

অঙ্ক নমুনা প্রশ্নপত্র – ৩
শিক্ষক :- মলয় কুমার ঘোষ
বালিগঞ্জ গভর্নমেন্ট হাই স্কুল

বিভাগ - ক 1. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও (বিকল্প প্রশ্নগুলি লক্ষণীয়) :

(a) শূন্যস্থান পূরণ করো :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ হলে } A-2I \text{ এর মান হবে } \text{---}.$$

$$\text{Ans. } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \therefore A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) সঠিক উত্তরটি লেখ :

$$1 + \log_e^3 + \frac{(\log_e^3)^2}{2} + \frac{(\log_e^3)^3}{3} + \dots \text{ শ্রেণির যোগফল হবে } \text{---}$$

$$(i) \log_e^3 \quad (ii) \frac{1}{3} \quad (iii) 3 \quad (iv) e^3$$

$$\text{Ans. } 1 + \log_e^3 + \frac{(\log_e^3)^2}{2} + \frac{(\log_e^3)^3}{3} + \dots \\ = e^{\log_e^3} = 3.$$

Ans. (iii).

(c) $9x^2 + 5y^2 = 30y$ উপবৃত্তের পরাক্ষের দৈর্ঘ্য হল ---

$$(i) 6 \quad (ii) 2\sqrt{5} \quad (iii) \sqrt{6} \quad (iv) \sqrt{5}$$

$$\text{Ans. } 9x^2 + 5y^2 = 30y \\ \text{or, } 9x^2 + 5(y^2 - 6y + 9) = 45 \\ \text{or, } 9x^2 + 5(y - 3)^2 = 45$$

$$\text{or, } \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{(y-3)^2}{(3)^2} = 1$$

∴ Length of major axis = 2 x 3 = 6 units.

Ans. (a)

অথবা, $x = ay^2 + by + c$ পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য হল --

$$(i) \frac{a}{4} \quad (ii) \frac{b}{3} \quad (iii) \frac{1}{a} \quad (iv) \frac{1}{4a}$$

$$\text{Ans. } x = ay^2 + by + c$$

$$\therefore y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a} = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow (y + \beta)^2 = \frac{1}{a}(x - \alpha) \text{ form. } \therefore \text{Length of Latus rectum} = \frac{1}{a} \text{ units}$$

Ans. (iii).

(d) নীচের উত্তরটি সত্য না মিথ্যা উল্লেখ করো :

$$y = \sin^{-1}(3x - 4x^3) + \cos^{-1}(4x^3 - 3x) \text{ হলে } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ হবে।}$$

$$\text{Ans. } y = \sin^{-1}(3x - 4x^3) + \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$$

$$\therefore y = 3 \sin^{-1}x + 3 \cos^{-1}x = 3\pi/2$$

$$\text{or, } \frac{dy}{dx} = 0.$$

∴ Statement is true.

$$\text{অথবা, } y = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} \text{ হলে } \frac{dy}{dx} \text{ এর মান হবে --}$$

$$(i) \frac{2}{1+x^2} \quad (ii) \frac{2x}{1+x^2} \quad (iii) \frac{1}{1+x^2} \quad (iv) -\frac{x}{1+x^2}$$

$$\text{Ans. } y = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = 2 \tan^{-1}x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2} \text{ Ans. (i).}$$

(e) শূন্যস্থান পূরণ করো :

$$y = \cos^2x - \sin^2x \text{ হলে } \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right]_{x=0} = \dots\dots\dots$$

Ans. $y = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$\therefore \frac{dy}{ds} = 2 \sin 2x$ or, $\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \cos 2x$ $\therefore \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = -4.$

(f) $\int \frac{\sin(\log x)}{x} dx$ এর মান নীচের কোনটি ?

(i) $-\cos \log|x| + c$ (ii) $\cos \log|x| + c$ (iii) $\sin \log|x| + c$ (iv) $-\sin \log|x| + c$

Ans. $\int \frac{\sin(\log x)}{x} dx = \int \sin z dz$ [Where $\log x = z \therefore \frac{1}{x} dx = dz$]

$= -\cos z + c = -\cos(\log(x)) + c$

Ans. (i)

অথবা, শূন্যস্থান পূরণ কর : $\int e^x \sin(e^x) dx$ এর মান হবে -----

Ans. $\int e^x \sin(e^x) dx = \int \sin z dz$ [$e^x = z \therefore e^x dx = dz$]

$= -\cos(z) + c = -\cos(e^x) + c.$

(g) নিচের উত্তরটি সত্য না মিথ্যা উল্লেখ করো : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log(\tan x) dx = \pi$

Ans. $I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \log(\tan x) dx$

$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \sin 2(\pi/2 - x) \log(\tan(\pi/2 - x)) dx$

$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \cot x dx$

$\therefore 2I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x [\log \tan x \cot x] dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \times 0 = 0$

\therefore Answer is not true.

