x+5)=3(x+8)+5$

(iv) $\frac{x}{2}+5 = \frac{x}{3}+7$ (v) $\frac{x+1}{8}+\frac{x-2}{5} = \frac{x+3}{10}+\frac{3x-1}{20}$

(vi) $\frac{x+1}{4}+3 = \frac{2x+4}{5}+2$ (vii) $\frac{x+1}{7}+x = \frac{3x-4}{14}+6$

(viii) $\frac{3}{5}(x-4)-\frac{1}{3}(2x-9) = \frac{1}{4}(x-1)-2$ (ix) $\frac{x+5}{3}+\frac{2x-1}{7} = 4$

(x) $25+3(4x-5)+8(x+2) = x+3$ (xi) $\frac{x-8}{3}+\frac{2x+2}{12}+\frac{2x-1}{18} = 3$

(xii) $\frac{t+12}{6}-t = 6\frac{1}{2}-\frac{1}{12}$ (xiii) $\frac{x+1}{2}-\frac{5x+9}{28} = \frac{x+6}{21}+5-\frac{x-12}{3}$

(xiv) $\frac{9x+5}{14} + \frac{8x-7}{7} = \frac{18x+11}{28} + \frac{5}{4}$

(xv) $\frac{3y+1}{16} + \frac{2y-3}{7} = \frac{y+3}{8} + \frac{3y-1}{14}$

(xvi) $5x-(4x-7)(3x-5)=6-3(4x-9)(x-1)$

(xvii) $3(x-4)^2+5(x-3)^2=(2x-5)(4x-1)-40$

(xviii) $3(y-5)^2+5y=(2y-3)^2-(y+1)^2+1$

16. समीकरणों को बनाओ तथा गणित की भाषा में लिखो :

(i) $x = 5$ ⟶ [ ]

(ii) $y = -11$ ⟶ [ ]

(iii) $t = \frac{7}{8}$ ⟶ [ ]

(iv) $x = 24$ ⟶ [ ]

(v) $x = \square$ ⟶ [ ] [स्वयं करें]

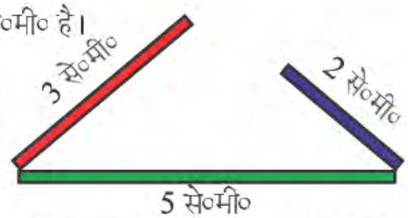
20. ज्यामितिक प्रमाण

आज विभिन्न लम्बाई वाले छोटे बड़े रंगीन काठियों को लेकर एक मजेदार खेल खेलेंगे।

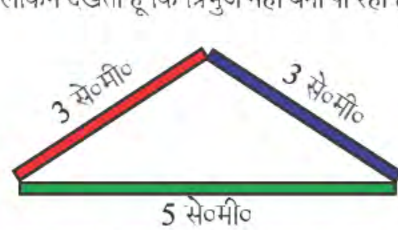
खेल यह है कि मिताली एवं अनिक दो-दो काठिया देंगे। हमलोग एक अन्य काठी को खोजेंगे कि इन तीन काठियों से एक त्रिभुज की तरह बना सके। अब त्रिभुज की तरह जो बनायेंगे उसकी भुजाओं के बीच संबंध खोजेंगे।

पहले मिताली ने दो काठियाँ दी जिसकी लम्बाई क्रमश: 3 से०मी० और 5 से०मी० है।

मैंने 2 से०मी० लम्बी एक काठी लिया एवं मिताली के दिए दो काठियों को जोड़कर त्रिभुज की तरह बनाने की चेष्टा की एवं ऐसा बना—



लेकिन देखती हूँ कि त्रिभुज नहीं बना पा रही हूँ। यहाँ देखती हूँ, 3 से०मी० + 2 से०मी० ☐ 5 से०मी० (= / < / > बैठाये)



जैसमिन 2 से०मी० लम्बाई की काठी को हटाकर 3 से०मी० लम्बा एक काठी लेकर त्रिभुज की तरह बनाने की कोशिश किया और वह त्रिभुज की तरह बना पाई।

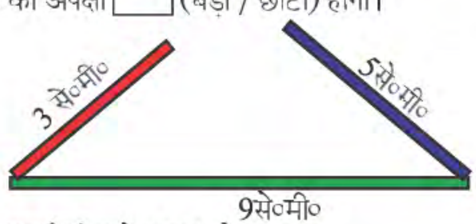
यहाँ देखते है, 3से०मी० + 3से०मी० ☐ 5से०मी० (= / < / > बैठायी)

स्नेहा ने 3से०मी०, 5से०मी० एवं 4से०मी० लम्बी तीन काठियाँ लेकर एक ☐ बनायी। यहाँ देखती हूँ, 4से०मी० + 3से०मी० ☐ 5से०मी० (= / < / > बैठायी)

मैं 3से०मी० और 5से०मी० लम्बी काठियों के साथ 6से०मी० एवं 7से०मी० लम्बी काठियों को लेकर त्रिभुज की तरह बना पाया हूँ। अर्थात् देखती हूँ कि (3से०मी०, 6से०मी० एवं 5से०मी०) और (3से०मी०, 7से०मी० तथा 5से०मी०) लम्बी काठियों से त्रिभुज की तरह बनाया जा सकता है।

स्नेहा ने कहा इस त्रिभुज की तरह आकार को लेकर तथा कापी में बैठाकर पेंसिल से चिन्ह देकर जो त्रिभुज मिला उसके किसी भी दो भुजाओं की लम्बाई का योगफल तृतीय भुजा की लम्बाई की अपेक्षा ☐ (बड़ा / छोटा) होगा।

अब सुचेता ने 9से०मी० लम्बी काठी से अर्थात् (9से०मी०, 3से०मी० एवं 5से०मी०) लम्बी काठियों से त्रिभुज की आकृति की तरह बनाने की कोशिश किया एवं उसे मिला —



अर्थात् इस त्रिभुज के किसी दो भुजाओं का योगफल तृतीय भुजा की लम्बाई की अपेक्षा बड़ा होगा।

पाया, (i) 5से०मी० और 3से०मी० लम्बी दो काठियों के साथ जो लम्बी काठी त्रिभुज की तरह आकृति बनायेगी उसकी लम्बाई होगी, 5से०मी० – 3से०मी० = 2से०मी० ____ (छोटी / बड़ी) होगी।

एवं (5 + 3) से०मी० = 8से०मी० ____ (छोटी / बड़ी) होगी।

(ii) त्रिभुज के किसी भी दो भुजाओं की लम्बाई का योगफल तृतीय भुजा की लम्बाई की अपेक्षा ____ (छोटी / बड़ी) होगी।

अब अनीक ने 2से०मी० और 4से०मी० लम्बी दो काठियाँ दिया।

मैं पहले की तरह विभिन्न लम्बाई की काठियों को लेकर त्रिभुज की तरह बनाने की कोशिश करूँ एवं क्या मिलता है उसे देखूँ।

देखता हूँ, (i)(4 – 2) से०मी० = 2से०मी० ____ (छोटी /बड़ी) लम्बी काठी एवं (4 + 2) से०मी० = 6से०मी० ____ (छोटी /बड़ी) लम्बी काठी से 2से०मी० और 4से०मी० लम्बी काठियों के साथ त्रिभुज की तरह की आकृति बना सकती हूँ।

(ii) फिर देखती हूँ कि त्रिभुज के किसी भी दो भुजाओं का योगफल तृतीय भुजा की लम्बाई की अपेक्षा ____ (छोटी / बड़ी) होगी।

स्वयं करें—20.1

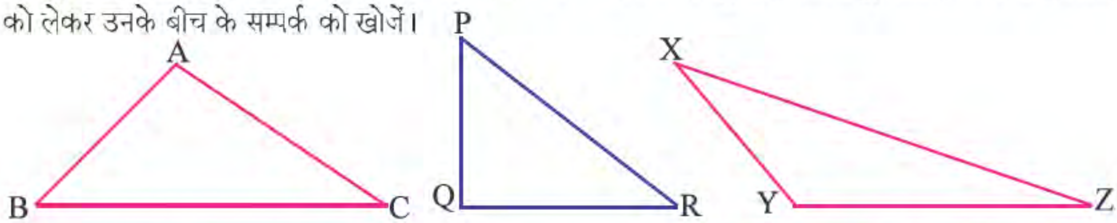
(i) 4से०मी० एवं 6से०मी० लम्बी दो काठियों के साथ किस-किस लम्बाई की काठियाँ ली जाय कि त्रिभुज बन सके।

(ii) किसी त्रिभुज के दो भुजाओं की लम्बाई 3से०मी० और 6से०मी० हो तो तृतीय भुजा की लम्बाई किसी दोनों संख्या के बीच होगी हिसाब करके लिखें।

मैं किसी भी लम्बाई की दो काठियाँ लेकर तृतीय काठी के लम्बाई के साथ उन दो काठियों की लम्बाई के योगफल के विषय में क्या पाते है लिखें। **[स्वयं करें]**

स्वयं से विभिन्न लम्बाई की काठियों को लेकर देखते है कि त्रिभुज के किसी भी दो भुजाओं की लम्बाई का योगफल तृतीय भुजा की लम्बाई से सर्वदा बड़ी होगी।

अमीनूर ने बहुत से त्रिभुजों को अपने कॉपी में बनाया है। उसने कहा कि इन त्रिभुजों के प्रत्येक भुजा की लम्बाई के परिमाप को लेकर उनके बीच के सम्पर्क को खोजें।



AB = ____ से०मी०, BC = ____ से०मी०, CA = ____ से०मी०

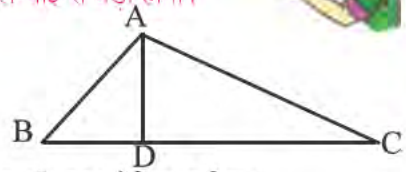
AB + BC ____ CA [> / < रखें]

BC + CA ____ AB [> / < रखें]

CA + AB ____ BC [> / < रखें]

इसी प्रकार △PQR एवं △XYZ की भुजाओं को स्केल से मापकर देखते है कि प्रत्येक त्रिभुज के भी दो भुजाओं की लम्बाई का योगफल तृतीय भुजा की लम्बाई से सर्वदा ____ होगी**[स्वयं करें]**

उपसिद्धान्त **11** मैं एक त्रिभुज बनाऊँगा और उसको तथ्यों के सहारे प्रमाणित करुँगा, कि किसी भी त्रिभुज के दो भुजाओ की लम्बाई का योगफल तीसरी भुजा की लम्बाई से बड़ा होगा।



प्रदत्त : माना कि $\triangle ABC$ की वृहत्तम भुजा BC है।

प्रमाणित करना है : यदि $AB + AC > BC$ प्रमाणित करना है कि त्रिभुज के किसी भी दो भुजाओं की लम्बाई का योगफल तृतीय भुजा की लम्बाई से बड़ा होगा।

बनावट : $\triangle ABC$ के शीर्ष बिन्दु A से BC के ऊपर AD लम्ब खीचा जो BC भुजा को D बिन्दु पर काटता है। अर्थात् $AD \perp BC$

प्रमाण : $\triangle ADB$ का $\angle ADB = 1$ समकोण [बनावट के अनुसार $AD \perp BC$]

$\angle ADB$ समकोण एवं $\angle BAD$ न्यूनकोण है। [न्यूनकोण का परिमाप < समकोण का परिमाप]

अर्थात् $\angle ADB > \angle BAD$

अत: $AB > BD$ ________ (i) [त्रिभुज के वृहत्तर कोण के विपरीत भुजा सबसे छोटे कोण के विपरीत भुजा से बड़ा है]

$\triangle ADC$ एवं $\angle ADC = 1$ समकोण [बनावट के अनुसार अर्थात् $AD \perp BC$]

$\angle ADC$ समकोण एवं $\angle DAC$ न्यूनकोण [न्यूनकोण का परिमाप < समकोण का परिमाप]

अर्थात् $\angle ADC > \angle DAC$

अत:, $AC > DC$ ________ (ii) [त्रिभुज के सबसे बड़े कोण के विपरीत भुजा सबसे छोटे कोण के विपरीत भुजा की अपेक्षा बड़ा]

(i) और (ii) को जोड़ने पर पाते है, $AB + AC > BD + DC$

अर्थात् $AB + AC > BC$ प्रमाणित।

मेघा ने PQR एक त्रिभुज बनायी है। मैं तथ्यों के द्वारा प्रमाण करुँगी कि $PQ + QR > PR$; $QR + RP > PQ$ एवं $RP + PQ > QR$ **[स्वयं करें]**

स्वयं करे—20.2

1) मैं तथ्य देकर धीरे-धीरे प्रमाणित करुँगी कि किसी भी त्रिभुज के दो भुजाओं की लम्बाई का अंतर तृतीय भुजा की लम्बाई से छोटा होगा।

2) नीचे के भुजाओं की लम्बाई देखें एवं किन-किन क्षेत्रों में लम्बाईयों को लेकर त्रिभुज बनाना संभव है लिखे—

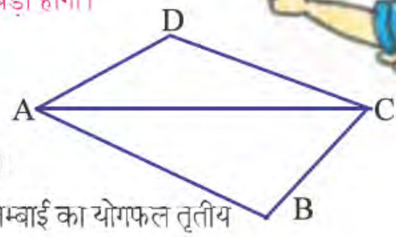
   (a) (3सें०मी०, 6सें०मी० एवं 8सें०मी०)

   (b) (8सें०मी०, 6सें०मी० एवं 15सें०मी०)

   (c) (2.7सें०मी०, 6.1सें०मी० एवं 8.8सें०मी०)

   (d) (2.5सें०मी०, 8सें०मी० एवं 6सें०मी०)

प्रयोग 1 प्रमाणित करें कि एक चतुभुर्ज के किसी भी तीन भुजाओं की लम्बाई का योगफल चतुर्थ भुजा की लम्बाई से बड़ा होगा।



प्रदत्त : माना ABCD चतुभुर्ज की सबसे बड़ी भुजा AB है।

प्रमाणित करना है : चतुभुर्ज के किसी भी तीन भुजाओं की लम्बाई का योगफल तृतीय भुजा की लम्बाई से बड़ा अर्थात् $AD + DC + BC > AB$ ।

बनावट : A एवं C दोनों बिन्दुओं को जोड़ने पर AC सरल रेखा मिलता है।

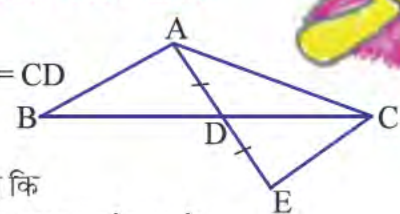
प्रमाण : $\triangle ACD$ में $AD + DC > AC$

$\triangle ACB$ में $AC + BC > AB$

अत: $AD + DC + AC + BC > AC + AB$

$\therefore$ $AD + DC + BC > AB$

प्रयोग 2 $\triangle ABC$ की मध्यमा AD है। प्रमाणित करें कि $AB + AC > 2AD$



प्रदत्त : माना $\triangle ABC$ की मध्यमा AD है। अर्थात् $BD = CD$

प्रमाणित करना है : $AB + AC > 2AD$

बनावट : AD सरल रेखा के E बिन्दु तक इस प्रकार बढ़ाया कि $AD = DE$ हो। C और E बिन्दुओं को मिलाकर CE सरल रेखा पाये।

प्रमाण : $\triangle ABD$ तथा $\triangle DCE$ -के $BD = CD$ (दिया हुआ है)

$\angle ADB =$ सम्मुख $\angle CDE$

$AD = DE$ (बनावट के अनुसार)

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle DCE$ (भुजा कोण-भुजा या S-A-S सर्वांगसमता के अनुसार)

अत: $AB = CE$ (अनुरुप भुजा)

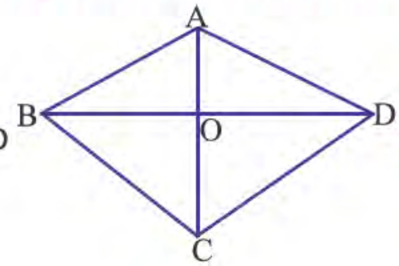
$\triangle ACE$ का $AC + CE > AE$

या, $AC + CE > AD + DE$

या, $AC + AB > AD + AD$ ($\because CE = AB$ एवं $DE = AD$)

$\therefore$ $AC + AB > 2AD$

प्रयोग **3** प्रमाणित करें कि किसी भी चतुर्भुज की चारों भुजाओं की लम्बाई का योगफल दोनों कर्ण की लम्बाई के योगफल से बड़ा होता है।



प्रदत्त : माना ABCD एक चतुर्भुज है।

प्रमाणित करें : $AB + BC + CD + DA > AC + BD$

प्रमाण : $\triangle ABC$ में $AB + BC > AC$

$\triangle ADC$ में $AD + DC > AC$

$\therefore \quad AB + BC + AD + DC > 2AC$ ______________ (i)

$\triangle ABD$ में $AB + AD > BD$

$\triangle BCD$ में $BC + CD > BD$

$\therefore \quad AB + BC + AD + DC > 2BD$ ______________ (ii)

(i) एवं (ii) जोड़ने पर पाते है।

$2(AB + BC + AD + DC) > 2(AC + BD)$

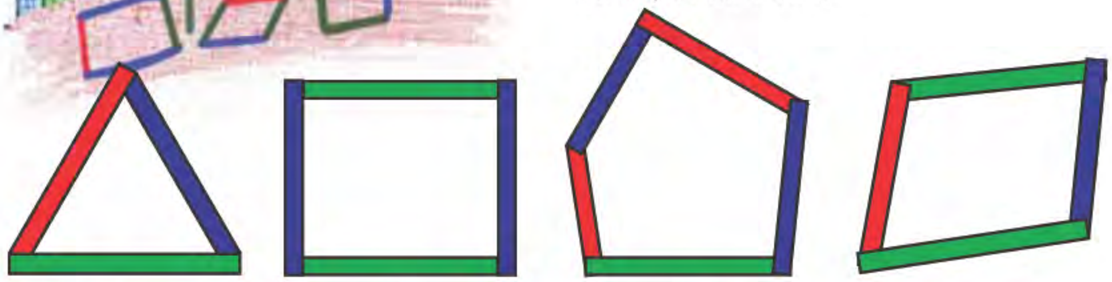
$\therefore \quad (AB + BC + AD + DC) > (AC + BD)$

बनाकर देखें- 20.1

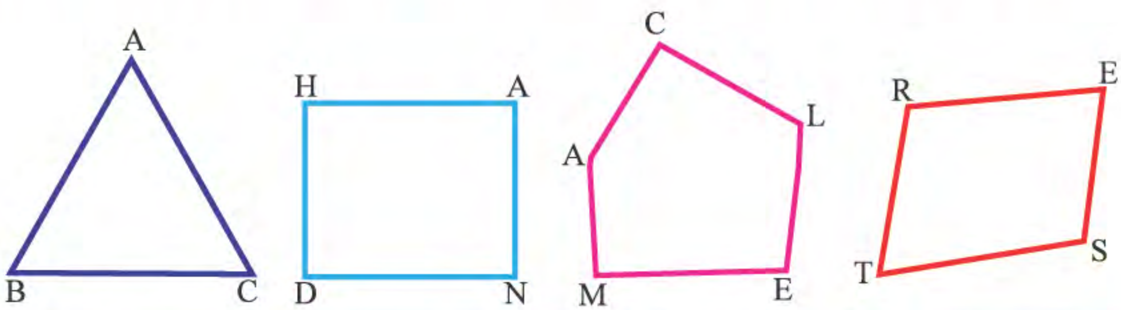
1. $\triangle ABC$ में BC भुजा पर D एक बिन्दु है। प्रमाणित करें कि $AB + BC + CA > 2AD$
2. $\triangle ABC$ के भीतर O एक बिन्दु है। प्रमाणित करें कि,
   (i) $AB + AC > OB + OC$
   (ii) $AB + BC + AC > OA + OB + OC$
3. प्रमाणित करें कि त्रिभुज की परिसीमा त्रिभुज के तीनों मध्यमा की लम्बाई के योगफल से बड़ा होता है।
4. $\triangle ABC$ के भीतर P कोई भी एक बिन्दु। प्रमाणित करें कि,
   (i) $AP + BP > AB$
   (ii) $AB + BC + AC < 2(AP + BP + CP)$
5. प्रमाणित करें कि त्रिभुज की परिसीमा त्रिभुज की मध्यमा की तीनों लम्बाई के योगफल से बड़ा होता है।
6. प्रमाणित करें कि एक चतुर्भुज के दोनों कर्ण का योगफल चतुर्भुज के किसी भी दो विपरीत भुजा की लम्बाई के योगफल से बड़ा होता है।
7. प्रमाणित करें कि एक चतुर्भुज के दोनों कर्ण की लम्बाई के योगफल चतुर्भुज के अर्द्ध परिसीमा से बड़ा होता है।
8. प्रमाणित करें कि किसी भी चतुर्भुज के अन्तस्थ किसी बिन्दु (किसी भी कर्ण पर नहीं) से चतुर्भुज के शीर्ष बिन्दुओं के संयोजक सरल रेखा की लम्बाई का योगफल चतुर्भुज के दोनों कर्ण की लम्बाई के योगफल से बड़ा होता है। अब देखें कि चतुर्भुज के भीतर के बिन्दु के किस स्थिति के लिए चतुर्भुज के शीर्ष बिन्दुओं का संयोजक सरल रेखा की लम्बाई का योगफल सबसे छोटा होगा।