অথবা, নীচের উত্তরটি সত্য না মিথ্যা উল্লেখ করো : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3 \sin^4 x dx = 0$

Ans. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^3 \sin^4 x dx$

$$\text{Let } f(x) = x^3 \sin^4 x \quad \therefore f(-x) = -x^3 \sin^4 x$$

$$\therefore f(x) \text{ is odd function} \quad \therefore \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx = 0.$$

(h) শূন্যস্থান পূরণ করো : $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$ এর মান হবে -----

$$\begin{aligned} \text{Ans. } \int_0^{100\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx &= \int_0^{100\pi} \sqrt{2}(\cos x) dx \\ &= 100\sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos x dx = 100\sqrt{2} [\sin x]_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

(i) শূন্যস্থান পূরণ করো :

একটি গতিশীল কণা সরলরেখা বরাবর t সেকেন্ডে $(5t^2 - 2t)$ সেমি দূরত্ব যায়। $t = 3$

সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ হবে -----

$$\text{Ans. } S = 5t^2 - 2t$$

$$\text{or, } \frac{ds}{dt} = 10t - 2. \quad \therefore \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=3} = 10 \times 3 - 2 = 28 \text{ cm/sec.}$$

\therefore Velocity after 3 sec is 28 cm/sec.

(j) শূন্যস্থান পূরণ করো : $y = (1 - x)(2 + 3x)$ এর চরম মান হবে ----- ।

$$\begin{aligned} \text{Ans. } y &= (1 - x)(2 + 3x) \\ &= 2 + 3x - 2x - 3x^2 \\ &= 2 + x - 3x^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 6x = 0 \quad [\text{for maximum}]$$

$$\therefore x = 1/6.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6 < 0 \quad \therefore y \text{ has max. value}$$

$$y_{\max} = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{12}.$$

বিভাগ - খ 2. নির্দেশ অনুযায়ী নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

2 x 2 = 4

(a) যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(i) একটি তাসের প্যাকেটে অবিন্যস্তভাবে ভরা 52 টি বিভিন্ন তাস থেকে যথেষ্টভাবে একটি তাস টানা হল। তাসটি ইসকাবন (Spades) বা সাহেব হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

Ans. A be the event of getting king

B be the event of getting spades.

$$\therefore x(A) = 13, x(B) = 4.$$

$$\text{Now, } x(S) = 52. \quad n(A \cap B) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}. \end{aligned}$$

(ii) $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \alpha (-1 < x \leq 1)$ হলে দেখাও যে,

$$x = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \alpha$$

Ans. $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \infty$

$$\text{or, } y = \log_e(1+x) \Rightarrow 1+x = e^y$$

$$\text{or, } x = e^y - 1 = \left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \infty \right) - 1$$

$$= y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \infty$$

(iii) $A - 2B = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ এবং $A - 3B = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 4 & -13 \end{pmatrix}$ হলে A ও

B ম্যাট্রিক্স দুটি নির্ণয় করো।

Ans: $A - 2B = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}; A - 3B = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 4 & -13 \end{pmatrix}$

$$\therefore (A - 2B) - (A - 3B) = \begin{pmatrix} -18 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} -18 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Putting B in 1st case you get A. (Do yourself)

(b) যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2 x 1 = 2

(i) $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 119 = 0$ পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

Ans. $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 119 = 0$

or, $9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 - 2y + 1) - 9 + 16 - 119 = 0$

or, $9(x + 1)^2 - 16(y - 1)^2 = 112$

$$\frac{(x + 1)^2}{\frac{112}{9}} - \frac{(y - 1)^2}{\frac{112}{16}} = 1$$

\therefore Length of Latus rectum = $2 \frac{b^2}{a}$

$$= 2 \cdot \frac{112/16}{\sqrt{\frac{112}{9}}} \text{ units}$$

$$= \frac{\sqrt{112} \times 3}{8} \text{ units}$$

(ii) $y^2 - 6y - 8x + 25 = 0$ অধিবৃত্তের নাভিস্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

Ans. $y^2 - 6y - 8x + 25 = 0$

or, $y^2 - 6y + 9 = 8x - 25 + 9$

or, $(y - 3)^2 = 8x - 16$

or, $(y - 3)^2 = 8(x - 4) \therefore a = 2$

Focus $(\alpha + a, \beta) = (4 + 2, 3) = (6, 3)$

(c) যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2 x 1 = 2

(i) $x^p, y^q = (x+y)^{p+q}$ হলে দেখাও যে $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

Ans. $x^p \cdot y^q = (x + y)^{p+q}$

$\Rightarrow p \log x + q \log y = (p + q) \log (x + y)$

= Differential with respect to x,

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\text{or, } \left(\frac{q}{y} - \frac{p+q}{x+y} \right) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{p+q}{x+y} - \frac{p}{x} \right)$$

$$\text{or, } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad [x+y \neq 0]$$

(ii) $y = x^2 \cdot \log x$ হলে $x = 1$ বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান নির্ণয় করো।

Ans. $y = x^2 \log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x} + 2x \log x = x + 2x \log x = x(1 + 2 \log x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x \left(\frac{2}{x} \right) + (1 + 2 \log x)$$

$$\therefore \left. \frac{dy^2}{dx^2} \right|_{x=1} = 2 + 1 + 2 \log 1 = 3.$$

Ans. 3.

(d) যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2 x 1 = 2

(i) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x-3}}$ এর মান নির্ণয় করো।

Ans. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x-3}} \quad x-3 = z^2 \therefore x-2 = z^2 + 1$

$$dx = 2zdz$$

$$= \int \frac{2zdz}{(z^2+1)\sqrt{z^2}} = 2 \int \frac{dz}{z^2+1^2} = 2 \tan^{-1}z + c$$

$$= 2 \tan^{-1}\sqrt{x-3} + c$$

(ii) $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \cdot e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx$ এর মান নির্ণয় করো।

Ans. $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} e^{x+\frac{1}{x}} dx \quad x + \frac{1}{x} = z$

$$\left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx = dz$$

$$= \int_2^{5/2} e^z dz \quad \therefore \frac{x^2-1}{x^2} dx = dz$$

$$= [e^z]_2^{5/2} = e^{5/2} - e^2$$

x	1	2
z	2	5/2

(e) যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 2 x 1 = 2

(i) a ও b ধ্রুবকদ্বয়কে অপনয়ন করে $y = a \log x + b$ থেকে অবকল সমীকরণ গঠন করো।

Ans. $y = a \log x + b$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} \quad \text{or,} \quad x \frac{dy}{dx} = a$$

$$\text{or, } x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{which is the differential equation}$$

(ii) সমাধান করো : $ydx - xdy = xy dx$.

Ans. $ydx - xdy = xydx$

$$\text{or, } \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{xy}{y^2} dx$$

$$\text{or, } \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)} = dx \quad \therefore \int \frac{d(x/y)}{(x/y)} = x + c$$

$$\text{or, } \ln \left| \frac{x}{y} \right| = x + c.$$

(f) যে কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 2 x 3 = 6

(i) x-এর কোন্ মানের জন্য $f(x) = e^x$ এবং $g(x) = 2x + 2$ অপেক্ষকদ্বয়ের x-এর সাপেক্ষে পরিবর্তনের হার সমান ?

Ans. $f(x) = e^x, y(x) = 2x + 2$

$$f'(x) = e^x, g'(x) = 2$$

$$\therefore e^x = 2 \Rightarrow x = \log_e 2.$$

(ii) x -এর সকল ধনাত্মকমানের জন্য $f(x) = (x-1)e^x + 1$ অপেক্ষক ধনাত্মক।

Ans. $f(x) = (x - 1) e^x + 1$

$$f'(x) = (x - 1) e^x + e^x = x e^x > 0 \text{ for } x > 0.$$

$$\therefore f(x) > f(0) \text{ Now, } f(0) = 0.$$

$$\therefore f(x) > 0. \text{ (Proved)}$$

(iii) $y = 2x^2 - 6x - 4$ বক্রের কোন বিন্দুতে স্পর্শক x -অক্ষের সমান্তরাল ?