हम लोग जब छोटे बड़े विभिन्न रंगों की काठियों से किस तरह त्रिभुज को बनाएंगे। तब सलमा एवं विभास दोनों ने 3 , 4 , 5 , 6 आदि विभिन्न संख्या में काठियों को सटाकर विभिन्न आकार के चित्र या बहुभुज बनायेंगे।

सलमा एवं विभास ने बनाया —



मैनें बड़े आर्ट पेपर पर इनका चित्र बनाया और नाम लिखा। चांद की सहायता से इनके अन्त:कोणों को मापा एवं पाया —



चांद की सहायता से मापकर देखे, ΔABC का $\angle BAC = \square$ डिग्री, $\angle ABC = \square$ डिग्री एवं $\angle ACB = \square$ डिग्री।

चतुर्भुज HAND के कोणों को मापकर देखें, $\angle AHD = \square$ डिग्री, $\angle HAN = \square$ डिग्री, $\angle AND = \square$ डिग्री, $\angle HDN = \square$ डिग्री।

पंचभुज CAMEL के कोणों को मापकर देखे, $\angle ACL = \square$ डिग्री, $\angle CLE = \square$ डिग्री,

$\angle LEM = \square$ डिग्री, $\angle EMA = \square$ डिग्री एवं $\angle MAC = \square$ डिग्री

चतुर्भुज REST के कोणों को मापकर देखे,

$\angle ERT = \square$ डिग्री, $\angle RES = \square$ डिग्री, $\angle EST = \square$ डिग्री एवं $\angle RTS = \square$ डिग्री।

मैं प्रत्येक बहुभुज के अंत:कोणों के परिमाप को जोड़ूँ एवं उनमें साधारण सूत्र खोजने की कोशिश करें।

$\triangle$ABC के कोणों या अन्त:कोणों का योगफल = ∠BAC + ∠ABC + ∠ACB = ☐ डिग्री = ☐ समकोण।

चतुर्भुज HAND के कोणों या अन्त:कोणों का योगफल ∠AHD + ∠HAN + ∠AND +∠BAC = ☐ डिग्री = ☐ समकोण।

पंचभुज CAMEL के अन्त:कोणों का योगफल = ∠ACL + ∠CAM + ∠AME + ∠MEL + ∠ELC = ☐ डिग्री = ☐ समकोण।

चतुर्भुज REST के अन्त:कोणों का योगफल = ∠ERS + ∠RES + ∠EST + ∠RTS = ☐ डिग्री = ☐ समकोण।

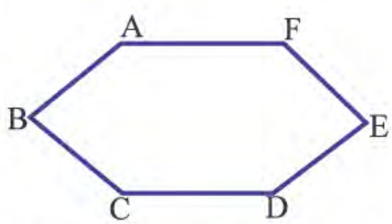
देखते है, त्रिभुज के तीनों अन्त:कोणों का योगफल 2 समकोण।
चतुर्भुज के चार अन्त:कोणों का योगफल 4 समकोण।
पंचभुज के पांचों अन्त:कोणो का योगफल 6 समकोण।

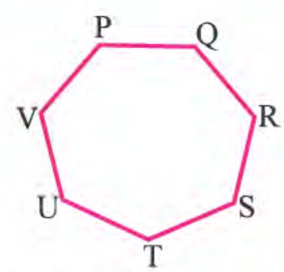
बहुभुज के अन्त:कोणों के साथ उनके भुजाओं की संख्या में कोई सम्पर्क है?

मैं बहुभुज के भुजाओं की संख्या के साथ उनके अन्त:कोणों के सम्पर्क को खोजने की कोशिश करुँगा

बहुभुज	भुजाओं की संख्या	अन्त:कोणों के माप का योगफल
त्रिभुज	2	2 समकोण = 2 (3 – 2) समकोण
चतुर्भुज	4	4 समकोण = 2 (4 – 2) समकोण
पंचभुज	☐	6 समकोण = 2 (☐ –2) समकोण

सहेली ने अपने काँपी में दूसरे बहुत से पंचभुज बनाया।
उसने बनाया —





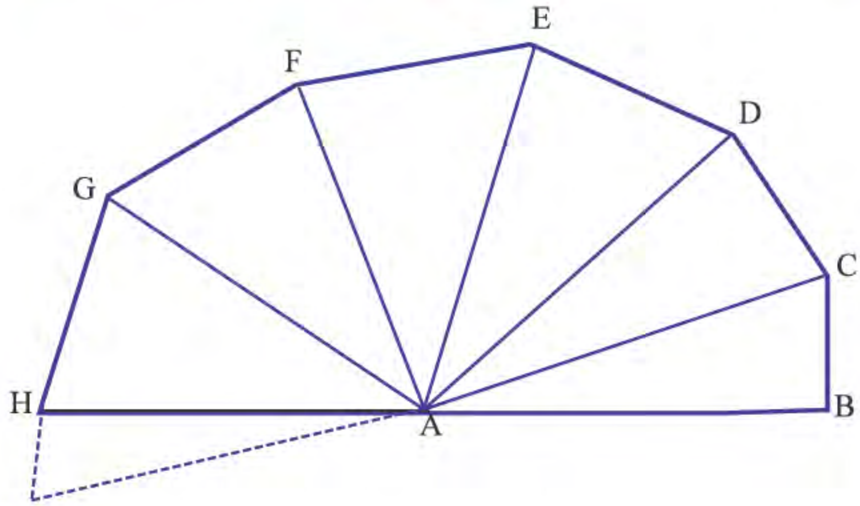
मै सहेली के बनाये ABCDEF षडभुज तथा PQRSTUV सप्तभुज के अन्त:कोणों को चांदा की सहायता से मापकर तथा जोड़कर लिखे —

षटभुज ABCDEF के अन्त:कोणों का योगफल 2 (6 – 2) समकोण = 8 समकोण

सप्तभुज PQRSTUV के अन्त:कोणों का योगफल 2 (7 – 2) समकोण = 10 समकोण

मैंनें किसी भी संख्या वाले बहुभुज को बनाकर देखते है कि उसके अन्त:कोणों के परिमाप का योगफल = 2 (n – 2) समकोण होता है, जहाँ n बहुभुज की भुजाओ की संख्या है। **[स्वयं करें]**

उप सिद्धान्त **12** मैंने तर्क देकर धीरे-धीरे यह प्रमाणित किया कि n संख्या के भुजा वाले बहुभुज के अंत:कोणों के परिमाप का योगफल 2 (n – 2) समकोण के बराबर है।



प्रदत्त: माना ABCDEFGH ... एक n संख्या वाला बहुभुज है।

प्रमाणित करना है : n संख्या भुजा वाले बहुभुज के अन्त:कोणों का योगफल 2 (n – 2) समकोण।

बनावट : AC, AD, AE, AF, AG, AH ... कर्णो को बनाया।

प्रमाण : A बिन्दु के साथ बहुभुज के अन्य कोणिक बिन्दु C, D, E, F, G, H... को जोड़ने के फलस्वरुप अर्थात् A बिन्दुगामी AC, AD, AE, AF, AG, AH... कर्णोको अंकित करने के फलस्वरुप (n–2) संख्यक त्रिभुज बना।

∴ ABCDEFGH ... बहुभुज के अन्त:कोणों का योगफल

= (n – 2) संख्यक त्रिभुज के अन्त:कोणो का योगफल

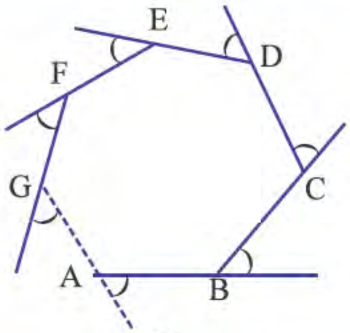
= (n – 2) × 2 समकोण

= 2 (n – 2) समकोण **[प्रमाणित]**

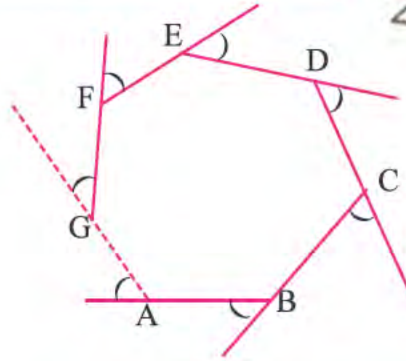
रिया ने एक बहुभुज बनाया है जिसके भुजाओ की संख्या 10 है, हम तथ्यों को देकर धीरे-धीरे प्रमाणित करें कि रिया के बनाये हुए बहुभुज के कोणों का योगफल 16 समकोण होगा।

[स्वयं करें]

हमलोगों ने n संख्या भुजा वाले बहुभुज के अन्त:कोणों का योगफल जाना। लेकिन कुब्ज बहुभुज के भुजाओं को क्रम में बढ़ाने से जो बाह्य कोण बनते है उनका योगफल कितना होगा एवं एक ही क्रम में बर्धित से क्या समझते है।



(i)



(ii)

प्रयोग 4

माना ABCDEFG ... एक n संख्या वाला बहुभुज है। इस बहुभुज के भुजाओं के एक ही तरफ या उसी क्रम में बढ़ाया। जिस n संख्या वाला बहिष्कोण बना। n संख्या वाले बहिष्कोण का परिमाप कितना होगा।

n संख्या भुजा वाले ABCDEFG ... बहुभुज की भुजाओं को एक ही तरफ या एक ही क्रम में बढ़ाने के फलस्वरुप n संख्या वाला बहिष्कोण बना।

1 बहिष्कोण तथा 1 अन्त:कोण के माप का योगफल = 2 समकोण

$\therefore$ n संख्यक बहिष्कोण तथा n संख्यक अन्त:कोण के माप का योगफल = $2 \times n$ समकोण।

लेकिन n संख्या वाले अन्त:कोण के माप का योगफल = $2 (n - 2)$ समकोण।

$\therefore$ n संख्या वाले बहिष्कोण के परिमाप का योगफल = $2 \times n$ समकोण $- 2 (n - 2)$ समकोण।

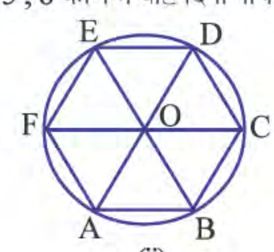
= $(2n - 2n + 4)$ समकोण।

= 4 समकोण = 360°

पाया, n संख्या के भुजावाले बहुभुज के भुजाओं को एक ही तरफ या एक ही क्रम में बढ़ाने पर जो बहिष्कोण बनेगें उनका योगफल 4 समकोण या 360° का होगा।

रजत ने कॉपी में वृत बनाया एवं वृत के केन्द्र के सभी कोणों को बराबर 5 , 6 कोण में बांट दिया नीचे के चित्र की तरह —

(i)



(ii)

मैंने रजत के बनाये गए (i) चित्र के केन्द्रीय कोणों को चांद की सहायता से मापकर देखा। प्रत्येक कोण का माप 72° फिर O के सम्पूर्ण कोणों अर्थात् 360° को 5 से भाग करके पाते है $360° \div 5 = \square$ डिग्री।

अब मैं स्केल से AB, BC, CD, DE तथा EA सरल रेखाओं की लम्बाई मापकर देखते है कि बराबर है। चांद से ∠ABC, ∠BCD, ∠CDE, ∠DEA एवं ∠EAB को मापकर देखते है तो उनका परिमाप बराबर है।

इसी प्रकार जिस बहुभुज के प्रत्येक भुजा की लम्बाई बराबर एवं प्रत्येक कोण का माप बराबर हो तो उस बहुभुज को क्या कहेंगे?

इस प्रकार के बहुभुज को सुषम बहुभुज कहेंगे।

इसी प्रकार रजत (ii) नं० चित्र में वृत के केन्द्र के सम्पूर्ण कोण को 6 बराबर भागों में बांटा।

मैं स्केल तथा चांद से उसी प्रकार रजत के बनाये ABCDEF बहुभुज के भुजाओं की लम्बाई तथा कोणों को मापकर देखूंगा कि बहुभुज किस प्रकार बहुभुज है।

यदि बहुभुज के प्रत्येक भुजा की लम्बाई तथा प्रत्येक अन्त:कोणों का परिमाप बराबर हो तो बहुभुज को सुषम बहुभुज कहा जाता है।

अत: सुषम त्रिभुज तथा सुषम बहुभुज किसे कहेंगे?

समझा, सुषम त्रिभुज है समबाहु त्रिभुज एवं सुषम चतुर्भुज वर्ग क्षेत्र होता है।

प्रयोग **5** n संख्या भुजा वाले सुषम बहुभुज के 1 अन्त:कोण का माप तथा बहिष्कोण का माप कितना होगा देखें।

सुषम बहुभुज के प्रत्येक भुजा की लम्बाई तथा प्रत्येक अन्त:कोणो का माप बराबर होता है। अत: सुषम बहुभुज के प्रत्येक बहिष्कोण का मान बराबर होगा।

n संख्यक भुजा वाले सुषम बहुभुज के अन्त:कोणों के माप का योगफल $= 2(n-2)$ समकोण।

∴ 1 अन्त:कोण का माप $= 2(n-2)$ समकोण $\div n$

$= \frac{2(n-2) \text{ समकोण}}{n}$

n संख्यक भुजा वाले सुषम बहुभुज के प्रत्येक बहिष्कोण का माप $= 360° \div n$

$= \frac{360°}{n}$

प्रयोग **6** एक बहुभुज बनाया है जिसकी भुजाओं की संख्या 12 है, इस बहुभुज के अन्त:कोणों का माप कितना होता है बताएँ।

n संख्या भुजा वाले बहुभुज के अन्त:कोणों के परिमाप का योगफल $= 2(n-2)$ समकोण।

12 भुजा वाले बहुभुज के अन्त:कोणों के परिमाप का योगफल $= 2(12-2) \times 90°$

$= 20 \times 90° = 1800°$

प्रयोग **7** एक सुषम बहुभुज के भुजाओं की संख्या 18 है, इस बहुभुज के प्रत्येक अन्त:कोणों का परिमाप एवं प्रत्येक बहिष्कोण का परिमाप कितना होगा बतायें।

18 भुजा वाले बहुभुज के अन्त:कोणों के माप का योगफल $= 2\,(18 - 2) \times 90^\circ$

$= 2 \times 16 \times 90^\circ = 2880^\circ$

$\therefore$ एक अन्त:कोण का परिमाप $= 2880^\circ \div 18 = 160^\circ$

बहुभुज के बाह्य कोणों के माप का योगफल $= \square$

$\therefore$ एक बहिष्कोण का परिमाप $= \square \div 18 = 20^\circ$

दूसरे प्रकार से, 1 अन्त:कोण का माप + 1 बहिष्कोण का माप $= 180^\circ$

$\therefore$ 1 बहिष्कोण का माप $= 360^\circ \div 18 = 20^\circ$

$\therefore$ 1 अन्त:कोण का माप $= 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$

प्रयोग **8** एक सुषम बहुभुज के प्रत्येक बहिष्कोण का परिमाप 60°;
मैं हिसाब करुँ कि बहुभुज के भुजाओं की संख्या कितनी है।

सुषम बहुभुज के बाह्य कोणों के माप का योगफल $= 360^\circ$

$\therefore$ बहुभुज के भुजाओं की संख्या $= 360^\circ \div 60^\circ = 6$।

प्रयोग **9** एक सुषम बहुभुज के प्रत्येक अन्त:कोण का माप 144°। है तो बहुभुज की भुजाओं की संख्या बतायें।

1अन्त:कोण का माप + 1बहिष्कोण का माप $= \square$

$\therefore$ 1बहिष्कोण का माप $= 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$

$\therefore$ बहुभुज के भुजाओं की संख्या $= \square \div \square = 10$।

प्रयोग **10** एक सुषम बहुभुज के अन्त:कोण तथा प्रत्येक बहिष्कोण के माप का अनुपात 2:3; है, तो बहुभुज के भुजाओं की संख्या कितनी है।

माना कि बहुभुज के 1 अन्त:कोण का माप = 2x एवं 1 बहिष्कोण का माप = 3x (जहाँ x कोण के माप का साधारण उत्पादक)

1अन्त:कोण का परिमाप + 1बहिष्कोण का परिमाप $= 180^\circ$

या, $2x + 3x = 180^\circ$;

या, $5x = 180^\circ$ वा, $x = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

1बहिष्कोण का परिमाप $= 36^\circ \times 2 = 72^\circ$ $\therefore$ बहुभुज के भुजाओं की संख्या $\frac{360^\circ}{72^\circ} = 5$

स्वयं करें—20.3

1) ज्यामितिक तथ्य से प्रमाणित करें कि चतुर्भुज के चार अन्त:कोणों का माप 360° होता है।
2) अष्टभुज के अन्त:कोणों के माप का योगफल कितना होगा?
3) जिस सुषम बहुभुज के भुजाओं की संख्या 10 है, उस बहुभुज के प्रत्येक बहिष्कोण तथा अन्त:कोण का माप बताओ।
4) जिस सुषम बहुभुज के एक अन्त:कोण का माप 120° है, उसके भुजाओं की संख्या कितनी होगी लिखें।

बनाकर देखे- 20.2

1. नीचे के बहुभुजों के अन्त:कोणों के योगफल को लिखो—

   (i) पंचभुज (ii) षष्टभुज (iii) सप्तभुज (iv) अष्टभुज (v) दशभुज (vi) बहुभुज जिसके भुजाओं की संख्या 12 हो।

2. एक चतुर्भुज के तीन कोणों का मान क्रमश:104.5°, 65° एवं 72.5°; चतुर्थ कोण का माप लिखें।

3. एक पंचभुज के चार कोणों का माप क्रमश: 65°, 89°, 132° एवं 116°; तो पांचवें कोण का माप क्या होगा।

4. एक कुब्ज चतुर्भुज के तीन कोणों का माप क्रमश: 68°, 70° एवं 75° हो सकता है या नहीं। लिखें।

5. एक कुब्ज षष्टभुज के पांच कोणों का माप क्रमश:120°, 70°, 95°, 78° एवं 160° हो सकता है या नहीं लिखें।

6. नीचे के सुषम बहुभुजों के प्रत्येक अन्त:कोण तथा प्रत्येक बहिष्कोण का माप लिखे—

   (i) पंचभुज (ii) षष्टभुज (iii) अष्टभुज (iv) बहुभुज के भुजाओं की संख्या 9 (v) बहुभुज के भुजायों की संख्या 10 (vi) 18 भुजा वाले बहुभुज।

7. एक सुषम बहुभुज के प्रत्येक अन्त:कोण का परिमाप निम्नलिखित परिमाप हो सकता है या नहीं (हाँ/नहीं) लिखें।

   (i) 6° (ii) 10° (iii) 13° (iv) 18° (v) 35°

8. एक सुषम बहुभुज के प्रत्येक अन्त:कोणों का परिमाप निम्न लिखित हो सकता है या नहीं (हाँ/नहीं) लिखें।