Ans. $y = 2x^2 - 6x - 4$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 6$$

Since tangent at (x, y) is parallel to x -axis

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore y = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) - 4 = 2 \times \frac{9}{4} - 9 - 4$$

$$= \frac{9}{2} - 13 = -\frac{17}{2}$$

$$\therefore \text{Req. point } \left(\frac{3}{2}, -\frac{17}{2}\right).$$

(iv) $y^2 = 4x$ অধিবৃত্ত, $x = 1$ ও $x = 2$ সরলরেখা দ্বয় ও x -অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ

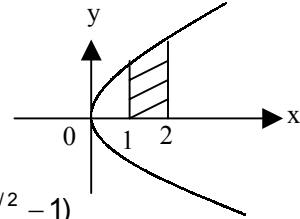
অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

Ans. $y^2 = 4x, x = 1, x = 2$

$$\therefore \text{Req. Area} = \int_1^2 \sqrt{4x} \, dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 = 2 \times \frac{2}{3} [2^{3/2} - 1] = \frac{4}{3} (2^{3/2} - 1)$$

$$= \frac{4}{3} (2^{3/2} - 1).$$



(v) একটি কণা সরলরেখা বরাবর গতিশীল। কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে t সময়ে অতিক্রান্ত

দূরত্ব $x = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$. দূরত্বের মাধ্যমে t সময়ে কণাটির ত্বরণ নির্ণয় করো।

Ans. $x = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$

$$\frac{dx}{dt} = -6 \sin 2t + 8 \cos 2t$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -12 \cos 2t - 16 \sin 2t \\ &= -4 (3 \cos 2t + 4 \sin 2t) = -4x. \\ \therefore \text{Acc}^n &= -4x\end{aligned}$$

বিভাগ - গ 3. নির্দেশ অনুযায়ী নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

(a) যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4 x 2 = 8

(i) ক্রমিক পদ্ধতিতে সমাধান করো :

$$3x + y + z = 10, x + y - z = 0, 5x - 9y = 1.$$

$$\text{Ans. } 3x + y + z = 10$$

$$x + y - z = 0$$

$$5x - 9y = 1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -9 & 0 \end{vmatrix} = -36 - 10 = -46 \neq 0.$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x & & & \\ 10 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 1 & -9 & 0 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & & & \\ 3 & 10 & 1 & \\ 1 & 0 & -1 & \\ 5 & 1 & 0 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & & & \\ 3 & 1 & 10 & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 5 & -9 & 1 & \end{vmatrix} = \frac{1}{-46}$$

Solving you get x, y, z (Do yourself)

(ii) চার জন ব্যক্তির জন্মদিন বৎসরে বিভিন্ন তারিখে হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(365 দিনে বৎসর ধরে নিতে পারো)।

$$\text{Ans. } P(A) = \frac{{}^{365}C_1 \times {}^{364}C_1 \times {}^{363}C_1 \times {}^{362}C_1}{{}^{365}C_4}$$

(iii) n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ($n \geq 1$) হলে গাণিতিক আরোহণ পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করো যে,

$$4^n - 3n - 1 \text{ রাশিটি সর্বদা } 9 \text{ দ্বারা বিভাজ্য।}$$

$$\text{Ans. } P(n) : 4^n - 3n - 1 = 2^{2n} - 3n - 1$$

$$P(1) = 4 - 3 - 1 = 0$$

$$P(2) = 4^2 - 3 \times 2 - 1 = 16 - 6 - 1 = 9$$

∴ P(1), P(2) is true.

Let, $P(m) = 4^m - 3m - 1$

$$P(m+1) = 4^{m+1} - 3(m+1) - 1 = 4 \cdot 4^m - 3m - 4$$

$$= 4 \cdot 4^m - 12m - 4 + 9m = 4(4^m - 3m - 1) + 9m$$

∴ P(m+1) is divisible by 9.

(b) যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$4 \times 2 = 8$$

(i) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $(at_1^2, 2at_1)$ ও $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা-এর

সমীকরণ নির্ণয় করো। ঐ জ্যা নাভিগামী হলে দেখাও যে, $t_1 \cdot t_2 = -1$

Ans. Equation of the Chord is

$$\frac{y - 2at_1}{2at_1 - 2at_2} = \frac{x - at_1^2}{at_1^2 - at_2^2}$$

If it passes through (a, 0) then

$$\frac{0 - 2at_1}{t_1 - t_2} = \frac{a - at_1^2}{at_1^2 - at_2^2}$$

$$\text{or, } \frac{-2t_1}{1} = \frac{1 - t_1^2}{t_1 + t_2} \quad (t_1 \neq t_2).$$

$$\Rightarrow t_1 t_2 = -1.$$

(ii) যে উপবৃত্তের শীর্ষদ্বয় $(-1, 2)$ ও $(9, 2)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{4}{5}$ তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

Ans. Vertices are $(-1, 2)$ & $(9, 2)$

ie., y-coordinates are equal

$$\therefore \text{Centre} \left(\frac{-1+9}{2}, \frac{2+2}{2} \right) = (4, 2)$$

Major axis is parallel to x-axis.

$$\therefore \text{Eqn. } \frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$$

$$2a = \sqrt{(9+1)^2 + b^2} = 10 \therefore a = 5$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow b^2 = 5 \left(1 - \frac{16}{25} \right) = 5 \times \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \text{Req. equation } \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9/5} = 1.$$

(iii) $16x^2 - 9y^2 = 144$ পরাবৃত্তের নাভিদ্বয়, উৎকেন্দ্রতা ও নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

Ans. $16x^2 - 9y^2 = 144.$

$$\text{Or, } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$a^2 = 9, \quad b^2 = 16. \quad \therefore e = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Foci} = (\pm ae, 0) = \left(\pm 3 \times \frac{5}{3}, 0 \right) = (\pm 5, 0).$$

Equation of directions : $x = \pm a/e$

$$x = \pm \frac{3}{5/3} = \pm \frac{9}{5}$$

$$\text{or, } 5x \pm 9 = 0.$$

(c) যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4 x 2 = 8

(i) প্রমাণ করো : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} + 1)$

Ans. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{\sin x + \cos x}$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x} dx \quad \left[\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \right]$$

$$\therefore 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \operatorname{cosec}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) d\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log \tan \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right]_0^{\pi/2} + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} + 1).
\end{aligned}$$

(d) যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4 x 2 = 8

(i) সমাধান করো : $y - x \frac{dy}{dx} = 2\left(1 + x^2 \frac{dy}{dx}\right)$ দেওয়া আছে $y = 1$ যখন $x = 1$.

Ans. $y - x \frac{dy}{dx} = 2\left(1 + x^2 \frac{dy}{dx}\right)$

$$y - 2 = (x + 2x^2) \frac{dy}{dx}$$

$$\text{or, } \frac{dx}{2x^2 + x} = \frac{dy}{y - 2}$$

$$\text{or, } \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \ln |y - 2| + c.$$

$$\text{or, } \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \ln |y - 2| + c.$$

$$\text{or, } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right| = \ln |y - 2| + c$$

Putting $x = 1, y = 1$, we get the particular solution. (Do Yourself).

(ii) সমাধান করো : $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x - 2y - 2$ দেওয়া আছে $y = 1$ যখন $x = 1$.

Ans. $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x - 2y - 2$

$$\text{Or, } \frac{dy}{dx} = e^{4x} \cdot e^{-2y} \cdot e^{-2}$$

$$e^{2y} dy = e^{4x} \cdot e^{-2} dx.$$

$$\text{Or, } \frac{e^{2y}}{2} = \frac{e^{4x-2}}{4} + c$$

Putting $x = 1, y = 1$ we get the particular solution (Rest Do Yourself).

(iii) সমাধান করো : $\frac{d^2y}{dx^2} = x - \cos x$ দেওয়া আছে $y = 1, \frac{dy}{dx} = 0$ যখন $x = 0$

$$\text{Ans. } \frac{d^2y}{dx^2} = x - \cos x$$

$$\text{Or, } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \sin x + c$$

$$\text{Or, } 0 = 0 - \sin 0 + c \quad \therefore c = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \sin x$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{2} - \sin x \right) dx$$

$$y = \frac{x^3}{6} + \cos x + c$$

$$1 = 0 + \cos 0 + c \quad \therefore c = 0$$

$$y = \frac{x^3}{6} + \cos x$$

(e) যে কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4 x 4 = 16

(i) $lx + my + n = 0$ সরলরেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করলে দেখাও যে, $am^2 = n1$.

$$\text{Ans. } y^2 = 4ax$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$\text{or } \frac{dy}{dx} \Big|_{(x_1, y_1)} = \frac{2a}{y_1}$$