   (i) 80° (ii) 100° (iii) 120° (iv) 144° (v) 155° (vi) 160°

9. एक सुषम बहुभुज के प्रत्येक बहिष्कोण का माप 60° है, बहुभुज की भुजाओं की संख्या लिखें।

10. एक सुषम बहुभुज के प्रत्येक अन्त:कोण का माप 135° है, बहुभुज के भुजाओं की संख्या लिखें।

11. एक सुषम बहुभुज के प्रत्येक अन्त:कोण एवं बहिष्कोण के परिमाप का अनुपात 3:2 है, बहुभुज की संख्या लिखें।

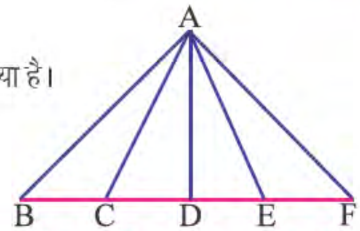
12. एक बहुभुज के अन्त:कोणों के परिमाप का योगफल 1800° है, बहुभुज के भुजाओं की संख्या को लिखें।

13. एक बहुभुज के पांच अन्त:कोणों में से प्रत्येक का माप 172° एवं दूसरे अन्त:कोणों में प्रत्येक का माप 160°; है तो बहुभुज की संख्या लिखें।

14. प्रमाणित करें कि एक चतुर्भुज के किसी भी सन्निहित कोण के समद्विभाजक से उत्पन्न कोण चतुर्भुज के अन्य दो कोणों के योगफल का आधा होगा।

15. ABCDE एक सुषम पंचभुज है। प्रमाणित करें कि ΔABC समद्विबाहु एवं BE और CD समानान्तर सरल रेखा है।

16. ABCDEF एक सुषम षष्टभुज है। $\angle BAF$ का समद्विभाजक DE के X बिन्दु पर काटता है। $\angle AXD$ का परिमाप लिखें।



मानसी ने कई काठियों को लेकर पास के चित्र की तरह बहुत से त्रिभुज को बनाया है। जिसका आधार एक ही सरल रेखा पर स्थित है एवं शीर्ष बिन्दु भी एक ही है।

हमने काठियों की लम्बाई बिना मापे केवल कोणों का माप देखकर त्रिभुज के भुजाओं की लम्बाई अर्थात् काठियों की लम्बाई को मापने की कोशिश करें।

देखते है, $\triangle ABC$ का $\angle ACB$ स्थूल कोण है।

$\therefore$ $\angle ABC$ एक $\square$ (स्थूल कोण/न्यून कोण) है।

हम जानते है कि त्रिभुज के वृहत्तर कोण के विपरीत भुजा की लम्बाई सबसे छोटे कोण के विपरीत भुजा की लम्बाई की अपेक्षा $\square$ (बड़ा/छोटा)। अर्थात् AB $\square$ AC [> / < बैठाये]।

फिर चांद से मापकर देखते है, AD काठी FC काठी के ऊपर लम्ब रुप में है।

अर्थात् $AD \perp FC$ $\quad \therefore \angle ADB = \square$

$\therefore$ $\triangle ADC$ का $\angle ACD$ $\square$ (स्थूल कोण/न्यून कोण)। अर्थात् AC $\square$ AD [> / < बैठाये]।

$\therefore$ देखते है, AC, AD तथा AB काठियों की लम्बाई के बीच सम्पर्क है $AD < AC < AB$

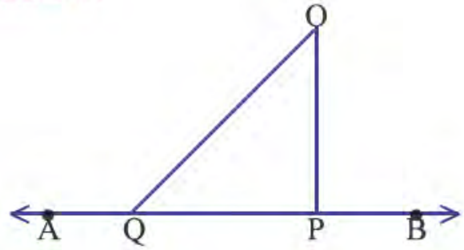
इसी प्रकार $\triangle AFE$ तथा $\triangle AED$ के बीच $AD < AE < AF$ होगा। (स्वयं करें)

पाये, मानसी A बिन्दु से बड़ी काठी FB के साथ जिन सब काठियों से सम्पर्क बना है उनमें से सबसे छोटी काठी AD है अर्थात् जो काठी A बिन्दु से FB के ऊपर लम्ब रुप में है वही काठी सबसे छोटी होगी।

हम मानसी की तरह बहुत से छोटे-बड़े काठियों को लेकर तथा सजाकर देखते है कि त्रिभुज किसी भी काठी का बाहर स्थित किसी बिन्दु से जिन सब काठियों से इस काठियों के साथ विभिन्न तरह से संयोग क्यों न करें उनके बीच जो काठी उस काठी के साथ लम्ब रुप में है उसकी लम्बाई सबसे छोटी होगी।

प्रयोग द्वारा काठी से देखते है, एक सरल रेखा के बाहर स्थित किसी बिन्दु से उस सरल रेखा तक जो सरल रेखाएं बनेगी उनके बीच लम्ब की लम्बाई सबसे छोटा होगा।

उपसिद्धान्त 13 मैं तत्थों के आधार पर धीरे-धीरे प्रमाणित करूंगी कि एक सरल रेखा के बाहर स्थित किसी बिन्दु से उस सरल रेखा तक जो रेखायें खींची जायेगी उनमे से लम्ब की लम्बाई सबसे छोटी होगी।



प्रदत्त : माना AB एक सरल रेखा है तथा O सरल रेखा AB के बाहर स्थित एक बिन्दु है,

OP, AB के ऊपर लम्ब अर्थात् $OP \perp AB$

प्रमाणित करना है : प्रमाणित करना है कि O बिन्दु से AB सरल रेखा के ऊपर जिन सब सरल रेखाओं को बनाया जायेगा उनमें से प्रत्येक की लम्बाई से OP की लम्बाई छोटी होगी।

बनावट : AB सरल रेखा के ऊपर P बिन्दु के अलावा Q एक बिन्दु लिया। O और Q को मिलाया।

प्रमाण : $\triangle OPQ$ में $\angle OPQ = 1$ समकोण [$\because OP \perp AB$]

$\angle OPQ > \angle OQP$ [$\because$ समकोण त्रिभुज के समकोण का माप ही बड़ा है।]

$OQ > OP$ [$\because$ त्रिभुज के वृहत्तम कोण के विपरीत भुजा की लम्बाई सबसे छोटे कोण के विपरीत भुजा की लम्बाई अपेक्षाकृत बड़ी होगी।]

AB सरल रेखा के ऊपर P बिन्दु के अलावा Q एक बिन्दु है।

$\therefore$ AB सरल रेखा के ऊपर Q बिन्दु के किसी भी स्थिति के लिए $OP < OQ$

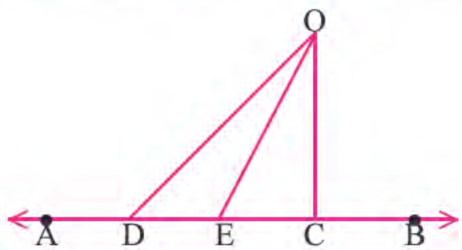
$\therefore$ OP की लम्बाई सबसे छोटी है।

तियाशा ने एक सरल रेखा PQ खींची। PQ के बाहर स्थित एक बिन्दु X लिया। मैं तत्थों से धीरे-धीरे प्रमाणित करुँगाज कि X बिन्दु से PQ सरल रेखा के ऊपर जो सभी सरल रेखायें खींची जायेगी उनमें से लम्ब की लम्बाई सबसे छोटी होगी।

किसी सरल रेखा के बाहर स्थित किसी बिन्दु से अनेक सरल रेखायें खींची जा सकती है। लेकिन किसी सरल रेखा से किसी बिन्दु की दूरी कहने से किस सरल रेखा की दूरी समझी जायेगी?

किसी सरल रेखा के बाहर किसी बिन्दु से उस सरल रेखा की दूरी से लम्ब की दूरी ही मालूम पड़ती है लम्ब के अलावा उस बाह्य बिन्दु से उस सरलरेखांश को तिर्यक सरल रेखा कहा जाता है।

प्रयोग **11** AB सरल रेखा के बाहर स्थित बिन्दु O से AB सरल रेखा के ऊपर OC सरल रेखा लम्ब है। OD तथा OE दो तिर्यक सरल रेखा है तथा CD > CE है, प्रमाणित करें कि, OD > OE।



प्रदत्त : माना AB एक सरल रेखा है एवं O बिन्दु AB सरल रेखा के बाहर स्थित है।

OC, AB के ऊपर लम्ब एवं OD और OE तिर्यक रेखा है तथा CD > CE

प्रमाणित करना है : OD > OE

प्रमाण : $\triangle OCE$ का $\angle OCE = 1$ समकोण [$\because OC \perp AB$]

अतः, $\angle OEC$ एक सूक्ष्म कोण है अर्थात् $\angle OEC < 90^\circ$ अत: $\angle OED$ एक स्थूल कोण है

अर्थात् $\angle OED > 90^\circ$

$\triangle ODC$ का $\angle OCD = 1$ समकोण [$\because OC \perp AB$]

अतः, $\angle ODC$ एक सूक्ष्म कोण है अर्थात् $\angle ODC < 90^\circ$ या, $\angle ODE < 90^\circ$

$\triangle OED$ का $\angle ODE < 90^\circ$ एवं $\angle OED > 90^\circ$

अतः, $\angle OED > \angle ODE$ $\therefore$ $OD > OE$ [$\because$ त्रिभुज के वृहतर कोण के विपरीत भुजा का माप सबसे छोटे कोण के विपरीत भुजा के माप की अपेक्षा बड़ा है।]

बनाकर देखें- 20.3

1. दो व्यक्तियों में से एक व्यक्ति पूर्व पश्चिम मूखी रास्ता पर आने के लिए दक्षिण की ओर आना शुरु किया तथा दूसरा व्यक्ति उसी स्थान से एक ही साथ दक्षिण पूर्व दिशा की ओर आना शुरु किया। कौन सा व्यक्ति आगे पहुँचेगा हिसाब करके लिखें।
2. ABCD चतुर्भुज का AB = AD तथा BC = DC; D बिन्दु से AC भुजा के सबसे कम दूरी पर DP है। प्रमाणित करें कि B, P, D तीनो बिन्दु एक रेखीय है।
3. ABC त्रिभुज का मध्यमा AD है। B और C बिन्दु से AD भुजा की सबसे कम दूरी पर BP और CQ है। प्रमाणित करें कि BP = CQ।

21. त्रिभुज बनाना

मैं, शाहिना, महबूब एवं सौमेन ने प्रदर्शनी के लिए विभिन्न आकार की ज्यामितिक चित्र बनाया है।

हमलोगो ने रंगीन काठी की सहायता से विभिन्न प्रकार का त्रिभुज, बहुभुज बनाया है। उनके कोणों के साथ भुजा का सम्पर्क जान गये है।

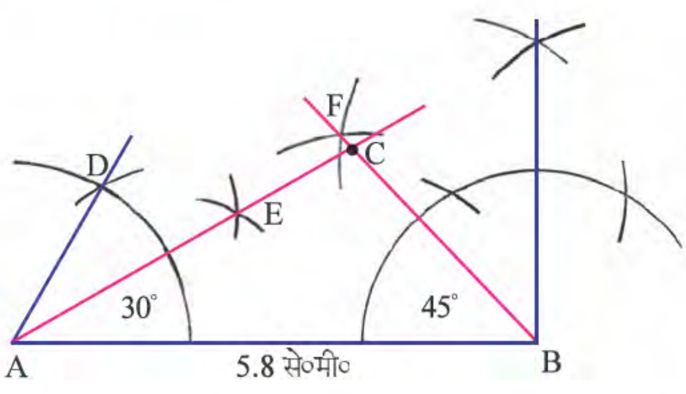
अब हमलोग बोर्ड पर विभिन्न प्रकार के ज्यामितीय चित्रों को बनायेंगे। उनको कॉपी में बनाकर तथा रंग करके काट लेंगे तथा उनसे नया कुछ बनाने की कोशिश करेंगे।

मेहबूब विभिन्न प्रकार का त्रिभुज काफी जल्दी तथा सुन्दर ढंग से बनाता है।

हमने तय किया है कि शाहिना और सौमेन बोर्ड पर त्रिभुज बनाने के विभिन्न शर्तों को लिखेंगे। हमलोग उन शर्तों पर बनाने की कोशिश करेंगे।

शाहिना ने लिखा—एक त्रिभुज बनायें जिसके एक भुजा की लम्बाई **5.8** से०मी० एवं भुजा से संलग्न दो कोण **30°** एवं **45°** होंगे।

महबूब ने स्केल एवं पेंसिल कम्पास से बनाया—

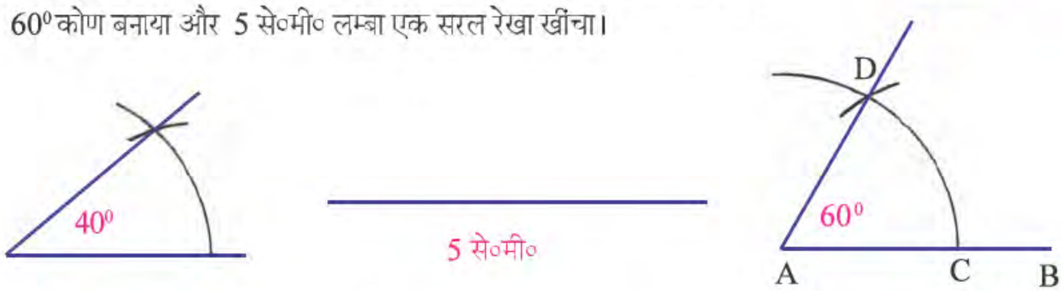


ABC एक त्रिभुज बना जिसकी भुजा AB = 5.8 से०मी०, ∠CAB = 30° एवं ∠CBA = 45°

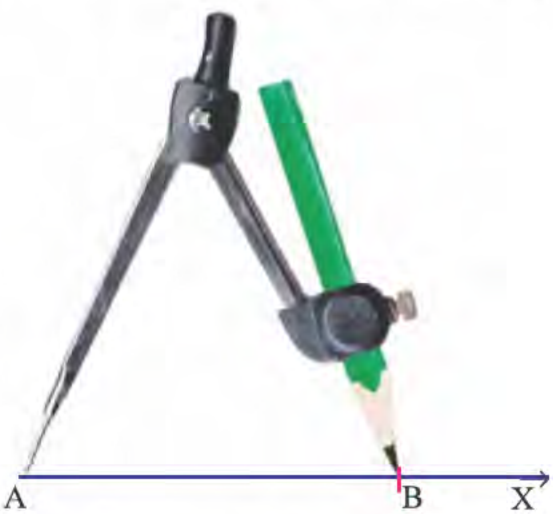
1 सौमेन ने लिखा— एक त्रिभुज बनाये जिस का दो कोण 40^0 और 60^0 है।
60^0 कोण के विपरीत भुजा की लम्बाई 5 से०मी० है।

इस प्रकार के शर्त पर किस प्रकार त्रिभुज बनाएंगे।

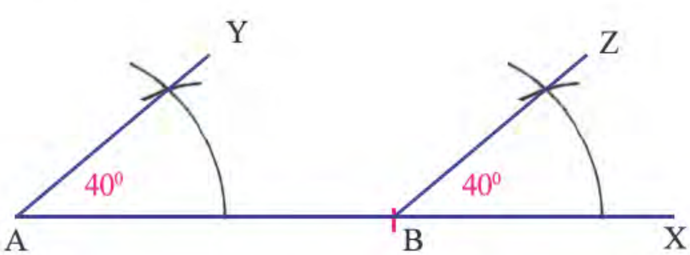
(i) पहले चांद की सहायता से 40^0 कोण बनाया। स्केल और कम्पास की सहायता से 60^0 कोण बनाया और 5 से०मी० लम्बा एक सरल रेखा खींचा।



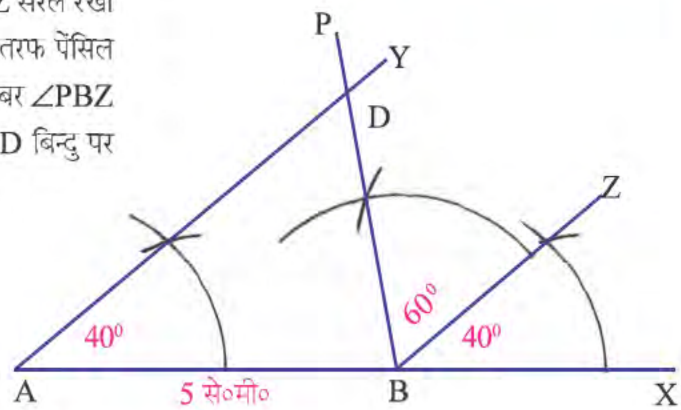
(ii) अब AX एक किरण रेखा से पेंसिल कम्पास की सहायता से 5 से०मी० लम्बा सरल रेखा AB काट लिया।



(iii) पेंसिल कम्पास की सहायता से AB सरल रेखा के A बिन्दु तथा B बिन्दु पर 40^0 कोण के बराबर दो कोण क्रमशः $\angle YAB$ और $\angle ZBX$ बनाया।



(iv) अब BZ सरलरेखांश के B बिन्दु पर BZ सरल रेखा के जिस तरफ AY सरलरेखांश है उसी तरफ पेंसिल कम्पास की सहायता से 60^0 कोण के बराबर $\angle PBZ$ बनाया। PB और AY एक दूसरे को D बिन्दु पर काटते है।



ΔADB निर्णेय त्रिभुज हुया जिसकी

$AB = 5$ से०मी०

$\angle DAB = 40^0$

एवं $\angle DBZ = \angle ADB = 60^0$

अर्थात् 60^0 कोण ($\angle ADB$) विपरीत भुजा $AB = 5$ से०मी० मिला।

लेकिन, $\angle ADB = 60^0$ कैसे पाया तर्क देकर प्रमाणित करने की कोशिश करें।

प्रमाण :

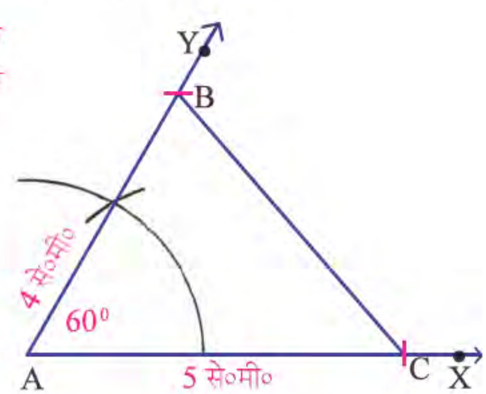
$\angle XBZ = \angle XAY$	(बनावट के अनुसार)
$\therefore BZ \parallel AY$	(अनुरुप दोनो कोण बराबर)
$\angle ZBP =$ एकान्तर $\angle BDA$	($\because BZ \parallel AY$ एवं PB छेदक है)
$\angle BDA = 60^0$	($\because \angle ZBP = 60^0$)

$\therefore \Delta ADB$ का $\angle DAB = 40^0$, $\angle ADB = 60^0$ एवं $\angle ADB = 60^0$ का विपरीत भुजा $AB = 5$ से०मी०

स्वयं बनाये—21.1

मैं एक त्रिभुज बनाऊंगा जिसके दो कोण का माप 45^0 तथा 30^0 है। 30^0 कोण के विपरीत भुजा की लम्बाई 6 से०मी० है। मैं बनाकर उसे बनाने की विधि को लिखूंगा तथा प्रामाणित करुंगा।

2 शाहिना ने फिर लिखा—हमलोग एक त्रिभुज बनाये जिसके दो भुजाओं की लम्बाई 5 से०मी० एवं 4 से०मी० है और उन दो भुजाओ के बीच का कोण 60^0 हो।



मेहबूब स्केल एवं पेंसिल कम्पास की सहायता से बनाया।

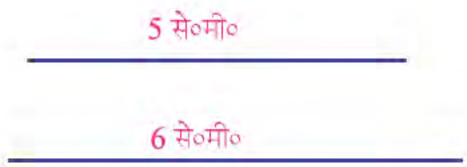
ABC निर्णेय त्रिभुज हुआ जिसका $AB = 4$ से०मी०

$AC = 5$ से०मी०

एवं $\angle BAC = 60^0$

3 सौमेन ने लिखा : अब एक त्रिभुज बनाये जिसके दो भुजाओं की लम्बाई 5 से०मी० एवं 6 से०मी० है। 6 से०मी० लम्बी भुजा का विपरीत कोण 45^0 है। इस प्रकार के शर्त पर किस तरह त्रिभुज बनाऊंगा।

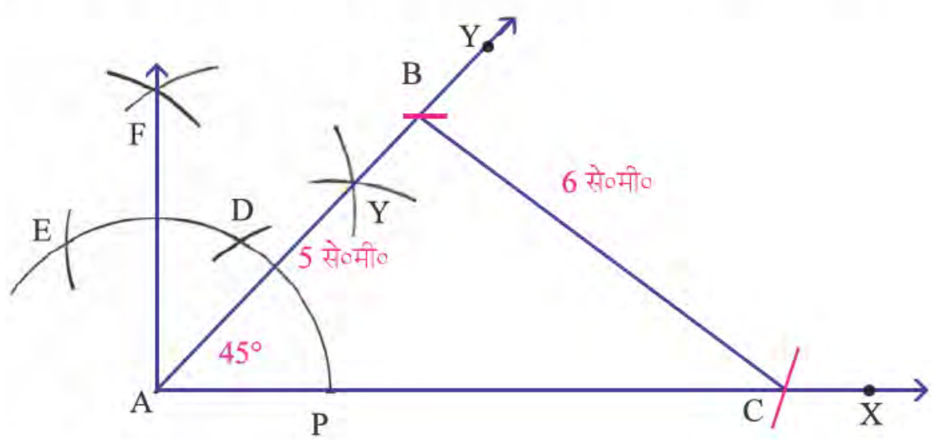
(i) स्केल की सहायता से 5 से०मी० एवं 6 से०मी० लम्बाई की दो सरल रेखा खींचा।



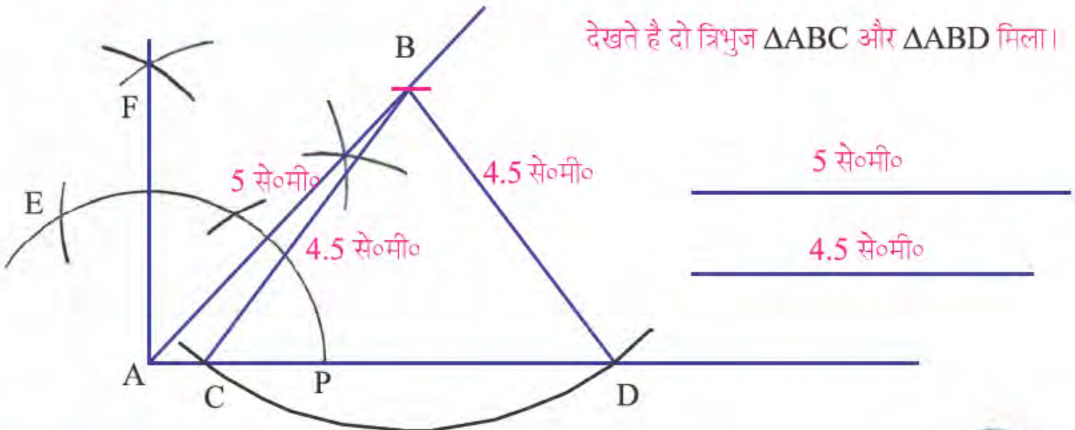
(ii) स्केल की सहायता से एक AX किरण खींचा। AX किरण के A बिन्दु पर पेंसिल कम्पास की सहायता से 45^0 का कोण $\angle XAY$ बनाया।

पेंसिल कम्पास की सहायता से AY किरण से 5 से०मी० लम्बाई के बराबर AB सरल रेखा काट लिया। B बिन्दु को केन्द्र मानकर 6 से०मी० सरल रेखा के बराबर लम्बाई के अर्द्धव्यास को लेकर एक वृत्त का चाप खींचा जो AX किरण को C बिन्दु पर काटता है।

B और C दोनों बिन्दुओं को स्केल की सहायता से मिलाकर ΔABC बनाया, जिसका AB = 5 से०मी० $\angle BAC = 45^0$ और BC = 6 से०मी० और BC भुजा के विपरीत कोण $\angle BAC = 45^0$



4 मैं यदि एक ऐसा चतुर्भुज बनाऊँ जिसके दो भुजाओं की लम्बाई 5 से०मी० और 4.5 से०मी० हो तथा 4.5 से०मी० लम्बी भुजा का विपरीत कोण 45^0 हो, तो किस प्रकार का त्रिभुज पाते है देखे।



देखते है दो त्रिभुज ΔABC और ΔABD मिला।

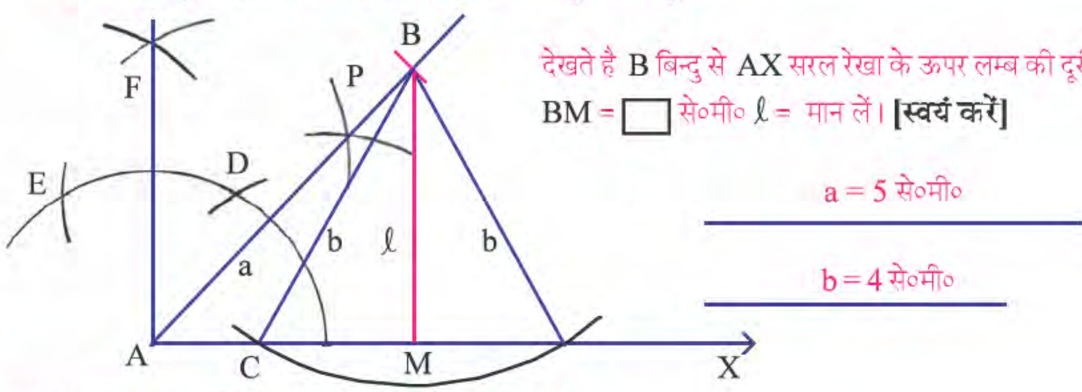
स्वयं बनाये— 21.2

यदि मैं अभी एक ऐसा त्रिभुज बनाऊँ जिसके दो भुजाओं की लम्बाई 5 से०मी० और 4 से०मी० है। 4 से०मी० लम्बी भुजा के विपरीत 45^0 का कोण है। तब किस तरह त्रिभुज बनेगा देखे।

देखे कोई त्रिभुज बन सकता है या नहीं।

5 लेकिन क्यों ऐसा हो रहा है ? कभी एक त्रिभुज पाता हूँ तो कभी दो त्रिभुज पाता हूँ तथा कभी पाता भी नहीं हूँ।

पहले B बिन्दु से AX सरल रेखा पर स्थित लम्ब की दूरी को मापू।



देखते है B बिन्दु से AX सरल रेखा के ऊपर लम्ब की दूरी BM = ☐ से०मी० ℓ = मान लें। **[स्वयं करें]**

देखते है, यदि $b > a$ हो तो ☐ त्रिभुज बनाया जा सकता है।

यदि $\ell < b < a$ हो तो ☐ त्रिभुज बनाया जा सकता है।

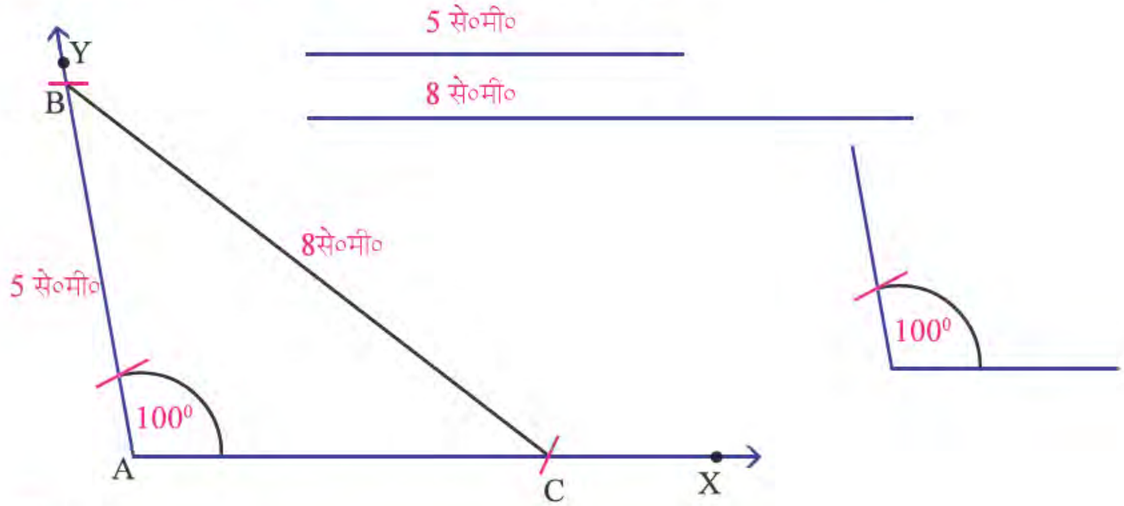
यदि $b = a$ हो तो ☐ त्रिभुज बनाया जा सकता है।

यदि $b < \ell$ हो तो कोई त्रिभुज नहीं बनेगा।

यदि $b = \ell$ हो तो ☐ त्रिभुज बनाया जा सकता है। **(स्वयं करें)**

यदि $\angle x$ स्थूल कोण हो एवं $a < b$ हो तो क्या बनता है देखे।

6 शाहिना बोर्ड पर लिखी— एक ऐसे त्रिभुज बनाओ, जिसकी भुजा $a = 5$ से०मी०, $b = 8$ से०मी० एवं 8 से०मी० भुजा की लम्बाई के विपरीत कोण का माप 100^0 होगा $a < b$.



जब $a < b$,

ABC एक त्रिभुज बना जिसका $AB = a = 5$ से०मी० $BC = b = 8$ से०मी०

$\angle x = \quad \angle BAC =$ (स्थूल कोण) 100^0

यदि $a = b$ हो अर्थात् एक ऐसा त्रिभुज बनाने की कोशिश करें जिसके दो भुजाएँ $a = 5$ से०मी०, $b = 5$ से०मी० एवं 5 से०मी० लम्बी भुजा का विपरीत कोण $\angle x = 100^0$ है।

देखते है कोई त्रिभुज बना पाता हूँ या नहीं। **[स्वयं करें]**

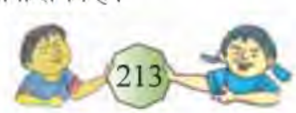
यदि $a < b$ हो अर्थात् एक ऐसा त्रिभुज बनाने की कोशिश करु जिसके दो भुजाएँ $a = 5$ से०मी०, $b = 4$ से०मी० एवं 4 से०मी० लम्बी भुजा का विपरीत कोण $\angle x = 100^0$ है।

देखते है कोई त्रिभुज बनता है या नहीं। **[स्वयं करें]**

स्वयं बनाये—15.1

1) एक त्रिभुज बनायें जिसके दो भुजाओं की लम्बाई 6 से०मी० और 7 से०मी० हो। 7 से०मी० लम्बी भुजा के विपरीत का कोण 60^0 हो। भुजा की माप कितना होने पर त्रिभुज पायेंगे लिखे।

2) एक त्रिभुज बनायें जिसके दो भुजाओं की लम्बाई क्रमश: 6 से०मी० और 9 से०मी० है। 9 से०मी० लम्बी भुजा के विपरीत स्थित कोण का माप 105^0 है। भुजा की माप किस रुप में होने पर त्रिभुज बनाना संभव है।



22. समानान्तर सरल रेखा खींचना

आज मैं अपने आर्ट पेपर पर अपनी इच्छा के अनुसार चित्र बनाऊँगा। मैंने तय किया है कि ग्राम के किनारे पर एक बड़ा मैदान है तथा मैदान के सामने रेलवे लाईन है। इस प्रकार का चित्र बनाऊँगा।

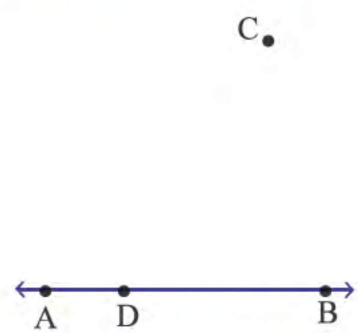
अत: अनेकों सरल रेखा खिंचनी होगी। स्केल की सहायता से मैं समानान्तर सरल रेखा खीचूंगा।

लेकिन मेरे स्केल के एक ओर का हिस्सा टूट गया है। अत: स्केल के दोनो तरफ सरल रेखा खीचनें पर समानान्तर होगी या नहीं। स्केल के टूटे भाग का व्यवहार न करके सठीक समानान्तर रेखा किस प्रकार से खीचूंगा।

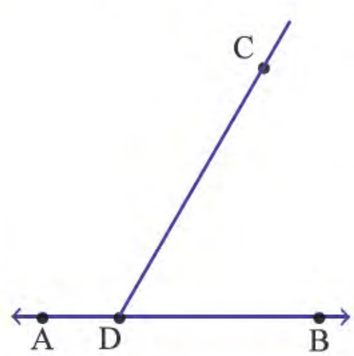
1 स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से समानान्तर सरल रेखा खीचंने की चेष्टा करुं।

एक सरल रेखा AB लिया। उस सरल रेखा के बाहर स्थित एक C बिन्दु को लिया। C बिन्दु से AB सरलरेखा के समानान्तर सरल रेखा खीचंने की कोशिश करुंगा।

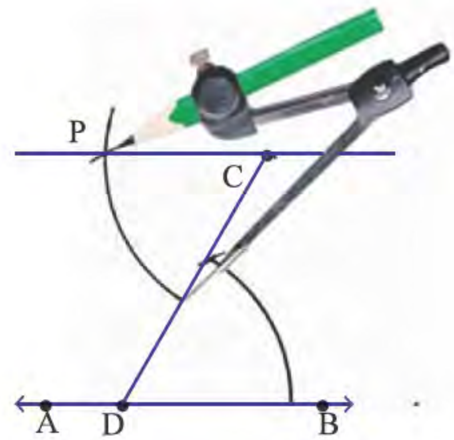
i) पहले स्केल की सहायता से AB एक निर्दिष्ट सरल रेखा खींचा एवं AB सरल रेखा के बाहर एक C बिन्दु को लिया।



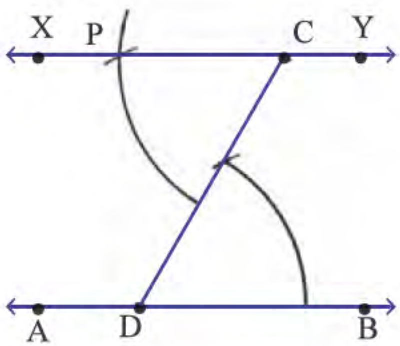
ii) AB सरल रेखा के ऊपर एक बिन्दु D लिया। C और D दोनो बिन्दुओं को स्केल की सहायता से मिला दिया। तो देखते है कि एक ∠CDB कोण बना।



iii) अब स्केल तथा पेंसिल कम्पास की सहायता से DC सरल रेखा के C बिन्दु पर ∠CDB के विपरीत तरफ ∠CDB के बराबर एक कोण ∠PCD बनाया।



P तथा C दोनों बिन्दुओं को स्केल से मिलाकर तथा दोनों तरफ बढ़ाकर XY सरल रेखा पाया।



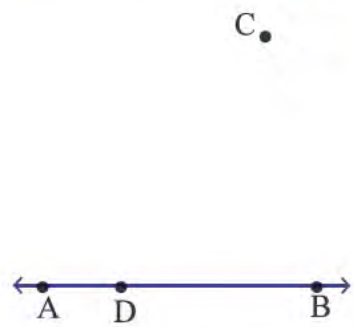
अब, ∠PCD = ∠CDB, लेकिन ये एकान्तर कोण है।

∴ XY और AB सरल रेखा परस्पर समानान्तर है अर्थात् XY || AB

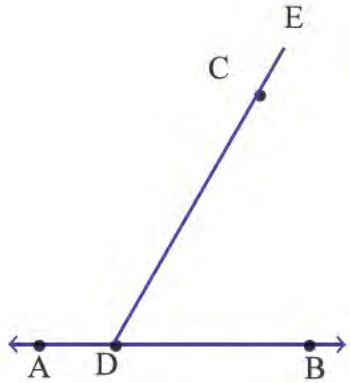
∴ AB निर्दिष्ट सरल रेखा के बाहर स्थित बिन्दु C से AB सरल रेखा के समानान्तर सरल रेखा XY बनाया।

2 मैं दूसरे तरीके से समानान्तर सरल रेखा खींचने की कोशिश करुँगी।

मैं दूसरे तरीके से AB निर्दिष्ट सरल रेखा के बाहर स्थित बिन्दु C से AB सरल रेखा के समानान्तर सरल रेखा खीचूंगा।

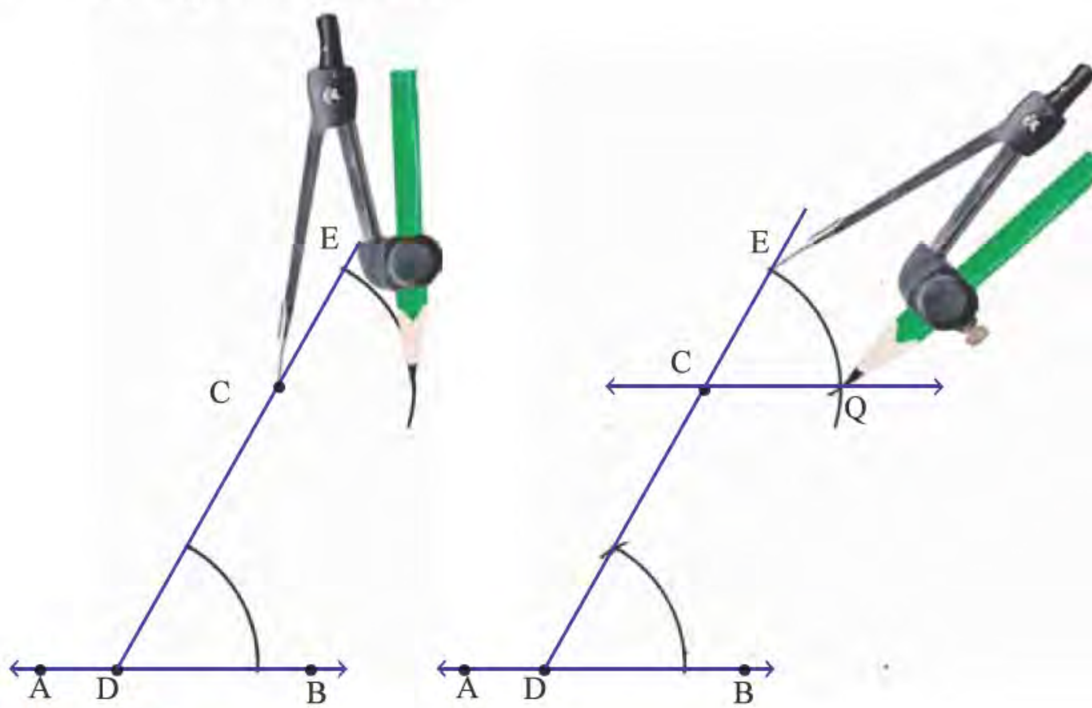


i) AD सरल रेखा के ऊपर कोईभी एक बिन्दु D लिया।

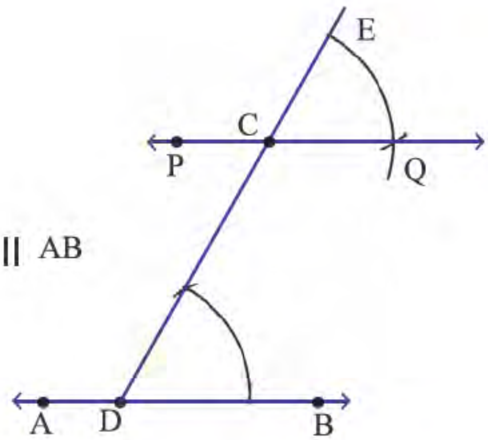


ii) स्केल की सहायता से C और D दोनों बिन्दुओं को जोड़ दिया तथा DC सरल रेखा को E तक बढ़ाया। उससे देखते है कि ∠CDB बना।

iii) CD सरल रेखा के जिस तरफ ∠CDB है उसी तरफ ∠CDB के बराबर स्केल और कम्पास की सहायता से CE सरल रेखा के C बिन्दु पर ∠ECQ कोण बनाया।



iv) QC सरल रेखा को P बिन्दु तक बढ़ा दिया।



अब ∠ECQ = ∠CDB ये एकान्तर कोण है।

∴ PQ औरAB परस्पर समानान्तर सरल रेखा है अर्थात् PQ || AB

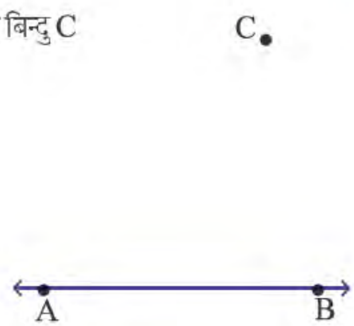
PQ रेखा निर्णेय रेखा या C बिन्दुगामी एवं AB सरल रेखा के समानान्तर है।