\therefore Equation of the tangent at (x_1, y_1) is

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

$$\text{or, } yy_1 = 2ax + 2ax_1 \quad \dots(1)$$

$$lx + my + n = 0 \quad \dots(2)$$

Comparing (1) and (2)

$$\frac{2a}{l} = -\frac{y_1}{m} = \frac{2ax_1}{n}$$

$$\therefore x_1 = n/l, \quad y_1 = -\frac{2am}{l}$$

$$\therefore y_1^2 = 4ax_1 \Rightarrow \left(-\frac{2am}{l}\right)^2 = 4a \cdot \frac{n}{l}$$

$$\text{or, } \frac{4a^2m^2}{l^2} = \frac{4an}{l} \quad \therefore am^2 = nl. \text{ Proved.}$$

(ii) x-অক্ষের উপরে $y^2 = 4x$ অধিবৃত্ত $x-4 - 4\cos\theta$, $y = 4\sin\theta$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

Ans. $(x - 4) = 4 \cos \theta$, $y = 4 \sin \theta$

$$\Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 4^2 \quad \dots(1)$$

\therefore Circle of centre (4, 0) and radius = 4 units

$$y^2 = 4x \quad \dots(2)$$

$$\text{Solving : } (x - 4)^2 + 4x = 16$$

$$\text{Or, } x^2 - 8x + 16 + 4x = 16$$

$$\text{Or, } x(x - 4) = 0 \quad \therefore x = 0, 4.$$

$$\text{Req. area} = \int_0^4 \sqrt{16 - (x - 4)^2} dx - \int_0^4 \sqrt{4x} dx$$

Calculating you get the result (Do yourself).

(iii) একটি ট্রেন হাওড়া থেকে ছেড়ে খড়গপুর গিয়ে থাকে। প্রথমে তার বেগ বেড়ে সর্বোচ্চ বেগ v হয়। তারপর বেগ কমতে থাকে। হাওড়া থেকে খড়গপুর যেতে ট্রেনটির t সময় লাগলে প্রমাণ করো ঐ দুই স্টেশনের মধ্যে দূরত্ব $\frac{1}{2} vt$.

Ans. $\frac{dv}{dt} = f \Rightarrow dv = f dt$

$$\int_0^v dv = f \int_0^{t_1} dt \Rightarrow v = ft_1$$

Again, $\frac{ds}{dt} = v = ft$

$$\int_0^{s_1} ds = f \int_0^t t dt \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} f t_1^2 = \frac{1}{2} vt_1$$

Again, Again, $0 = V - ft_2 \Rightarrow V = ft_2$

$$S_2 = Vt_2 - \frac{1}{2} ft_2^2 = Vt_2 - \frac{1}{2} Vt_2 = \frac{1}{2} Vt_2$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} V(t_1 + t_2)$$

$\therefore S = \frac{1}{2} Vt$ (Proved).

(iv) একটি পাথরের টুকরোকে কোনো উচ্চতায় স্থিরাবস্থা থেকে ভূপৃষ্ঠের উপর ফেলা হল। শেষ h সেমি যেতে পাথরটির t সেকেন্ড সময় লাগলে প্রমাণ করো যে, পাথরটির ভূপৃষ্ঠে আসতে মোট $\left(\frac{t}{2} + \frac{h}{gt}\right)$ সেকেন্ড সময় লাগে।

Ans. Do yourself.

(v) $4ax + 3by = 12c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের অভিলম্ব হলে দেখাও যে,

$$5c = a^2 e^2$$

Ans. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(x_1, y_1)} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

Equation of Normal

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$$

$$\Rightarrow (b^2 x_1) y - b^2 x_1 y_1 = (a^2 y_1) x - a^2 x_1 y_1$$

$$\text{or, } (a^2 y_1) x - (b^2 x_1) y = (a^2 - b^2) x_1 y_1 \dots(1)$$

$$4ax + 3by = 12 \quad \dots(2)$$

Comparing we get $5c = a^2 e^2$.