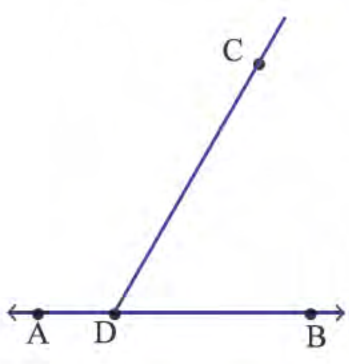
∴ दूसरे तरीके से AB सरल रेखा के बाहर स्थित बिन्दु C से AB सरल रेखा के समानान्तर सरल रेखा PQ बनाया।

3 मैं दूसरे एक और तरीके से समानान्तर सरल रेखा खीचंने की कोशिश करुँ।

मैं एक और अन्य तरीके से AB एक निर्दिष्ट सरल रेखा के बाहर स्थित बिन्दु C से AB सरल रेखा के समानान्तर सरल रेखा खीचूंगा।

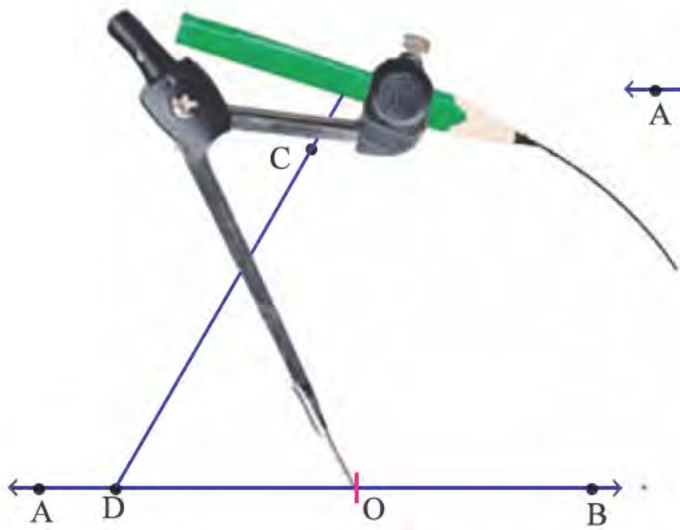
i) AB एक सरल रेखा खींचा एवं AB सरल रेखा के बाहर स्थित बिन्दु C लिया।



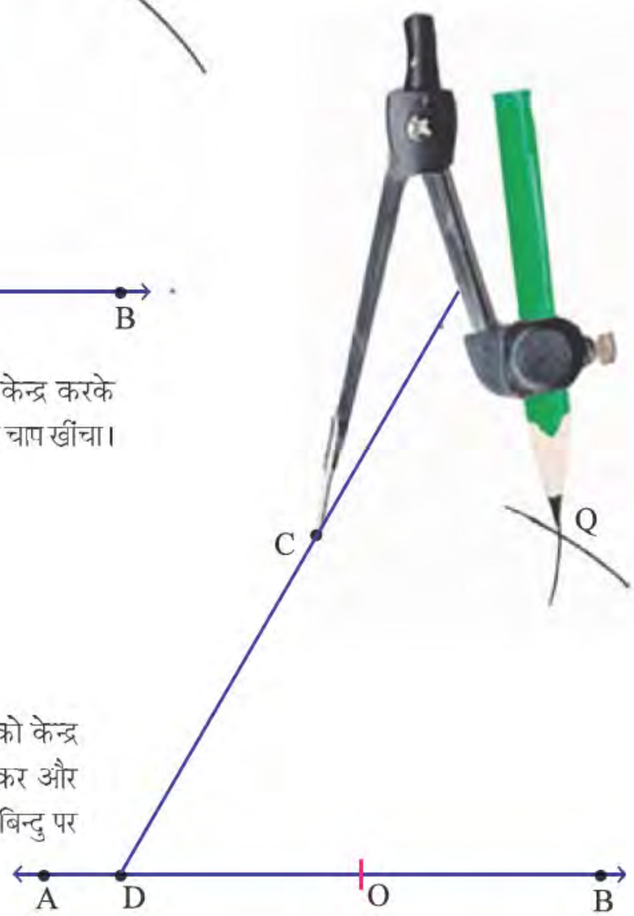


ii) AB सरल रेखा के ऊपर कोई एक बिन्दु D लिया। D एवं C दोनों बिन्दुओं को स्केल की सहायता से मिलाकर DC सरल रेखा पाया।

iii) DB किरण से कोई भी एक सरल रेखा DO काट लिया।

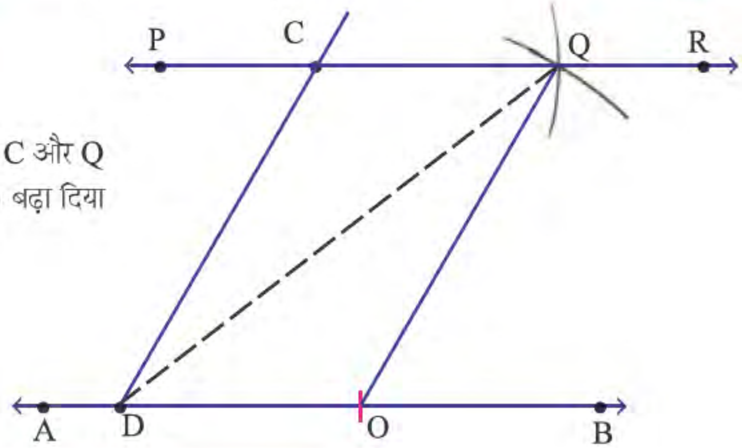


iv) पेंसिल कम्पास की सहायता से O बिन्दु को केन्द्र करके DC के बराबर लम्बाई को अर्द्धव्यास लेकर एक वृत्त चाप खींचा।



v) फिर पेंसिल कम्पास की सहायता से C बिन्दु को केन्द्र मानकर DO के बराबर लम्बाई का अर्द्धव्यास लेकर और एक वृत्त चाप खींचा जो पहले के वृत्त चाप को Q बिन्दु पर काटती है।

vi) स्केल और पेंसिल की सहायता से C और Q दोनों बिन्दुओं को मिलाकर दोनो तरफ बढ़ा दिया एवं PR सरल रेखा पाया।



मैं तथ्य देकर प्रमाणित करुंगा कि PR || AB

D,Q और O,Q को मिला दिया।

ΔCDQ और ΔDOQ के बीच,

DC = OQ, CQ = ☐ एवं DQ उनकी साधारण भुजा है।

$\therefore$ ΔCDQ ≅ ΔDOQ (भुजा-भुजा-भुजा के अनुसार)

$\therefore$ ∠CQD = ∠QDO, लेकिन ये एकान्तर कोण है।

$\therefore$ CQ || DO

अत: PR || AB

$\therefore$ PR सरल रेखा पाया जो C बिन्दुगामी एवं AB सरल रेखा का समानान्तर है। अर्थात् AB सरल रेखा के बाहर स्थित बिन्दु C से AB सरल रेखा के समानान्तर सरल रेखा PR बनाया।

बनाकर देखें— 22

1. एक सरल रेखा XY के बाहर स्थित Z बिन्दु से कितनी सरल रेखा खींची जा सकती है जो XY के समानान्तर है।
2. हबीब ने कॉपी में एक सरल रेखा PQ बनाया है एवं PQ सरल रेखा के बाहर स्थित एक बिन्दु R बनाया है। मैं स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से किसी भी पद्धति से PQ सरल रेखा के समानान्तर सरल रेखा खीचूंगा जो R बिन्दुगामी होगा।
3. मेघा ने स्केल तथा पेंसिल कम्पास की सहायता से ∠ABC = 60° बनाया। BA तथा BC किरण के ऊपर दो बिन्दु क्रमश: P और Q लिया। P बिन्दु से BC किरण तथा Q बिन्दु से BA किरण के समानान्तर सरल रेखा खीचों। इन दो सरल रेखाओं के कटान बिन्दु को D नाम दिया। PBQD चतुर्भुज किस प्रकार का चतुर्भुज है लिखो।

23. प्रदत्त सरल रेखा को तीन, पांच बराबर भागों में विभक्त करना

हमलोग अपने खुशी के अनुसार चित्र बनाया है। देवनाथ ने एक सुन्दर कार्ड बनाया है। कार्ड के ऊपर तीन अलग-अलग मोम रंग से बराबर करके रंग किया है कि देखने में बहुत सुन्दर लग रहा है।

मैं और जाकिर ने तय किया है कि देवनाथ की तरह मोम रंग से कार्ड बनायेंगे। जाकिर ने अपने कार्ड को कोनाकोनी रुप से पेंसिल द्वारा सरल रेखा खींचा एवं स्केल की सहायता से उस सरल रेखा को बराबर तीन भागों में बांट दिया।

मैं भी जाकिर की तरह अपने आयताकार कार्ड का कर्ण खींचा।

लेकिन उस कर्ण को और भी सुन्दर ढ़ंग से स्केल एवं पेंसिल कम्पास की सहायता से किस प्रकार से तीन बराबर सरल रेखा में बाटूंगी?

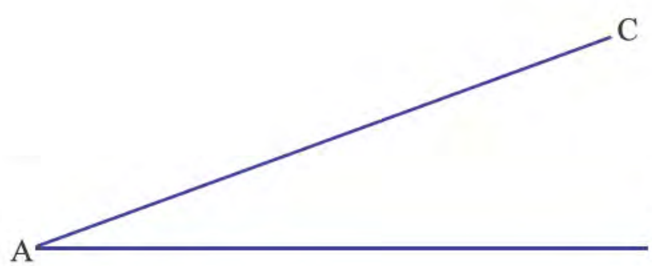
1 एक सरल रेखा को पेंसिल एवं पेंसिल कम्पास की सहायता से तीन-तीन बराबर भागों में बांटने की कोशिश करें।

देखती हूँ कि मेरे आयताकार कार्ड के कर्ण की लम्बाई **8.1** से०मी० है।

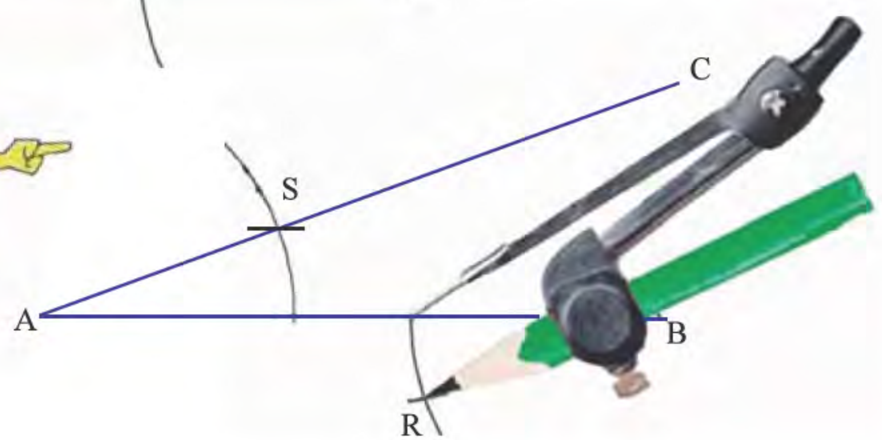
मैं इस **8.1** से०मी० लम्बी सरल रेखा को स्केल तथा कम्पास की सहायता से तीन बराबर भागों में बाँटूगी।

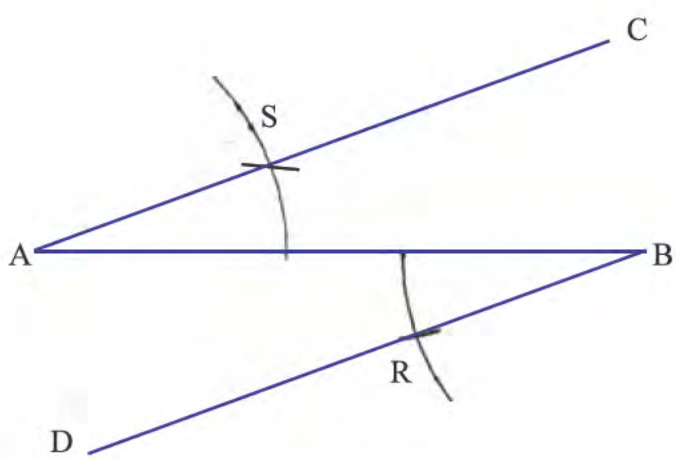
i) पहले एक सरलरेखा AB खीचीं जिसका लम्बाई 8.1 से०मी०।

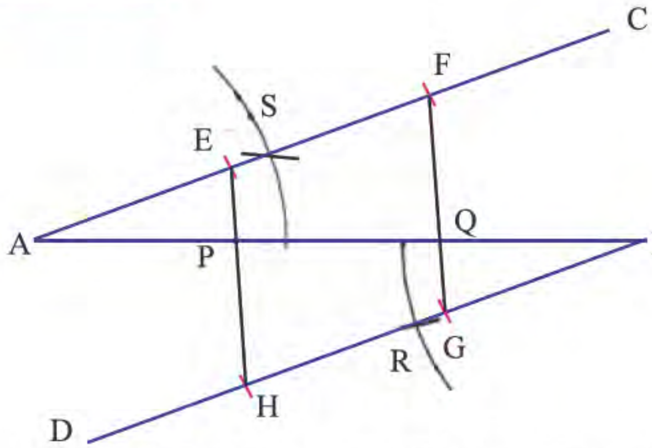
ii) AB सरल रेखा के A बिन्दु पर कोई एक कोण ∠BAC बनाया।



iii) AB सरल रेखा के जिस तरफ ∠BAC स्थित है उसके विपरीत तरफ उस कोण के बराबर ∠ABD बनाया।







iv) AC सरल रेखा से पेंसिल कम्पास की सहायता से एक ही अर्द्धव्यास की लम्बाई को लेकर दो बराबर भागों में AE तथा EF काट लिया।

BD सरल रेखा से इसी तरह उस एक ही अर्द्धव्यास की लम्बाई से दो बराबर भागों में BG एवं GH काट लिया।

v) E, H एवं F,G को स्केल की सहायता से जोड़ दिया। EH तथा FG दोनों सरल रेखाएँ AB सरल रेखा को क्रमश: P तथा Q बिन्दु पर काटती है।

अब काटा कम्पास की सहायता से देखेंगे कि AP, PQ तथा QB सरलरेखांश की लम्बाई बराबर है या नहीं।

देखते है AB सरल रेखा P तथा Q बिन्दु पर बराबर तीन भागों में बंट गई। अर्थात् AP = PQ = QB = ☐ AB

लेकिन AB सरल रेखा को यदि चार बराबर भागों में बांटेंगे तो किस तरह करेंगे?

तब उसके लिए पहले की तरह बनायेंगे। केवल (iv) नम्बर चित्र AC सरल रेखा से एक ही लम्बाई के अर्द्धव्यास को लेकर (4–1) = 3 बराबर भागों एवं DB सरल रेखा से भी उसी लम्बाई के अर्द्धव्यास को लेकर तीन बराबर भागों में काटेंगे।

सोंचकर देखे कि किस तरह एक सरल रेखा को 4 बराबर भाग में बांट सकता हैं या नहीं।

अर्थात् हम यदि AB सरल रेखा को बराबर 5 भागों में बांटे तब (iv) नं॰ के AC सरल रेखा से एक ही लम्बाई के अर्द्धव्यास को लेकर (5 – 1) = ☐ बराबर भागों एवं BD सरल रेखा से उस लम्बाई के अर्द्धव्यास को लेकर 4 बराबर भागों में काट लेंगे।

स्वयं करें— 23

1) मैं स्केल एवं पेंसिल कम्पास की सहायता से 9 से॰मी॰ लम्बे एक सरल रेखा को तीन बराबर भागों में बांटकर प्रत्येक भाग की लम्बाई को स्केल से मापकर देखूंगा।

बनाकर देखें— 23

1. रेहाना ने अपनी कॉपी में 10 से०मी० लम्बी सरल रेखा PQ खींचा है। मैं स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से PQ सरल रेखा को बराबर पांच भागों में बांटू एवं प्रत्येक भाग की लम्बाई 2 से०मी० पाया की नहीं स्केल से मापकर देखें।

2. अजिज ने 12 से०मी० लम्बी एक सरल रेखा XY को स्केल तथा पेंसिल कम्पास की सहायता से कितने बराबर भागों में बांटेगा जिससे प्रत्येक भाग की लम्बाई 2.4 से०मी० होगी। अजिज XY सरल रेखा को कितने बराबर भागों में बांटेगा तथा मैं भी XY सरल रेखा को स्केल और कम्पास पेंसिल की सहायता से उतने ही भागों में बांटूगा।

3. अनवरा ने कॉपी में ABC एक त्रिभुज बनाया है। BC भुजा को पेंसिल कम्पास की सहायता से समद्विभाजित करके AD मध्यमा खींचा है। मैनें AD मध्यमा को स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से AE, EF और FD तीन भागों में बांटा। अब मैं स्केल की सहायता से B और F दो बिन्दुओं को जोड़कर बढ़ा दिया जो AC सरल रेखा को X बिन्दु पर काटती है।

   स्केल से मापकर देखते है, AX = ☐ CX [संख्या बैठाओ]

4. 12.6 से०मी० लम्बाई के रेखा खण्ड को सात बराबर भागों में बांटे। उस अंकन की सहायता से 7.2 से०मी० भुजा वाले समबाहु त्रिभुज को बनायें।

5. रामू प्रधान ने अपने चित्रांकन की कॉपी में ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज बनाया है, जिसकी AB भुजा = 6 से०मी०, BC = 9 से०मी० एवं $\angle ABC = 60°$।

   मैं स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से ABCD समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण BD के ऊपर स्थित दो बिन्दु P और Q निर्धारण करें कि BP = PQ = QD हो।

   अब A, P; P, C; C,Q और Q, A को मिलाकर APCQ चतुर्भुज बना, वह किस प्रकार का चतुर्भुज है।

6. सुजाता ने तीन सरल रेखा खण्ड बनाया जिसकी लम्बाई क्रमश: 4से०मी०, 6से०मी० तथा 10से०मी० है। राहुल ने स्केल और पेंसिल कम्पास की सहायता से प्रथम सरल रेखा को समद्विभाजित, द्वितीय सरल रेखा को समत्रिभाजित एवं तृतीय सरल रेखा को 5 बराबर भागों में बांटा। शबनम ने प्रथम सरल रेखा की लम्बाई का आधा, द्वितीय सरल रेखा का एक तिहाई और तृतीय सरल रेखा खण्ड का पांचवा हिस्सा लेकर एक त्रिभुज PQR बनाया। शबनम द्वारा बनाये गए त्रिभुज को किस प्रकार का त्रिभुज कहेंगे।

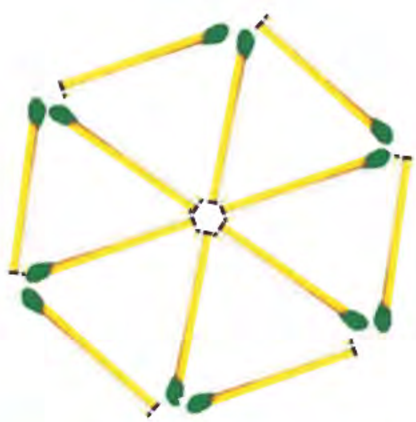
24. मजेदार अंक

मेरा भाई12 दियासलाई का काठियों से 6 समबाहु त्रिभुज बनाया।

दियासलाई की काठियों का मजेदार खेल

1

मैंने तीन दियासलाई की काठियों से समबाहु त्रिभुज बनाया।

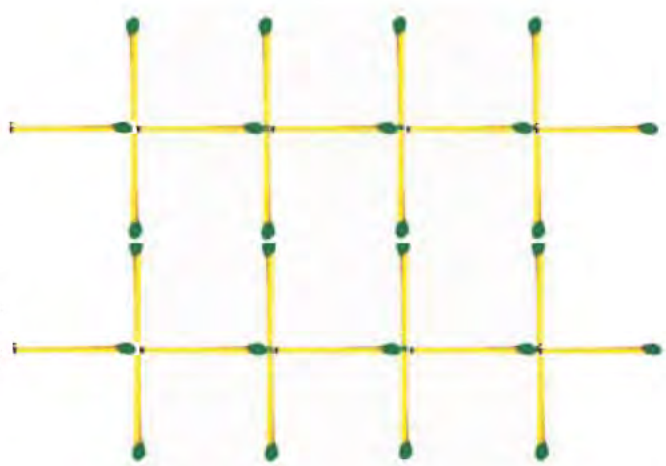


मैं इन 12 काठियों से मात्र 4 काठियों को हिलाकर 3 समबाहु त्रिभुज बनाऊँगा जिसमें समबाहु त्रिभुजों का माप बराबर नहीं होगा। **[स्वयं करें]**

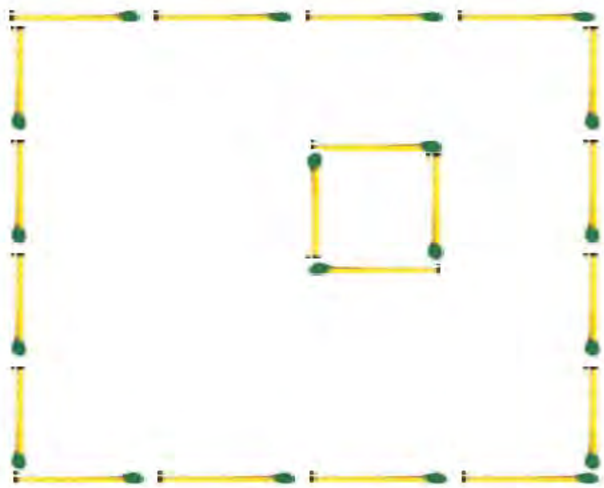
2

मेधा नें 26 दियासलाई की काठियों से पास के चित्र की तरह एक चित्र बनाया।

मैं इस चित्र से मात्र 14 दियासलाई की काठियों को इधर-उधर करके 3 वर्ग क्षेत्र बनाऊँगा जहाँ वर्ग क्षेत्रों का माप बराबर नहीं है।**[स्वयं करें]**

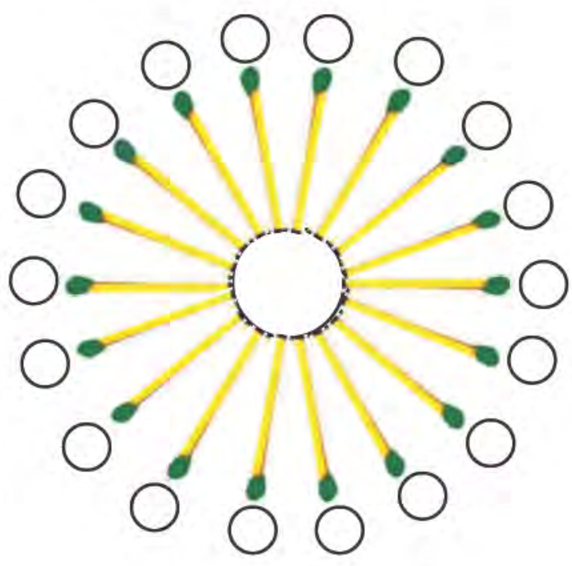


3 रोकैया के पास 20 दियासलाई की काठियाँ है। नीचे के चित्र की तरह 4 दियासलाई की काठियों से 1 वर्गाकार घर बनाया है तथा बाकी 16 दियासलाई की काठियों से वर्गाकार घर के चारों तरफ के बगीचे को वर्गाकार बेड़ा से घेर दिया है।



मैं रोकैया के इस सजावट में और10 काठियों से इस बगीचे को बराबर तथा समान पांच भागो में बांटूगा।

4 मैं नीचे के चक्राकार वृत्त में 1 से 19 तक की संख्याओं को इस प्रकार बैठायें कि प्रति-रेखा के वृत के तीन संख्याओं का योगफल 30 हो।



खो गए अंकों को खोजे

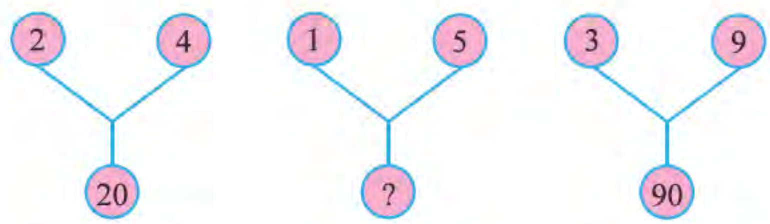
5 (a)

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
3	?	$\frac{19}{3}$

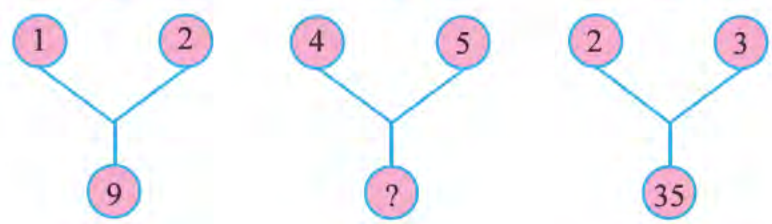
(b)

4	9	26
9	16	50
16	?	40

6 (a)



(b)



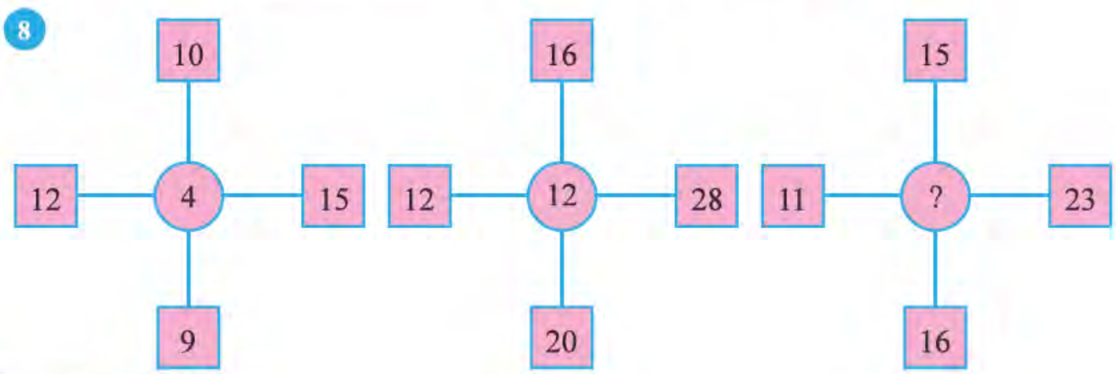
7 (a)

7	4	5
8	7	6
3	3	?
29	19	31

(b)

4	5	6
2	3	7
1	3	?
7	12	39

8



खेल के नियमों को देखे और सठिक संख्या को खोजें

1. यदि '÷' चिन्ह निर्देश करता है '×' चिन्ह को
'+' चिन्ह निर्देश करता ह '÷' चिन्ह को
'#' चिन्ह निर्देश करता ह '+' चिन्ह को

तो 2 ÷ 5 + 5 # 100 का मान निम्नलिखित में से कौन होगा।

(a) 100 (b) 102 (c) 108 (d) 105

2. यदि 7 * 1= 64 एवं 3 * 9= 144 हो तो 5 * 6 का मान निम्नलिखित में से कौन होगा।

(a) 22 (b) 45 (c) 101 (d) 121

3. यदि 84 ⊕ 72 = 45 एवं 73 ⊕ 41 = 43 हो तो 94 ⊕ 72 का मान नीचे में से कौन होगा।

(a) 55 (b) 59 (c) 56 (d) 66

4. यदि '÷' चिन्ह एवं '+' चिन्ह एवं '6' और '3' संख्यायें परस्पर स्थान विनिमय करें, तब नीचे का कौन सा सम्पर्क सही है। लिखे—

(a) 3 + 6 ÷ 2 = 5 (b) 6 ÷ 3 + 2 = 8 (c) 3 + 6 ÷ 5 = 7 (d) 3 ÷ 6 + 1 = 6

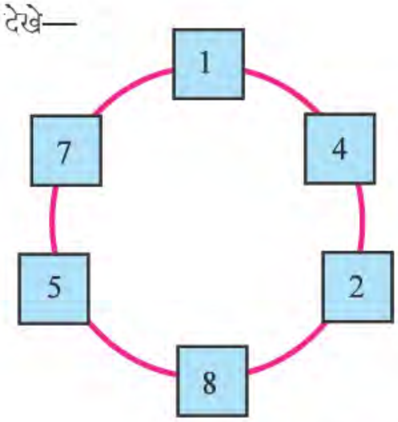
5. यदि '+' चिन्ह तथा '–' चिन्ह एवं '4' और '8' संख्यायें परस्पर स्थान विनिमय करें, तब नीचे का कौन सा सम्पर्क सही है। लिखे—

(a) 4 + 8 – 12 = 16 (b) 4 – 8 + 12 = 6 (c) 8 + 4 – 12 = 24 (d) 8 – 4 + 12 = 8

6. कुछ मजादार संख्याओं को खोजें—

1 4 2 8 5 7 आवृत संख्या (Revolving Number) है क्यों देखे—

1 4 2 8 5 7 × 1 = ______
1 4 2 8 5 7 × 2 = 2 8 5 7 1 4
1 4 2 8 5 7 × 3 = 4 2 8 5 7 1
1 4 2 8 5 7 × 4 = 5 7 1 4 2 8
1 4 2 8 5 7 × 5 = ______
1 4 2 8 5 7 × 6 = ______



7. मैं एक अंक को संख्या का तीन बार व्यवहार 24 करुँ। $3^3 - 3 = \square$
अब 3 के बदले अन्य कोई एक अंक की संख्या का तीन बार व्यवहार करके 24 बनाये। [कम से कम दो बार स्वयं करें]

8. मैं एक अंक को संख्या का तीन बार व्यवहार करके 30 करुँ। $3^3 + 3 = \square$
अब 3 के बदले अन्य कोई एक अंक को लेकर तथा 3 बार व्यवहार करके 30 बनाये। [कम से कम दो तरह का स्वयं करें]

9. ईमान 8 कागज के टुकड़े के ऊपर 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 लिखकर नीचे की तरह सजाकर रखा है—

	1		3
+	2	+	4
+	7	+	5
+	9	+	8
	19		20

मैं मात्र दो टुकड़ो को हटाकर दोनो स्तंभ का योगफल बराबर करने की कोशिश करूँ।

10. मारिया के पिताजी ने किताब खरीदने के लिए एक लिफाफा में कुछ रुपये भरकर घर के टेबल पर लिफाफा को रखकर ऑफिस चले गए। उसने खाम के ऊपर रुपये का परिमाण लिख दिया था।

मारिया ने घर लौटकर देखा कि लिफाफा के ऊपर 98 लिखा है। अत: वह दुकान पर जाकर 92 रुपये का एक किताब खरीद ली। लेकिन मूल्य देते समय देखी कि लिफाफा में 92 रुपये से कम रुपये रखा गया है।

ऐसा किस तरह हुआ, सोचकर लिखे।

11. नीचे के अंक को देखें तथा ठीक से लिखने की कोशिश करें।

```
  O N E
+ T W O
-------
F O U R
```

प्रत्येक अंग्रेजी के वर्ण के बदले में अलग निर्दिष्ट संख्या बैठायें।

25. मिलाकर देखें

बनाकर देखें — 1.1

2. 16.45 वर्ग मी० **3.** 1416 वर्ग मी० **4.** 200 वर्ग मी० **a)** 120 वर्ग मी० **b)** 304 वर्ग मी० **5.** 720 वर्ग मी० **6. a)** दोगुना **b)** दोगुना **c) (a)** चित्र आयताकार क्षेत्र के क्षेत्रफल का दो गुना **(d)** एक चौथाई **7.(a)** चार गुना **(b)** एक चौथाई **8. (a)** 39.6 वर्ग मी० 2455.20 रुपये **(b)** 93.18 वर्ग मी० **(c)** 39.6 वर्ग मी०, **(d)** 1593.36 रुपये।

स्वयं करें— 1.2

$(-9x^3 + 27x^2 - 2x + 6)$ वर्ग मी०; $(-2y^2 - 5xy^2 + 40x + 16)$ वर्ग मी०; $(2x^2 - x + 4)$ से० मी०; $(3x^2y^2 - 9x + 6y)$ मी०; $(4 - 25x^2)$ वर्ग मी० $(4 - 10p)$ मी०; $(11m + 13n)$ मी०; $(81x^2 - y^2)$ वर्ग से०मी०

बनाकर देखें— 1.2

1. **(i)** $1 + 5n$ **(ii)** $2 + 5n$ **(iii)** $1 + 4n$ **2.** $(12y + 6)$ से०मी० **3.** $(64x^2 - 9y^2)$ वर्ग से०मी०

4. $(3m - 4)^2$ वर्ग मी०; $m = 2$ **5. (b)** $3a^2 + a + 5; -9a^2 + 3a - 2; -6a^2 - 2a + 1$ **(c)** $11m^2 - 5mn$; $8m^2 - 2mn; 3n^2 + 3mn$ **6. (b)** $x^6 - 4x^5 + 6x^4$; $x^2 - 4x + 6$ **(c)** $30m^4n^5 + 400m^5n^6 - 50m^6n^7$; $\frac{3}{10}n + 4mn^2 - \frac{1}{2}m^2n^3$ **(d)** $343\ell^3 - 700\ell m^2 + 490m\ell^2 - 1000m^3$; $7\ell - 10m$

(e) $3125a^5 - 405ab^4 + 1875a^4b - 243b^5$; $(25a^2 + 9b^2)(5a - 3b)$

7. (i) 0 **(ii)** 0 **(iii)** $x^4 - y^4$ **(iv)** 0 **(v)** 0 **(vi)** 0 **8. (i)** $25x^2 - 20xy + 4y^2$ **(ii)** $49 + 28m + 4m^2$ **(iii)** $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ **(iv)** $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2cd - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd$

9. (i) $(3x - \frac{3}{5y})^2$ **(ii)** $(5m - 7n)^2$ **(iii)** $(3a)^2$ **(iv)** $(\frac{p}{q} - \frac{q}{p})^2$ **10. (i)** $(400)^2 - 9^2$ **(ii)** $(3x)^2 - (x+3y)^2$ **(iii)** $(\frac{x+1}{2})^2 - (\frac{x-1}{2})^2$ **[अन्य समाधान सोचकर देखें]**

11. (i) $25(3m + 2n)(3m - 2n)$ **(ii)** $(5x - \frac{1}{3}yz)(5x + \frac{1}{3}yz)$ **(iii)** $7a(x + 1)(x + 1)$ **(iv)** $3(x - a)(x - a)(x+a)(x+a)$ **(v)** $(a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)$ **(vi)** $a(x + 14y)(15x - 14y)$ **(vii)** $(x - 2y + 3)(x - 2y - 3)$ **(viii)** $(x - y)(x + y - 2)$ **(ix)** $(3 - a)(a + 1)$ **(x)** $(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ **(xi)** $(a + b - c)(a - b + c)$ **(xii)** $(a + b)(c + 1)$ **(xii)** $(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$ **12. (i)** $x^2y^2 - p^2q^2$ **(ii)** 2499 **(iii)** $4x^2 + 9z^2 + 12xz - y^2$ **(iv)** 2249879 **(v)** $a^4 - 16$ **13. (e)** 65 **14. (a)** $(a + b)^2 + (a - b)^2$ **(b)** $(5x+3y)^2 + (5x - 3y)^2$ **(c)** $(a + c)^2 + (b - d)^2$ **15. (i)** $t = \pm 1$ **(ii)** $\pm 4a$ **(iii)** $a = 10, b = 1$ **(v)** धनात्मक **16. (i)** 12 **(ii)** 2 **(iii)** 1 **(iv)** 42 **(v)** $-16\frac{1}{2}$ **(vi)** 41

बनाकर देखें— 1.3

4. एक भुजा की लम्बाई **5.** दो सन्निहित भुजाओं की लम्बाई और उनके अन्तर्गत कोणों का परिमाप। **11. (i)** BD = 5 से०मी० **(ii)** 2.5 से०मी० **(iii)** $\angle ADC = 60^\circ$ **(iv)** $\angle AOB = 90^\circ$ **(v)** वर्ग क्षेत्र **(vi)** आयत क्षेत्र, वर्ग क्षेत्र।

बनाकर देखें — 2

2. (i) 2 घंटा करके काम करके 8 लोग, 3 घंटा करके 12 लोग, 4 घंटा करके 14 लोग, 5 घंटा करके 6 लोग।

(ii) 6 लोग **(iii)** 8लोग

3. (a) (i) $\frac{1}{5}$ भाग **(ii)** आधुनिक संगीत **(iii)** ध्रुपद संगीत

(b) (i) $\frac{1}{18}$ भाग **(ii)** प्रमोदमूलक **(iii)** तत्थमूलक **(iv)** $\frac{1}{4}$ भाग

9. (i) शीतकाल, 72 लोग **(ii)** 18 लोग **(iii)** 36 लोग **(iv)** वर्षाकाल

स्वयं करें— 3.1

(i) 6 **(ii)** $\frac{11}{5}$ **(iii)** $-\frac{20}{7}$ **(iv)** 0

स्वयं करें— 3.2

1) $-\frac{2}{9}$ **2)** $\frac{9}{8}$ **3)** $-\frac{5}{2}$ **4)** $\frac{8}{5}$ **5)** -3 **6)** $-\frac{623}{20295}$

बनाकर देखें — 3

1. (a) $x = \frac{2}{1}$ **(b)** $p = -\frac{8}{1}$ **(c)** $\frac{0}{11}$ **(d)** $m = \frac{3}{5}$ **(e)** $y = -\frac{2}{1}$ **(f)** $t = \frac{8}{13}$ **(g)** $y = \frac{1}{1}$

3. (a) $\frac{17}{4}$ **(b)** 0 **(c)** $\frac{37}{8}$ **4. (a)** $-\frac{9}{11}$ **(b)** $\frac{21}{29}$ **(c)** $\frac{19}{7}$ **(d)** $-\frac{1}{5}$ **(e)** $-\frac{23}{15}$ **(f)** $\frac{14}{5}$

5. $-\frac{7}{15}$ **6. (i)** $\frac{319}{800}$ **(ii)** $\frac{100}{3003}$

बनाकर देखें — 4.1

1. b) $2x^3 - x^2y + 24x - 12y - 14xy + 7y^2$; -12 **c)** $32p^5 - 8p^4 - 52p^3 + 10p^2 + 15p$; -726

d) $6a^2 - ab + 38a + 28b - 5b^2 + 12$; -21

e) $p^5 - p^4q^2 + p^4q - p^3q^3 + pq^4 + p^3q^2 + p^2q^3 - p^2q^4 + q^5$; -64

f) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; 0

2. (i) $-x^{15} - x^{12} + 3x^{11} - x^{10} - 4x^9 + 3x^8 - x^7 + 3x^6 + 12x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 12$

(ii) $8a^{10} - 12a^8b^2 + 4a^6b^4 - 18a^4b^{10} + 27a^2b^{12} - 9b^{14}$

(iii) $a^6x^6 - b^6y^6$ **(iv)** $a^3 - b^3 - c^3 + 2abc - ac^2 - ab^2 + a^2c + a^2b + c^2b + b^2c$