বিভাগ - ঘ 4. নির্দেশ অনুযায়ী নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

6 x 4 = 24

(a) (i) প্রমাণ করো যে, $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^{2n}$ বিস্তৃতির মধ্যমপদের মান

$$\frac{1.3.5\dots\dots(2n-1)}{n!}$$

3 + 3

Ans. $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^{2n} \therefore t_{n+1}$ term is middle term.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= {}^{2n}C_n x^n \left(\frac{1}{2x}\right)^n = {}^{2n}C_n \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots 2.1}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{\{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4.2\} \{(2n-1)(2n-3)\dots 1.3\}}{n!} \times \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{2^n \cdot n! \{1.3.5\dots\dots(2n-1)\}}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1.3.5\dots\dots(2n-1)}{n!} \text{ (Proved)} \end{aligned}$$

(ii) প্রমাণ করো :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+2}{4^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1+2+2^2}{4^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1+2+2^2+2^3}{4^4} + \dots \alpha = \log_e \frac{3}{2}$$

$$\text{Ans. } t_n = \frac{1}{n} \times \frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{n} \times \frac{2^n - 1}{4^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \right) \\
t_1 &= \frac{1}{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right), \quad t_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right), \quad t_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} \right) \\
\therefore \text{Exp.} & \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \dots \right] \\
& - \left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{3} + \dots \right] \\
&= -\log \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \log \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \log \left(\frac{3}{4} \right) - \log \frac{1}{2} \\
&= \log \left(\frac{3/4}{1/2} \right) = \log \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(b) (i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ করো যে, $A^2 - 6A + 17I = 0$ এখান থেকে A^{-1} এর

মান নির্ণয় করো।

3 + 3

Ans. $A^2 - 6A + 17I = 0$

Or, $A(A - 6I) = -17I$

Or, $A^{-1}A(A - 6I) = -17A^{-1}I$.

$A - 6I = -17A^{-1} \quad \therefore A^{-1} = \left(\frac{6I - A}{17} \right)$

DO YOURSELF.

(ii) প্রমাণ করো : $\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \frac{8}{9!} + \dots \infty = \frac{1}{e}$

3 + 3

$= \frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \frac{8}{9!} + \dots \infty$

$= \frac{3-1}{3!} + \frac{5-1}{5!} + \frac{7-1}{7!} + \frac{9-1}{9!} + \dots$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \dots \\
&= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots \\
&= e^{-1} = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

(c) (i) $\log_e(xy) = e^{x+y} + 2$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় করো।

3 + 3

Ans. $\log(xy) = e^{x+y} + 2$

$$\frac{1}{xy} \left(x \times \frac{dy}{dx} + y \right) = e^{x+y} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \right) = e^{x+y} + e^{x+y} \frac{dy}{dx}$$

$$\left(\frac{1}{y} - e^{x+y} \right) \frac{dy}{dx} = e^{x+y} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y} \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - e^{x+y}}$$

(ii) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = k(x-y)$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

Ans. Let, $x = \sin \alpha$, $y = \sin \beta$

$$\cos \alpha + \cos \beta = K (\sin \alpha - \sin \beta)$$

$$\begin{aligned}
\therefore K &= \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \\
&= \cot \frac{\alpha - \beta}{2}
\end{aligned}$$

$$\alpha - \beta = 2 \cot^{-1} K.$$

$$\text{or, } \sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \cot^{-1} K$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (d) (i) $y = 2\cos t - \cos 2t$, $x = \sin t - \sin 2t$ হলে $t = \frac{\pi}{2}$ তে $\frac{dy^2}{dx^2}$ মান নির্ণয় করো। 3+3

Ans. $y = 2\cos t - \cos 2t$, $x = \sin t - \sin 2t$

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin t + 2\cos 2t, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t - 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin t + 2\cos 2t}{\cos t - 2\cos 2t}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi/2} = \frac{-2 + 2\cos \pi}{0 - 2\cos \pi} = \frac{-2 - 2}{+2} = -2$$

- (ii) $2x = y^{\frac{1}{9}} + y^{-\frac{1}{9}}$ হলে দেখাও যে, $(x^2 - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 81y$ 3+3

Ans. $2x = y^{\frac{1}{9}} + y^{-\frac{1}{9}}$

$$\left(y^{\frac{1}{9}} - y^{-\frac{1}{9}} \right) = (2x)^2 - 4 = 4(x^2 - 1)$$

$$\therefore y^{\frac{1}{9}} - y^{-\frac{1}{9}} = \pm 2\sqrt{x^2 - 1}$$

$$y^{\frac{1}{9}} + y^{-\frac{1}{9}} = 2x$$

$$\therefore 2y^{\frac{1}{9}} = 2\left((x + \sqrt{x^2 - 1}) \right)$$

$$y = \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right)^9$$

$$\frac{dy}{dx} = 9\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right)^8 \cdot \left(1 \pm \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

$$= \pm 9 \frac{\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right)^9}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pm 9y}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\left(\sqrt{x^2 - 1} \right) y_1 = \pm 9y$$