(iv) $\frac{4p^4}{q^4} - \frac{25q^4}{p^4}$ (vi) $2 + \frac{x^4}{y^2z^2} + \frac{z^4}{x^2y^2} + \frac{z^2x^2}{y^4} + \frac{y^4}{z^2x^2} + \frac{y^2x^2}{z^4} + \frac{y^2z^2}{x^4}$

3. (i) $2x^3$ **(ii)** 0 **(iii)** 0 **(iv)** $y(\ell^2 + m^2 + n^2 + \ell m + mn + n\ell) + 2x(\ell m + \ell n + mn) + m^2 + n^2 + \ell^2 + \ell m + \ell n + mn$

स्वयं करें— 4.1

1. (a) $x - 2$ **(b)** $a - 3$ **(c)** $2a - 1$ **(d)** $2a - 3b$

2. भागफल = x शेषफल = x

बनाकर देखें — 4.2

1. $x + 2$ **2.** $(3x - 7y)$ से०मी० **3.** भागफल = $x^2 + y^2$, शेषफल 0

4. (a) $m + 7$ **(b)** $2c - 1$ **(c)** $a^2 - a + 1$; शेषफल = $a + 2$ **(d)** $m^2 - m - 2$

5. (a) $3a - 2x + 4x^2$ **(b)** $\frac{25}{8}y^4$ **(c)** $\frac{27}{2}\frac{a^8}{y^4}$ **(d)** $r^3 - pq^3 + p^3q$

6. $x^3 - 12x - 13$; **7.** $5a^3 - 4a^2 + 2a - 3$ **8. (i)** भागफल = $x + 5$, शेषफल = -3

(ii) भागफल = $27x^3 + 9x^2 + 3x + 1$; शेषफल = 3 **(iii)** भागफल = 7; शेषफल = $-19x - 55$

(iv) भागफल = $x - 4$; शेषफल = $x - 1$

स्वयं करें— 5.1

1. $125 = 5^3$, $64 = 4^3$, 7^3, $729 = 9^3$

बनाकर देखें — 5.1

1. 125, 1 से०मी० भुजावाला घन **2. (v)** $3375 = 15^3$ सबसे बड़ा घन

3. (iii) 1024 **(iv)** 324 **(v)** 1744 **(vi)** 1372 **4.** 48 **5. (i)** 5 **(ii)** 5 **(iii)** 2 **(iv)** 11 **(v)** 35

6. (i) 7 **(ii)** 2 **(iii)** 2 **(iv)** 2 **(v)** 25 **7. (i)** 8 **(ii)** 12 **(iii)** 18 **(iv)** 25 **(v)** 22

बनाकर देखें — 5.2

1. (i) $p^6 + 3p^4q^2 + 3p^2q^4 + q^6$ **(ii)** $\frac{x^3}{27} + \frac{4x^2}{3y} + \frac{16x}{y^2} + \frac{64}{y^3}$ **(iii)** $x^6y^3 - 3x^4y^2z^2 + 3x^2yz^4 - z^6$

(iv) $\ell^3 + b^3 - 8c^3 + 3\ell^2b + 3\ell b^2 - 6c\ell^2 - 12\ell bc - 6b^2c + 12c^2\ell + 12c^2b$

(v) 125 **(vi)** $8m^3$ **(vii)** $8b^3$

(viii) $8x^3 - 27y^3 - 64z^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 48x^2z + 144xyz - 108y^2z + 96xyz^2 - 144yz^2$

(ix) $(x^2 - 5)^3$, **(x)** $(x + 10)^3$

2. (a) 8 **(c)** 2 **(d)** 14 **(e)** 110 **(f)** 0 **(i)** $\frac{3}{8}$ **(j)** 0 **(k)** 455

बनाकर देखें — 5.3

1. **(i)** $x^3 + 729$ **(ii)** $4a^2 + 2a + 1$ **(iii)** $(9 + 15c + 25c^2)$ **(iv)** $(a + b)^3 + c^3$

(v) $27x^3$ **(vi)** $\frac{x^3}{y^3} + 1$ **(vii)** $64a^3 - 125b^3$ **(viii)** $(ab - cd)$

(ix) $(1 + 4y + 16y^2)$ **(x)** $\{(2p - 6)^2 - 14(p - 3) + 49\}$

(xi) $\{(m + n)^3 - (n + p)^3\}$ **(xii)** $(3a - 2b)^3 + (2a - 3b)^3$

2. **(i)** $a^6 - b^6$ **(ii)** $a^6 - 64b^6$ **(iii)** $64a^6 - 729$ **(iv)** 0 **(v)** $8x^3 + 1$

4. 0 **5.** 0 **6.** **(i)** $(10a + 3b^2)(100a^2 - 30ab^2 + 9b^4)$ **(ii)** $(1 - 6z)(1 + 6z + 36z^2)$

(iii) $m(m - 1)(m^2 + m + 1)$ **(iv)** $3(4a + 1)(16a^2 - 4a + 1)$ **(v)** $2a(2ax + 3y)(4a^2x^2 - 6axy + 9y^2)$

(vi) $(9abc - 5)(81a^2b^2c^2 + 45abc + 25)$

(vii) $(\frac{3}{a} - \frac{1}{3b})(\frac{9}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{9b^2})$ **(viii)** $(\frac{x}{4} - \frac{4}{x})(\frac{x}{4} + \frac{4}{x} + 1)(\frac{x}{4} + \frac{4}{x} - 1)$

(ix) $(x + 2y)(x^2 + xy + y^2)$ **(x)** $(1 + 4x)(1 + 5x + 7x^2)$

(xi) $(x - 3y)(x^2 + 3y^2)$ **(xii)** $(2 - a + b)(a^2 - 2ab + 2a - 2b + b^2 + 4)$

(xiii) $(x^2 + b^2 + ab)\{x^4 + 2x^2b^2 + b^4 - ab(x^2 + b^2) + a^2b^2\}$

(xiv) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9)$ **(xv)** $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

(xvi) $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ **(xvii)** $mn(m - n)$

स्वयं करें — 6.1

1. सम्पूरक, पूरक, पूरक, सम्पूरक, कोई नहीं, पूरक

बनाकर देखें — 6

1. **(a)** हाँ, **(b)** नहीं **(c)** नहीं, नहीं, **(d)** नहीं **(e)** हाँ **(f)** हाँ **(g)** हाँ **(h)** हाँ **2.** पूरक कोण (45°, 45°), (42°, 48°); सम्पूरक कोण (70°, 110°), (85°, 95°) **3.** (31°, 59°); (47°, 43°); (26°, 64°);

4. (47°, 133°); (75°, 105°); (58°, 122°); **9.** 25, **10.** $\angle$ BOP = 20°, $\angle$ AOP = 160°

11. एक ही सरल रेखा, **12.** एक ही सरल रेखा।

बनाकर देखें — 7.1

2. **(a)** $\angle 2 = 145°$, $\angle 3 = 35°$, $\angle 4 = 145°$ **(b)** $\angle POT = 40°$, $\angle ROP = 120°$, $\angle QOS = 120°$

4. **(i)** $\angle$AOM D और $\angle$MOD **(ii)** $\angle$AOC, $\angle$ BOC या, $\angle$AOM, $\angle$ BOM या, ...

(iii) $\angle$AOC, $\angle$BOD या $\angle$AOD, $\angle$ BOC

6. $\angle$ BOD = 60°, $\angle$ BOC = 120°, $\angle$ AOC = 60°

7. $\angle$ POS = 125°, $\angle$QOS = 55°, $\angle$QOR = 125°, $\angle$POR = 55°

बनाकर देखें — 9

1. AB=BC , PQ=QR , XY=YZ

2. $\angle BAC = \angle BCA$, $\angle PQR = \angle PRQ$

बनाकर देखें — 10.1

1. 442 रुपये **2.** 60 मीटर **3.** 18 दिन **4.** 4 घंटा **5.** 8 दिन **6.** 28 दिन **7.** 24 लोग

बनाकर देखें — 10.2

1. 5 दिन **2.** 70 रुपए **3.** 2 **4.** 15 दिन **5.** 10 घंटा **6.** 15 इकाई **7.** 10 लोग **8.** 80 लोग **9.** 16 **10.** 15 लोग **11.** 720 ग्राम **12.** 210 मीटर **13.** 30 दिन मैं **14. (a)** 15 यूनिट **(b)** 24 बीघा

बनाकर देखें — 11

1. 6 रुपये **2.** 6,60,000 रुपये **3. (i)** 12 रुपये **(ii)** 25.8 रुपये **(iii)** 41.58 मीटर **(iv)** 960 ग्राम **4. (i)** 45 **(ii)** 0.5 **(iii)** 3.125 **6.** हाइड्रोजन है $66\frac{2}{3}$% और आक्सीजन है $33\frac{1}{3}$ % **7.** 13% **8.** नाइट्रोजन = 18.9 लीटर, आक्सीजन = 5.76 लीटर और कार्बन-डाई-आक्साइड = 0.34 लीटर **9.** 171 रुपये **10.** 21 **11.** 360 रुपये **12.** $16\frac{2}{3}$ **13.** $9\frac{1}{11}$ **14.** 1170रुपये आय बढ़ेगा **15.** 52 **16. (i)** 78 लोग **(ii)** 24 लोग **(iii)** 6 लोग **(iv)** 12 लोग **17.** 4% ह्रास हुआ, **18.** $2\frac{1}{4}$% ह्रास हुआ। **19.** 21% **20.** 507 लोग

बनाकर देखें — 12

1. 4 लीटर **2.** 3:1 **3.** 6 लीटर **4.** 1.5 कि०ग्रा० **5.** 2 कि०ग्रा० **6.** $\frac{4}{7}$ भाग **7.** 7:17 **8.** 31:17 **9.** 5:2 **10.** 1:2 **11.** $\frac{3}{10}$ भाग **12.** 26:19, 5:2, 4:3, 5:9, 1:1 **13.** प्रथम प्रकार का तरल 440 लीटर एवं द्वितीय प्रकार का तरल 260 लीटर **14.** 2.2 लीटर **15.** 1:2

बनाकर देखें — 13

15. (i) $x = -\frac{9}{2}$ (ii) $x = 6\frac{10}{13}$ (iii) $x = 3$ (iv) $x = -1$ (v) $x = 7$ (vi) $x = 3$ (vii) $x = 6$ (viii) $x = 9$ (ix) $x = 20\frac{2}{13}$ (x) $x = -1\frac{4}{19}$ (xi) $x = 100$ (xii) $t = -5\frac{3}{10}$ (xiii) $x = 51$

स्वयं करें — 13.1

(i) $(x+3)(x+2)$ **(ii)** $(x+3)(x-2)$ **(iii)** $(x-3)(x+2)$ **(iv)** $(y+17)(y+6)$ **(v)** $(a+12)(a-11)$ **(vi)** $(p+6)(p-3)$

बनाकर देखें — 13.1

1. $p = 3, q = -43, (x+3)(x-43); p = 15, q = 4, (m+15)(m+4); p = -3, q = 2, (x-3)(x+2);$ $p = -6, q = 2, (a+b-6)(a+b+2); p = -2, q = 1, (x-y-2)(x-y+1)$

2. (i) $(a+b-3)(a+b-2)$ **(ii)** $(x^2 - 2x + 9)(x^2 - 2x - 4)$ **(iii)** $(p^2 - 3q^2 - 9)(p^2 - 3q^2 - 7)$ **(iv)** $(a^2+5)(a+1)(a-1)$ **(v)** $(xy + 35)(xy - 12)$ **(vi)** $(x+2)(x-2)(x^2-3)$ **(vii)** $(a+4b)(a-3b)$ **(viii)** $(p+27q)(p+4q)$ **(ix)** $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a^3-5b^3)$ **(x)** $(x^2-3x-16)(x^2-3x-6)$ **(xi)** $(x^2+10x+18)(x+8)(x+2)$ **(xii)** $(x+7)(x+2)(x^2+9x+4)$ **(xiii)** $(x-a-b)(x-a+b)$ **(xiv)** $(x-a-3b)(x+a+2b)$ **(xv)** $(a+b-3)(a+b-2)$ **(xvi)** $(x+a^2+2ab+b^2)(x-a^2+2ab-b^2)$ **(xvii)** $(x-a)(x-\frac{1}{a})$ **(xviii)** $(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)(xy-1)(x^2y^2+xy+1)$

स्वयं करें — 13.2

1) $(a-9)(a+8), (x-1)(2x+1)$

बनाकर देखें — 13.2

(i) $(a+2)(2a+1)$ **(ii)** $(x+4)(3x+2)$ **(iii)** $(m+2)(2m+3)$ **(iv)** $(3x-5)(2x+3)$ **(v)** $(r+1)(9r-8)$ **(vi)** $(2m-5n)(3m+2n)$ **(vii)** $(x+7y)(7x-y)$ **(viii)** $(4+3x)(3-2x)$ **(ix)** $(2+3a)(3-2a)$ **(x)** $(2x-3)(3x-2)$ **(xi)** $(9a-11b)(11a-9b)$ **(xii)** $(a-2)(a^2+2a+4)(2a^3+3)$ **(xiii)** $(2a^2+5)(2a+3)(2a-3)$ **(xiv)** $(3x-3y-5)(2x-2y+3)$ **(xv)** $(a+b-2)(3a+3b+4)$ **(xvi)** $(5a-b)(a+5b)$

2. (i) $(x-3)(x+1)$ **(ii)** $(x+3)(x+2)$ **(iii)** $(x-3)(3x+2)$ **(iv)** $(3a-5)(a+1)$

3. (i) $(x+a)(ax+1)$ **(ii)** $(x+a+b)(x+a-b)$ **(iii)** $(x-a)(ax-1)$ **(iv)** $(x+a)(ax-1)$ **(v)** $(x-a)(ax+2)$ **(vi)** $(a+\frac{3}{a})(a-\frac{2}{a})$

बनाकर देखें — 14

1. (i) $4ab^2$ **(ii)** $5p^2q^2$ **(iii)** 7 **(iv)** $3a^2b^2$

2. (i) $10x^3y^3$ **(ii)** $210p^3q^4$ **(iii)** $75a^5b^2c^2$ **(iv)** $165a^2b^2c^2$

3. **(i)** $x(x+y)$ **(ii)** $x-3y$ **(iii)** $2ax(a-x)^2$ **(iv)** $x-1$ **(v)** $a-1$ **(vi)** 1 **(vii)** $x+y$ **(viii)** $4(x+2)$ **(ix)** 1 **(x)** $x(x+4)$ **(xi)** $2x-1$ **(xii)** $x(x+2)$ **(xiii)** $3x-2a$

4. **(i)** $(p-q)(p+q)^2$ **(ii)** $x^2(y+1)(y-1)^2$ **(iii)** $(p+q)(p+r)(q+r)$ **(iv)** $a^2b^2(b-2)(b+2)(b^2-2b+4)(b^2+2b+4)$ **(v)** $x^3y(x+y)(x-y)^3(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$ **(vi)** $p^2(p+2)(2p-1)(2p-7)$ **(vii)** $(y+z)(x+y-z)(x-z-y)(x-y+z)$ **(viii)** $(x+y)(x-2y)(2x-y)$ **(ix)** $12(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$ **(x)** $a^2(a+2)^2(2a-1)(2a-7)$ **(xi)** $a^2(a-3b)(3a+4b)^2(a^2+3ab+9b^2)$

5. (i) $x-2, x(x-2)(x+4)(x+5)(x^2+2x+4)$ **(ii)** $1, 12(y-2)(y-3)(y+4)(y+5)$

(iii) $a-2$, $a(a-2)^2(a+3)(a^2+2a+4)$ **(iv)** $a+b+c$, $(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)$
(v) $x-2$, $4x(x-2)^2(x+2)(x-3)$

स्वयं करें — 15.1

1. (i) $\frac{4cx-3b^2}{6abc}$ **(ii)** $\frac{4xy-myz}{3mn}$ **(iii)** $\frac{a}{(a+b)^2}$ **(iv)** $\frac{x-y-x^2-xy}{x^2-y^2}$

स्वयं करें — 15.2

$\frac{a^2}{b^2}$

स्वयं करें — 15.3

(i) $\frac{a^3}{bcd}$ **(ii)** y **(iii)** $px - py + qx - qy$

बनाकर देखें — 15

1. (i) सही **(ii)** गलत **(iii)** सही **(iv)** गलत

2. (i) $\frac{9a^3}{11b}$ **(ii)** $\frac{6b^3c^2}{7a^3}$ **(iii)** $\frac{x-2}{x+1}$ **(iv)** $\frac{a+1}{a}$ **(v)** $\frac{p^2-pq+q^2}{p+q}$ **(vi)** $\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}$ **(vii)** $\frac{a-b}{a^2+ab}$

3. (i) $\frac{a+b+c}{abc}$ **(ii)** 2 **(iii)** $\frac{x^3+a^2x+bx-ab-ax^4}{abx}$ **(iv)** $\frac{a}{2b^2}$ **(v)** $\frac{3}{x^2-4x+3}$ **(vi)** $\frac{8x^7}{x^8-1}$

(vii) a **(viii)** 0 **(ix)** 0 **(x)** x **(xi)** 1 **(xii)** 6 **(xiii)** 0

स्वयं करें — 16.1

1. (i) $x = 80$ **(ii)** 85 **(iii)** 90 **2.** $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$

स्वयं करें — 16.2

1. (i) $x = 85^0$ **(ii)** $x = 120^0$ **(iii)** $x = 60^0$

बनाकर देखें — 16.1

1. (i) $x = 120^0$ **(ii)** $x = 140^0$ **(iii)** $x = 65^0$ **2.** $\angle EHG = 70^0$, $\angle HEG = 50^0$ **3.** 360^0

4. $\angle ABC=68^0$, $\angle ACB=68^0$ एवं $\angle BAC=44^0$

5. $\angle ABC=50^0$ एवं $\angle BCA=50^0$

6. $\angle ACB=70^0$ एवं $\angle BAC=40^0$

7. $\angle ABC = 130^0$, $\angle BAC=25^0$ एवं $\angle ACB=25^0$

15. 36^0, 72^0, एवं 72^0

स्वयं करें — 16.3

1. (i) ∠R **(ii)** ∠Z **(iii)** ∠B

स्वयं करें — 16.4

1. (i) > **(ii)** XY **(iii)** PR>PQ

स्वयं करें — 17.1

1. 6 दिन, व्यस्त

बनाकर देखें — 17.1

1. 504 **2.** 475 सरल **3.** 27 इकाई **4.** 5 दिन **5.** 42 बीघा **6.** 14 लोग **7.** 48 **8.** 36 लोग **9.** 15 लोग **10.** 24 दिन

बनाकर देखें — 17.2

1. $5\frac{5}{11}$ घंटा **2.** 2 दिन **3.** 30 दिन **4.** 2 घंटा **5. (a)** $6\frac{66}{73}$ घंटा **(b)** $9\frac{9}{13}$ घंटा **(c)** $11\frac{1}{5}$ घंटा **6.** 3 घंटा 20 मिनट **7.** 12 दिन, रोहित 30 दिन में, रमा 60 दिन में, साब्बा 30 दिन में **8.** $1\frac{1}{2}$ दिन **9.** $4\frac{2}{7}$ दिन **10. (a)** शाम 3 बजकर 56 मिनट **(b)** $\frac{67}{150}$ भाग **(c)** $\frac{11}{15}$ भाग

स्वयं करें — 19.1

1. माना, मेरे मार्बेल की संख्या x मुराद पायेगा = $(\frac{7x}{3} - 2)$

अर्थात् 5, 12, 19 ....

शिवानी ने दिया = 18 मार्बेल

बनाकर देखें — 19

1. $2x + 2 = 3x - 5$, 7 **2.** $x+x+1+x+2-5 = 2(x-1)+11$; 15, 16, 17
3. $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$, 12 **4.** $\frac{x+3}{x+2-3} = \frac{7}{3}$, $\frac{4}{6}$ **5.** $\frac{x+2}{x+3-1} \times \frac{x+2}{x+3+2} = \frac{2}{5}$, $\frac{5}{8}$ **6.** $10(x)+3x = 10(3x)+x-36$, 62
7. $x-(89-x) = 15$, [जहां, $x > 89 - x$], 52, 37 **8.** $\frac{x \times 30}{100} = \frac{(830-x)40}{100} + 4$; 480, 350
9. $3x = \frac{56-x}{3} + 48$; 20, 36 **10.** $x - (\frac{x}{5} + \frac{3x}{5}) = 5$, 25 मीटर **11.** $7x+10=3(x+10)$; मेरा वर्तमान उम्र = 5 साल एवं पिताजी की उम्र = 35 साल **12.** $10x+5(137-x) = 1000$, 74
13. $\frac{x}{2} \times \frac{5}{100} + 3450 = \frac{x}{2} \times \frac{8}{100}$, 1,15,000 रुपये, 2,30,000 रुपये **14.** $\frac{(20-7)x}{x+100} = 11$, 550 लोग
15. (i) $x = -4\frac{1}{2}$ **(ii)** $x = 7$ **(iii)** $x = 3$ **(iv)** $x = 12$ **(v)** $x = 7$ **(vi)** $x = 3$ **(vii)** $x = 6$
(viii) $x = 9\frac{15}{19}$ **(ix)** $x = 4$ **(x)** $x = -1\frac{4}{19}$ **(xi)** $x = 9\frac{1}{11}$ **(xii)** $t = -5\frac{3}{10}$ **(xiii)** $x = 15$
(xiv) $x = 2$ **(xv)** $y = 5$ **(xvi)** $x = 2$ **(xvii)** $x = 4$ **(xviii)** $y = 6$

स्वयं करें — 20.1

(i) 3 और 9

स्वयं करें — 20.2

2. (a) त्रिभुज बनाना सम्भव (d) त्रिभुज बनाना सम्भव

स्वयं करें — 20.3

2. 1080^0 **3.** 36^0, 144^0 **4.** 6

बनाकर देखें — 20.2

1. (i) 540^0 **(ii)** 720^0 **(iii)** 900^0 **(iv)** 1080^0 **(v)** 1440^0 **(vi)** 1800^0 **2.** 118^0 **3.** 138^0 **4.** हाँ **5.** नहीं
6. (i) 108^0, 72^0 **(ii)** 120^0, 60^0 **(iii)** 135^0, 45^0 **(iv)** 140^0, 40^0 **(v)** 144^0, 36^0 **(vi)** 160^0, 20^0
7. (i) हो सकता है **(ii)** हो सकता है **(iii)** नहीं हो सकता है **(iv)** हो सकता है **(v)** नहीं **8. (i)** नहीं **(ii)** नहीं **(iii)** हाँ **(iv)** हाँ **(v)** नहीं **(vi)** हाँ **9.** 6 **10.** 8 **11.** 5 **12.** 12 **13.** 21 **16.** 120^0

गणित की परिभाषायें

अखण्ड संख्या - Whole Number
अकुब्ज बहुभुज - Concave Polygon
अभेद - Identity
अंक - Digit
अंकन (बनावट) - Construction
अन्त:कोण - Interior Angle
अन्तस्थ विपरीत कोण - Interior Opposite Angle
अन्त:समद्विभाजक - Internal Bisector
अनुपात - Ratio
अनुभूमिक - Horizontal
अनुरुप कोण - Corresponding Angle
कर्ण - Hypotenuse
असंख्य - Infinite
अज्ञात - Undefined
आयत क्षेत्र - Rectangular region
आयताकार चित्र - Rectangle
ऊँचाई - Height
उत्पादक - Factor
उत्पादक में विश्लेषण - Factorisation
उर्ध्वक्रम - Ascending Order
उपसिद्धान्त - Theorem
लम्ब - Vertical
ऋणात्मक - Negative
एकान्तर कोण - Alternate Angle
एक पदी संख्या राशि - Monomial Expression
ऐकिक नियम - Unitary Method
कर्ण - Diagonal
कोण - Angle
कोटि - Ordinate
कुब्ज बहुभुज - Convex Polygon
केन्द्रीय कोण - Central Angle
सबसे छोटी - Smaller
गुण - Multiplication
गुण्य - Multiplicand
गुणक - Multiplier
गुणनफल - Product
म.स.प.–महत्तम समापवर्तक - Highest Common Factor or,Greatest Common Divisor (H.C.F. or G.C.D.)
घात - Power
घनक - Cube
घनफल - Volume
घनमूल - Cube Root
चाँद - Protractor
चारपदी संख्या राशि - Tetranomial Expression
छुट - Discount
छेदक - Transversal
छेद बिन्दु - Point of Intersection
तथ्य - Data
त्रिभुज - Triangle
त्रिपदी संख्या राशि - Trinomial Expression
त्रिराशिक - Rule of Three
दीर्घ (लम्बाई) - Length

द्विपदी संख्या राशि - Binomial Expression

धनात्मक - Positive

निम्नक्रम - Decreasing Order

चौड़ाई - Breadth

प्रमाण - Proof

पाई चित्र/वृताकार चित्र - Pie chart

पूर्ण वर्ग - Perfect Square

पूर्ण संख्या - Integer

पूर्ण घन संख्या - Perfect Cube

पूरक कोण - Complementary Angle

भुजा - Side

बाह्य समद्विभाजक - External Bisector

वर्ग - Square

वर्ग क्षेत्र - Square Region

वर्गाकार चित्र - Square

वृत - Circle

वृताकार - Circular

वृत्तकला- Sector

बीज - Root

बीजगणितीय संख्या राशि - Algebraic Expression

वियोग(घटाव) - Subtraction

वियोगफल (अन्तर) - Difference

विनिमय नियम - Commutative Law

विच्छेद नियम - Distributive Law

बहुपदी संख्याराशि - Polynomial Expression

विप्रतीप कोण - Vertically Opposite Angle

बाह्य कोण - Exterior Angle

व्यस्त समानुपाती - Inversely Proportional

बिषम बाहु त्रिभुज- Scalene Triangle

वृहत्तर - Greater

बहुभुज - Polygon

आधार - Base

भूज - Abscissa

भाग - Division

भाज्य - Dividend

भाजक - Divisor

भागफल - Quotient

शेषफल - Remainder

भिन्न - Fraction

मिश्रण - Mixture

मूल संख्या - Rational Number

मूल बिन्दु - Origin

मौलिक संख्या - Prime Number

मौलिक उत्पादक - Prime factor

योग (जोड़) - Addition

योगफल - Sum

रश्मि (किरण) - Ray

राम्बस - Rhombus

लेखाचित्र - Graph

लम्ब - Perpendicular

अंश - Numerator

ल.स.प.–लघुतम समापवर्त्तक -Least Common Multiple (L.C.M.)

हर - Denominator

संख्या - Number

संख्याराशि - Expression

साधारण भुजा - Common Side

साधारण उत्पादक - Common Factor

संयोग नियम - Associative Law

सूत्र - Formula

समरेख - Collinear
समद्विबाहु त्रिभुज़ - Isosceles Triangle
समबाहु त्रिभुज - Equilateral Triangle
समद्विभाजित करना - Bisect
समद्विभाजक - Bisector
समानान्तर सरल रेखा - Parallel Line
समीकरण - Equation
समाधान(हल) - Solution
समानुपात - Proportion
समाधान करना (हल करना) - Solve
समानान्तर चतुर्भुज - Parallelogram
समकोण - Right Angle
सम्पूरक कोण - Supplementary Angle
सन्निहित कोण - Adjacent Angle
सूक्ष्म कोण(न्यून कोण) - Acute Angle
स्थूल कोण - Obtuse Angle
सरल करना - Simplify
सरल रेखा - Straight Line
सरलरेखांश - Straightline Segment
सरल समानुपाती - Directly Proportional
स्वत:सिद्ध - Axiom
स्तंभ चित्र - Bar graph
स्थानांक - Coordinates
स्वीकार्य - Postulate
सर्वांगसमता/ सर्वसमता - Congruence / Congruents
सुषम बहुभुज - Regular Polygon
प्रमाणित - Proved
शीर्ष बिन्दु - Vertex
शीर्ष कोण - Vertical Angle
प्रतिशत - Percentage
क्षेत्रफल - Area
X-कक्ष - X-axis
Y-कक्ष - Y-axis

आपका पन्ना

यह पुस्तक तुम्हें कैसी लगी ? लिखकर, अंकित करके समझाओ :

आपका पन्ना

यह पुस्तक तुम्हें कैसी लगी ? लिखकर, अंकित करके समझाओ :

शिक्षण परामर्श

- राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रुपरेखा (NCF) - 2005 का परामर्श यह है कि शिक्षार्थी अपने विद्यालय जीवन और विद्यालय के बाहर के जीवन के साथ सर्वदा सम्पर्क स्थापित कर सके। यह नीति निर्देश करता है कि विद्यार्थी की शिक्षा केवल पुस्तक तक ही सीमित न रह जाय। केवल पुस्तक से शिक्षित होने पर विद्यार्थी का शिक्षा में विद्यालय, घर तथा समाज के अन्दर एक रिक्तता की रचना होती है। राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रुपरेखा के इस मुख्य नीति को आधार मानकर वर्तमान पाठ्यक्रम, पाठ्यसूची एवं पाठ्य पुस्तक को बनाया गया है। यह नीति यह भी परामर्श देती है कि विद्यार्थी की शिक्षा केवल विषय केन्द्रिक न हो। विभिन्न विषयों में जितना सम्भव हो वह सम्पर्क खोज पाये।

- आशा किया जा सकता है, शिक्षक/शिक्षिकाएं जब उस पाठ्य पुस्तक को व्यवहार करेंगे जितना सम्भव हो इस नीति एवं नीचे के परामर्शों का पालन करेंगे।

- वर्तमान समय में शिक्षा शिक्षार्थी केन्द्रिक है। शिक्षक/शिक्षिकाएं केवल सहायक है। अर्थात् शिक्षार्थी जो जन्म के बाद से ही घर, परिवेश, समाज से बहुत सीख जाता है शिक्षक/शिक्षिका यह ख्याल रखेंगे। किसी विषय के बारे में बतलाने से पहले शिक्षार्थी को पहले के अर्जित ज्ञान की ओर ख्याल रखकर सहायता करेंगे। शिक्षार्थी की चिन्ता या सोच किसी प्रकार रुक न जाय, वह स्वतंत्र ढंग तथा सोच के साथ जाय इस तरफ सर्वदा ध्यान रखेंगे।

- पाठ्य-पुस्तक शिक्षार्थी के शिक्षा में मात्र एक सहायक है। एक मात्र सहायक नहीं। शिक्षार्थी की शिक्षा आनन्ददायक हो इसके लिए विभिन्न प्रकार के शिक्षण उपकरण की सहायता लेने की जरुरत है।

- गणित की शिक्षा, शिक्षार्थी के परिचित परिवेश से कुछ वास्तव समस्या तैयार करके गणित के किसी अध्याय को शुरु करेंगे। उसके बाद सम्भव होने पर सक्रियता आधारित काम (Activity) के द्वारा उस अध्याय के विषय में शिक्षार्थी के मन में तर्क युक्त धारणा का जन्म दें। शिक्षार्थी की सोच तथा तर्क की स्वच्छता आने के पश्चात् ही वह विमूर्त को लेकर काम करता है।

- शिक्षक/शिक्षिका यह ध्यान रखे कि शिक्षार्थी पुस्तक से स्वयं कितने दूर तक एक अध्याय को सीख पाता है। जब वह उस अध्याय के किसी एक हिस्से को सीखने में बाधा प्राप्त करता है तभी वे उसे धीरे-धीरे सहायता करें जिससे वह समस्या के समाधान का रास्ता स्वयं खोज पाये।

- शिक्षक/शिक्षिका किसी अध्याय के विषय में शिक्षार्थी को इस प्रकार की कहानी कहेंगे जिससे शिक्षार्थी शुरु में कुछ समझ न पाये कि उसे कुछ सीखाया जा रहा है।

- दलगत शिक्षण शिक्षार्थी के लिए सीखन में यथेष्ट सहायक होता है। शिक्षक/शिक्षिका श्रेणी कक्ष में इसका ध्यान रखेंगे।

- वर्तमान शिक्षा में शिक्षार्थी को पाठदान या कुछ तत्थों की बतलाना नहीं, शिक्षार्थी ज्ञान का गठन कर सके इस तरह शिक्षक/शिक्षिका ध्यान रकेंगं। शिक्षार्थी के ज्ञान का गठित कर सकने से ही वह धीरे-धीरे अनेकों विषयों में से गणित खोजने लगेगा एवं गणित विषय उसके लिए आनन्ददायक बन जायेगा।

- शिक्षार्थी मन ही मन को सवाल कर सके (मानसांक) इस तरफ शिक्षक/शिक्षिका विशेष ध्यान रखेंगे। गणित के प्रत्येक अध्याय से शिक्षार्थी यदि मानसांक करना सीख ले तो शिक्षार्थी की सोच, तर्क तथा गणना करने की क्षमता बहुत जल्दी हो जायेगी।

- शिक्षार्थी गणित के किसी अध्याय को सीखते समय शिक्षक/शिक्षिका उस अध्याय के ऊपर यदि ऐसी एक तालिका बनाये जिससे उस अध्याय से शिक्षार्थी को सीखने के लिए जितनी सम्भावनायें होती है सब सीखता है। जैसे गुणनखण्ड के क्षेत्र में—

  1) एक संख्या को शून्य छोड़कर गुणनखण्ड की धारणा।
  2) वास्तविक रुप से गुणनखण्ड के प्रयोग की धारणा।
  3) एक संख्या के कितने गुणनखण्ड हो सकते है उसकी धारणा।
  4) दो संख्यायों के साधारण गुणनखण्ड की धारणा।
  5) दो संख्याओं का साधारण गुणनखण्ड कितना हो सकता है उसकी धारणा।
  6) लघुतम साधारण गुणनखण्ड की धारणा।
  7) वास्तव में साधारण गुणनखण्ड तथा लघुत्तम साधारण गुणनखण्ड के प्रयोग की धारणा।
  8) एक संख्या के किसी गुणनखण्ड से कौन-कौन गुणनखण्ड पाये जा सकते है इसकी धारणा।
  9) बीजगणितीय संख्या राशियों की धारणा।
  10) बीजगणितीय संख्या राशियों के मौलिक उत्पादक की धारणा।
  11) बीजगणितीय संख्या राशियों के लघुतम साधारण गुणनखण्ड की धरणा।

- किसी भी अध्याय में कुछ Open ended प्रश्न रहना आवश्यक।

  a) दो समान भिन्नों के बीच की चार मूलद संख्या(Rational Number) लिखों।
  b) एक बीजगणितीय द्विपदी संख्या राशियों को लिखकर उनका घन निर्णय करना।
  c) दो सम्पर्क लिखो जो परस्पर व्यस्त समानुपाती है।
  d) तीन सरल रेखांश की लम्बाई लिखो जिनके द्वारा त्रिभुज बनाना सम्भव है।

- इस प्रकार की संभावना शिक्षक/शिक्षिका स्वयं और बनाये तो शिक्षार्थी के सभी प्रकार के निरविच्छिन्न मूल्यांकन (CCE) में सुविधा होगी।

- शिक्षार्थी के सामने किसी प्रकार के गणितीय परिभाषा या चिन्ह निर्देश आकार में पहले से ही नहीं लाना अच्छा है जो शिक्षार्थी के सीखने में पहले ही प्रतिबंधकता की रचना करते है। जैसे शिक्षार्थी को पहले ही $\ngtr$ चिन्ह न बताकर यदि शिक्षक/शिक्षिका कुछ कहानियों के माध्यम से अधिक नहीं की धारणा दें। जैसे- रुपा के बक्से में पेंसिल की संख्या

तथा नसिमा के बक्से में पेंसिल की संख्या 5 से अधिक नहीं, तो शिक्षार्थी का शिक्षण अच्छा होता है। ऐसे और भी अधिक नहीं की कहानी कहने के पश्चात् नहीं बात को यदि वे गणितीय चिन्ह में रुपान्तरित करे तो शिक्षार्थी के लिए समझने में सुविधा होगी।

- गणित की किसी भी प्रक्रिया को शिक्षार्थी न समझकर मुखस्थ याद न कर ले। प्रत्येक प्रक्रिया को वह युक्ति एवं तर्क से समझ सके, क्यों होता है। शिक्षक/शिक्षिका इस तरफ विशेष ध्यान रखें। जैसे, जोड़, घटाव, गुणा के क्षेत्र में काम शुरु दाहिने तरफ से लेकिल भाग के क्षेत्र में बायें से शुरु होता है। शिक्षार्थी सक्रियता आधारित काम के भीतर जाकर इस प्रकार क्यों होता है वह तर्क की सहायता से समझ सके।

- श्रेणी कक्ष में शिक्षक/शिक्षिका द्वारा दिया गया सवाल कोई शिक्षार्थी जल्दी-जल्दी हल करे, चुपचाप बैठे न रहे। जो शिक्षार्थी जल्दी ही अध्याय को समझ कर आगे जाता है शिक्षक/शिक्षिका उसको और कठिन से कठिनतर तर्क पर आधारित सवाल देकर आगे बढ़ा देगें और जो धीरे-धीरे आगे जा रहा है उसके धीरे-धीरे तर्क का विकास करके उस अध्याय में जो सामर्थ्य की कामना है उस पर पहुँचने में सहायता करें।

- उच्च-प्राथमिक शिक्षा में शिक्षार्थी गणित के विभिन्न शाखा जैसे अंक गणित, बीजगणित, ज्यामिति तथा राशि विज्ञान की धारणा करना शुरु करें। ये सभी शाखाये अलग नहीं, उनके बीच बहुत समानता है यह धारणा शिक्षार्थी कर सके। जैसे बीजगणित, अंक गणित का साधारण रुप है। ज्यामिति में एक सरल रेखा के ऊपर **x** एक बिन्दु कहने पर **x** का मान असंख्य है सकता है अर्थात् ज्यामिति के साथ बीजगणित का सम्पर्क है। इन सब धारणाओं के द्वारा वे गणित के शाखाओं की चर्चा करेंगे, एक शाखाओं को अगल नहीं मानेंगे। तब गणित विश्रय उनके लिए पास और भी आनन्ददायक हो जायेगा।

- श्रेणी कक्ष तथा वास्तव की समस्याओं को समझकर शिक्षक/शिक्षिका स्वयं शिक्षार्थी को तर्कपूर्ण आनन्ददायक शिक्षा के लिए पाठ्य-पुस्तक को किस तरह से और भी अच्छी तरह से किस प्रकार व्यवहार किया जा सकता है उसका भी परामर्श देंगे।

पाठ परिकल्पना

महीना	विषय
January (जनवरी)	1. पूर्व पाठों की पुनरावृति
February (फरवरी)	2. पाई चित्र
	3. परिमेय संख्याओं की धारणा
	4. बहुपदी संख्याराशियों का गुणा और भाग
March (मार्च)	5. घनफल निर्णय
	6. पूरक कोण, सम्पूरक कोण और संलग्न कोण
April (अप्रैल)	7. सम्मुख कोण की धारणा
	8. समानान्तर सरल रेखा और तिर्यक रेखा के गुण तिर्यक
	9. त्रिभुज के दो भुजाओं एवं उनके विपरीत कोणो का सम्बंध
May (मई)	10. त्रिराशिक (समानुपात)
	11. प्रतिशत
June (जून)	12. मिश्रण
	13. बीजगणितीय संख्या राशियों का उत्पादक में विश्लेषण।
July (जुलाई)	14. बीजगणितीय संख्या राशियों का म.स.प. एवं ल.स.प.
	15. बीजगणितीय संख्या राशियों का सरलीकरण
August (अगस्त)	16. त्रिभुज के कोणों और भुजाओं के बीज सम्पर्क की जाँच
	17. समय और कार्य
September (सितम्बर)	18. लेखचित्र
	19. समीकरण गठन और समाधान
	20. ज्यामितिक प्रमाण
October (अक्टूबर)	21. त्रिभुज बनाना
	22. समानान्तर सरल रेखाओं का अंकन
November (नवम्बर)	23. प्रदत्त सरल रेखा खण्ड को बराबर तीन, पांच भागों में विभक्त करना
December (दिसम्बर)	24. मजेदार अंक