$$\text{or, } (x^2 - 1) y_1^2 = 81y^2$$

$$\text{or, } (x^2 - 1) 2y_1y_2 + 2xy_1^2 = 2 \times 81 yy_1$$

$$\text{or, } (x^2 - 1) y_2 + xy_1 = 81y \text{ (Proved).}$$

(e) (i) প্রমাণ করো : $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$ 3+3

Ans. $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$

$$= \int \frac{dx}{5 + 4 \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2}} = \int \frac{\sec^2 x/2}{9 + \tan^2 x/2} dn$$

$$= 2 \int \frac{d(\tan x/2)}{(3)^2 + \tan^2 x/2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x/2}{3} \right) + c.$$

(ii) মান নির্ণয় করো : $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ 3+3

Ans. $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ $x = \cos \theta$

$dx = -\sin \theta d\theta$

$$= \int_{\pi/2}^0 \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} \times -\sin \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \tan \theta / 2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta / 2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \theta / 2 d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$= [\theta - \sin \theta]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

(f) (i) মান নির্ণয় করো : $\int \frac{\log x}{(1 + \log x)^2} dx$ 3+3

Ans. $\int \frac{\log x}{(1 + \log x)^2} dx$ $\log_e^x = z$

$$\therefore x = e^z$$

$$dx = e^z dz$$

$$= \int \frac{z e^z}{(1+z)^2} dz$$

$$= \int e^z \left(\frac{z+1-1}{(1+z)^2} \right) dz$$

$$= \int e^z \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+1} \right] dz$$

$$= \frac{e^z}{z+1} + c = \frac{x}{\log x + 1} + c$$

(ii) মান নির্ণয় করো : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ 3+3

Ans. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$

Let, $x - \alpha = z^2$ then integrate (Do yourself)

(g) (i) প্রমাণ করো : $\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} + 1)$ 3+3

Ans. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin x + \cos x}$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi/2 - x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\therefore 2I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

See the Ans. Sec-3 Q(c) (iii).

(ii) মান নির্ণয় করো : $\int \frac{dx}{3 + 2\sin x + \cos x}$ 3+3

Ans. $I = \int \frac{dx}{3 + 2\sin x + \cos x}$

$$= \int \frac{dx}{3 + 2 \frac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} + \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\sec^2 x/2 \, dx}{3 + 3\tan^2 x/2 + 4\tan x/2 + 1 - \tan^2 x/2} \\
&= \int \frac{\sec^2 x/2 \, dx}{4 + 4 \tan x/2 + 2\tan^2 x/2} \\
&= \int \frac{2dz}{2z^2 + 4z + 4} \quad [\because \tan x/2 = z] \\
&= \int \frac{dz}{z^2 + 2z + 1 + 1} = \int \frac{dz}{(z+1)^2 + (1)^2} \\
&= \tan^{-1}(z+1) + c = \tan^{-1}(\tan x/2 + 1) + c
\end{aligned}$$

(h) (i) প্রমাণ করো : $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \log 2$

Ans. $I = \int_0^{\pi/2} \log(1 + \tan \theta) d\theta$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \log 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left\{1 + \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}\right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1 + \tan \theta}\right) d\theta$$

$$= \log 2 \int_0^{\pi/4} d\theta - I$$

$$2I = \frac{\pi}{4} \log 2 \quad \therefore \frac{\pi}{8} \log 2$$

(ii) প্রমাণ করো : $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16 \sin 2x} dx = \frac{1}{20} \log 3$ 3+3

Ans. $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16 \sin 2x}$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{25 - 16(\sin x - \cos x)^2} dx$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{dz}{25 - 16z^2} \quad \sin x - \cos x = z$$

$$(\cos x + \sin x)dx = dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} \int_{-1}^0 \frac{dz}{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - z^2} \\
&= \frac{1}{16} \times \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{4}} \left[\ln \left| \frac{\frac{5}{4} + z}{\frac{5}{4} - z} \right| \right]_{-1}^0 \\
&= \frac{1}{40} \times \left[\ln \left| \frac{5/4}{5/4} \right| - \ln \left| \frac{\frac{5}{4} - 1}{\frac{5}{4} + 1} \right| \right] \\
&= \frac{1}{40} \left[0 - \ln \frac{1}{9} \right] \\
&= \frac{1}{20} \log 3 \text{ (Proved).}
\end{aligned}$$